Agrégation sur des échelles ordinales finies par des fonctions indépendantes des échelles

Aggregation on finite ordinal scales by scale independent functions

Jean-Luc Marichal[1] Radko Mesiar[2]

[1] Faculté de Droit, d'Économie et de Finance, Université du Luxembourg

[2] Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering, Slovak Technical University

[1] 162a, avenue de la Faïencerie, L-1511 Luxembourg, G. D. Luxembourg, jean-luc.marichal@uni.lu

[2] Radlinskeho 11, SK-81368 Bratislava, Slovakia, mesiar@leo.svf.stuba.sk

Résumé :

Nous donnons une interprétation des fonctions ordinales invariantes comme fonctions indépendantes des échelles pour l'agrégation sur des échelles ordinales finies. Plus précisément, nous montrons comment les fonctions ordinales invariantes agissent, à travers des représentants discrets, sur des échelles ordinales représentées par des chaînes finies. En particulier, cette interprétation permet de justifier d'une façon naturelle la propriété de continuité pour certaines fonctions ordinales invariantes.

Mots-clés :

Fusion d'informations, fonctions d'agrégation, échelles ordinales finies, fonctions ordinales invariantes, fonctions discrètes lisses.

Abstract:

We give an interpretation of order invariant functions as scale independent functions for the aggregation on finite ordinal scales. More precisely, we show how order invariant functions can act, through discrete representatives, on ordinal scales represented by finite chains. In particular, this interpretation allows us to justify the continuity property for certain order invariant functions in a natural way.

Keywords:

Information fusion, Aggregation functions, Finite ordinal scales, Order invariant functions, Smooth discrete functions.

1 Introduction

Une échelle ordinale finie peut être définie de deux façons équivalentes ; l'une est symbolique et l'autre est numérique. Symboliquement, une échelle ordinale finie est une chaîne finie $(S,\preccurlyeq)$, i.e. un ensemble fini totalement ordonné, dont les éléments sont rangés selon un certain critère. Par exemple [5, 6], une échelle d'évaluation d'un produit par un consommateur telle que

$$S=\{M\prec AM\prec A\prec PMB\prec B\}$$

est une échelle ordinale finie, dont les éléments M, AM, A, PMB, B représentent les termes linguistiques suivants : *mauvais*, *assez mauvais*, *acceptable*, *plus ou moins bon*, *bon*. Numériquement, une échelle ordinale finie est une suite strictement croissante et finie de nombres réels définis à l'ordre près et représentant les repères d'évaluation possibles définis sur un certain critère ; voir e.g. [16]. Par exemple, les suites

$$(1,2,3,4,5) \text{ et } (-6.5,-1.2,8.7,205.6,750)$$

représentent deux versions équivalentes de l'échelle d'évaluation définie ci-dessus.

L'équivalence entre ces deux définitions découle immédiatement du fait que l'ordre défini sur n'importe quelle chaîne finie $(S,\preccurlyeq)$ peut toujours être numériquement représenté dans un interval réel $E\subseteq\mathbb{R}$ au moyen d'un isomorphisme $f:S\to E$ préservant l'ordre des éléments et défini à une bijection croissante $\phi:E\to E$ près ; voir e.g. [7].

Supposons à présent que nous ayons n évaluations exprimées dans une même échelle ordinale $(S,\preccurlyeq)$ de cardinal $k=|S|$ et supposons que nous voulions agréger ces évaluations et obtenir une évaluation globale représentative dans la même échelle. Bien sûr, nous pouvons utiliser une fonction d'agrégation discrète

$G : S^n \to S$, i.e. une fonction qui trie k^n n-uples dans k classes. Nous pourrions tout aussi bien utiliser une fonction d'agrégation à n variables qui soit universelle dans le sens qu'elle est *indépendante* de l'échelle ordinale utilisée. Dans ce dernier cas, puisqu'aucune échelle ne peut être spécifiée, la fonction d'agrégation doit nécessairement être une fonction numérique $M : E^n \to E$. Par exemple, la fonction médiane, qui donne la valeur centrale d'une suite ordonnée de longueur impaire, est une *fonction indépendante des échelles* (FIE) qui est capable d'agréger des valeurs numériques exprimées sur n'importe quelle échelle ordinale.

Dans cet article, nous étudions deux types de FIE pour l'agrégation sur des échelles ordinales finies. D'abord, nous considérons les fonctions qui envoient n copies d'une même échelle ordinale vers elle-même (voir Définition 4.1). Ensuite, nous considérons les fonctions qui envoient n copies d'une même échelle ordinale vers une échelle ordinale, éventuellement différente (voir Définition 4.3). Nous montrons que ces fonctions s'identifient aux *fonctions ordinales invariantes* (FOI), qui ont déjà été étudiées et décrites dans un cadre purement numérique [10] (voir aussi [8, 12]). Notre principale contribution ici est donc d'interpréter ces dernières comme des FIE, i.e. des fonctions numériques qui ont toujours des représentants symboliques lorsqu'elles agissent sur des échelles ordinales spécifiées.

Bien qu'à première vue il semble inapproprié de demander à une FIE d'être une fonction continue, nous montrons aussi que la continuité peut être interprétée d'une manière très naturelle pour les FIE du premier type.

Cet article est organisé de la façon suivante. A la Section 2, nous introduisons les notations et les hypothèses que nous adoptons. A la Section 3, nous rappelons le concept de sous-ensemble invariant, qui est nécessaire pour décrire les FIE. A la Section 4, nous présentons séparément les deux types de FIE mentionnées ci-dessus. Finalement, à la Section 5, nous étudions la propriété de continuité pour ces fonctions.

2 Notations et hypothèses de travail

Soit E un intervalle réel, éventuellement non borné, et soient $e_0 := \inf E$, $e_1 := \sup E$, et $E^\circ := E \setminus \{e_0, e_1\}$. $B(E)$ désigne l'ensemble des bornes incluses de E, i.e.

$$B(E) := \{e_0, e_1\} \cap E.$$

Le groupe des automorphismes de E, i.e. le groupe de