L'intégrale de Sugeno en tant que fonction d'agrégation

Jean-Luc Marichal
Département de Gestion, FEGSS
Université de Liège, B

1] Introduction

Définition. Une fonction d'agrégation est une fonction $M : [0,1]^m \to \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_m) \to M(x_1, \dots, x_m)$

Définition. Une mesure floue sur $X = \{1, \dots, m\}$:

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,1] \text{ t.q. } \begin{cases} \mu_\emptyset = 0, \ \mu_X = 1 \\ R \subseteq S \Rightarrow \mu_R \leq \mu_S \end{cases}$$

Définition. Intégrale de Sugeno de $(x_1, \dots, x_m) \in [0,1]^m$ par rapport à une mesure μ :

$$S_\mu(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{i=1}^{m} \left[x_{(i)} \wedge \mu_{\{(i), \dots, (m)\}} \right]$$

Exemple. Si $x_3 \leq x_1 \leq x_2$, on a

$$S_\mu(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \wedge \mu_{\{3,1,2\}}) \vee (x_1 \wedge \mu_{\{1,2\}}) \vee (x_2 \wedge \mu_{\{2\}})$$

Théorème de représentation.

$$S_\mu(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{T \subseteq X} \left[\mu_T \wedge \left(\bigwedge_{i \in T} x_i \right) \right]$$

Retour à l'exemple précédent.

$$S_\mu(x_1, x_2, x_3) = \cancel{\mu_\emptyset} \vee \cancel{(\mu_1 \wedge x_1)} \vee (\mu_2 \wedge x_2) \vee \cancel{(\mu_3 \wedge x_3)}$$
$$\vee (\mu_{12} \wedge x_1) \vee \cancel{(\mu_{13} \wedge x_3)} \vee \cancel{(\mu_{23} \wedge x_3)} \vee (\mu_{123} \wedge x_3)$$

2] Les fonctions max-min et min-max pondérées

Définition Pour toute fonction d'ensemble $a : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ t.q. $a_\emptyset = 0$ et $\bigvee_{T \subseteq X} a_T = 1$, la fonction max-min pondérée $W_a^{\vee\wedge}$ associée à a est définie par

$$W_a^{\vee\wedge}(\underline{x}) = \bigvee_{T \subseteq X} \left[a_T \wedge \left(\bigwedge_{i \in T} x_i\right)\right] \quad \forall\, \underline{x} \in [0,1]^m$$

La fonction a qui définit $W_a^{\vee\wedge}$ n'est pas univoquement définie. Exemple :

$$x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$$

Proposition

$$W_a^{\vee\wedge} = W_{a'}^{\vee\wedge} \iff \begin{cases} a'_T = a_T & \text{si } a_T > \bigvee_{K \subsetneq T} a_K \\ 0 \leq a'_T \leq \bigvee_{K \subseteq T} a_K & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

$$\underbrace{x_1}_{T=\{1\}} \vee \underbrace{(x_1 \wedge x_2)}_{T=\{1,2\}} = x_1 \vee (\lambda \wedge x_1 \wedge x_2) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Définition $W_a^{\vee\wedge}$ est sous forme

- <u>canonique</u> si $a_T = 0 \iff a_T \leq \bigvee_{K \subsetneq T} a_K$

- <u>complète</u> si $a_T = \bigvee_{K \subseteq T} a_K$ ($\iff$ a croissant)

Exemple.

$(.1 \wedge x_1) \vee (.3 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3)$ (forme canonique)

$= 0 \vee (.1 \wedge x_1) \vee (.3 \wedge x_2) \vee (0 \wedge x_3) \vee$
$(.3 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (.1 \wedge x_1 \wedge x_3) \vee (1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee$
$(1 \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$ (forme complète)

Définition Pour tout $b : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ t.q. $b_\emptyset = 1$ et $\bigwedge_{T \subseteq X} b_T = 0$, la fonction min-max pondérée $W_b^{\wedge\vee}$ associée à b est définie par

$$W_b^{\wedge\vee}(\underline{x}) = \bigwedge_{T \subseteq X} [b_T \vee (\bigvee_{i \in T} x_i)] \quad \forall \underline{x} \in [0,1]^m$$

La fonction b qui définit $W_b^{\wedge\vee}$ n'est pas univoquement définie. Exemple :

$$x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$$

Proposition
$$W_b^{\wedge\vee} = W_{b'}^{\wedge\vee} \iff \begin{cases} b'_T = b_T & \text{si } b_T < \bigwedge_{K \subsetneq T} b_K \\ \bigwedge_{K \subseteq T} b_K \leq b'_T \leq 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition $W_b^{\wedge\vee}$ est sous forme

- canonique si $b_T = 1 \iff b_T \geq \bigwedge_{K \subsetneq T} b_K$
- complète si $b_T = \bigwedge_{K \subseteq T} b_K$ ($\iff b$ décroissant)

3] Formules de correspondance

Proposition Si a est $\nearrow$ et b $\searrow$ (formes complètes), on a

$$W_a^{\vee\wedge} = W_b^{\wedge\vee} \iff a_T = b_{X\setminus T} \quad \forall T \subseteq X$$

Retour à l'exemple précédent.

$(.1 \wedge x_1) \vee (.3 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3)$ (forme canonique)

$= 0 \vee (.1 \wedge x_1) \vee (.3 \wedge x_2) \vee (0 \wedge x_3) \vee$
$(.3 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (.1 \wedge x_1 \wedge x_3) \vee (1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee$
$(1 \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$ (forme complète)

$= 1 \wedge (1 \vee x_1) \wedge (.1 \vee x_2) \wedge (.3 \vee x_3) \wedge$
$(0 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (.3 \vee x_1 \vee x_3) \wedge (.1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge$
$(0 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ (forme complète)

$= (.1 \vee x_2) \wedge (.3 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2)$ (forme canonique)

4/ Représentations alternatives de l'intégrale de Sugeno

Théorème de représentation

$$S_\mu(x_1,-,x_n) = \bigvee_{i=1}^{n} \left[x_{(i)} \wedge \mu_{\{(i),-,(n)\}}\right]$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n} \left[x_{(i)} \vee \mu_{\{(i+1),--,(n)\}}\right]$$

$$= \bigvee_{T\subseteq X} \left[\mu_T \wedge \left(\bigwedge_{i\in T} x_i\right)\right]$$

$$= \bigwedge_{T\subseteq X} \left[\mu_{X\setminus T} \vee \left(\bigvee_{i\in T} x_i\right)\right]$$

$$= \text{médiane}\left(x_1,-,x_n, \mu_{\{(2),-,(n)\}}, -, \mu_{\{(n)\}}\right)$$

Toute mesure μ peut être vue comme une fonction

$$f : \{0,1\}^n \to [0,1]$$

Une telle fonction peut être mise sous la forme

$$f(x) = \bigvee_{T\subseteq X} \left[\mu_T \wedge \left(\bigwedge_{i\in T} x_i\right)\right]$$

puisque $f(e_R) = \bigvee_{T\subseteq R} \mu_T = \mu_R$

Corollaire S_μ est une extension sur $[0,1]^n$ de la fonction f qui définit μ.

5] Théorèmes de caractérisation

Théorème La fonction $M : [0,1]^m \to [0,1]$ vérifie

- croissance
- $M(x_1 \wedge r, \dots, x_m \wedge r) = M(x_1, \dots, x_m) \wedge r$
- $M(x_1 \vee r, \dots, x_m \vee r) = M(x_1, \dots, x_m) \vee r$

si et seulement s'il existe une mesure μ telle que

$$M = S_\mu .$$

Théorème La fonction $M : [0,1]^2 \to [0,1]$ vérifie

- croissance
- idempotence $(M(x, \dots, x) = x)$
- continuité
- associativité $(M(M(x_1, x_2), x_3) = M(x_1, M(x_2, x_3)))$

si et seulement s'il existe une mesure μ telle que

$$M = S_\mu .$$

6] Les fonctions max-min et min-max booléennes

Définition On définit

$$\begin{cases} B_a^{\vee\wedge} = W_a^{\vee\wedge} & \text{avec } a_T \in \{0,1\} \quad \forall T \subseteq X \\ B_b^{\wedge\vee} = W_b^{\wedge\vee} & \text{avec } b_T \in \{0,1\} \quad \forall T \subseteq X \end{cases}$$

Proposition Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) M est une fonction max-min booléenne
(ii) " " min-max "
(iii) $M = S_\mu$ où μ est une mesure 0-1
(iv) $M = S_\mu$ et est unanimement croissant
(v) M est CM, Id. et continu
(vi) M est CM, Id. et croissant

Définition M est CM (comparison meaningful) si
$M(x_1,-,x_m) \leq M(x'_1,-,x'_m) \Rightarrow M(\phi x_1,-,\phi x_m) \leq M(\phi x'_1,-,\phi x'_m)$

Proposition M est CM et continu <u>ssi</u> M est constant ou $\exists\, a : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ et $g:[0,1]\to[0,1]$ strictement monotone t.q.

$$M = g \circ B_a^{\vee\wedge}.$$

7] Les fonctions min et max pondérés

Définition Pour tout vecteur poids $(\omega_1, -, \omega_m) \in [0,1]^m$ t.q. $\bigvee_{i=1}^{m} \omega_i = 1$, la fonction max pondérée $W_\omega^\vee$ associée à ω est définie par

$$W_\omega^\vee(\underline{x}) = \bigvee_{i=1}^{m} (\omega_i \wedge x_i) \qquad \forall \underline{x} \in [0,1]^m$$

Propriété S_μ est un $W_\omega^\vee$ <u>ssi</u> μ est une mesure de possibilité π définie par

$$\pi(R \cup S) = \pi(R) \vee \pi(S) \qquad R, S \subseteq X$$

$$(\mu_T = \bigvee_{i \in T} \omega_i)$$

Définition $\forall\ (\omega_1, -, \omega_m) \in [0,1]^m$, t.q. $\bigwedge_{i=1}^{m} \omega_i = 0$, la fct min pondérées $W_\omega^\wedge$ associée à ω est déf. par

$$W_\omega^\wedge(\underline{x}) = \bigwedge_{i=1}^{m} (\omega_i \vee x_i) \qquad \forall \underline{x} \in [0,1]^m$$

Propriété S_μ est un $W_\omega^\wedge$ <u>ssi</u> μ est une mesure de nécessité N définie par

$$N(R \cap S) = N(R) \wedge N(S) \quad , R, S \subseteq X$$

$$(\mu_T = \bigwedge_{i \in X \setminus T} \omega_i)$$

8] Les statistiques d'ordre

Définition Pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, la fonction statistique d'ordre OS_k associée à k s'écrit

$$OS_k(x_1, \ldots, x_m) = x_{(k)} \quad \text{où} \quad x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(m)}$$

Proposition S_μ est un OS_k ssi S_μ est symétrique et μ est une mesure 0-1.

Proposition Pour tout $k \in X$, on a

$$x_{(k)} = \bigvee_{\substack{T \subseteq X \\ |T| = m-k+1}} \left(\bigwedge_{i \in T} x_i \right) = \bigwedge_{\substack{T \subseteq X \\ |T| = k}} \left(\bigvee_{i \in T} x_i \right)$$

En particulier,

$$\text{médiane}(x_1, \ldots, x_{2k-1}) = x_{(k)}$$

$$= \bigvee_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 2k-1} (x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k})$$

$$= \bigwedge_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 2k-1} (x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_k})$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{médiane}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \\ &= (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \end{aligned}$$

9] Les médianes associatives

Définition Pour tout $\theta \in [0,1]$ la médiane associative $amed_\theta$ associée à θ s'écrit

$$amed_\theta(x_1, \ldots, x_m) = \text{médiane}\left(\bigwedge_{i=1}^{m} x_i, \bigvee_{i=1}^{m} x_i, \theta\right)$$

$$= \text{médiane}(x_1, \ldots, x_m, \underbrace{\theta, \ldots, \theta}_{m-1})$$

Proposition S_μ est un $amed_\theta$ <u>ssi</u> μ est constant sur $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$.

Proposition $M : \bigcup_{m \geq 1} [0,1]^m \to [0,1]$ vérifie

- continuité
- idempotence
- croissance
- symétrie
- associativité

si et seulement si $\exists \theta \in [0,1]$ t.q.

$$M^{(m)} = amed_\theta^{(m)} \quad \forall m \geq 1.$$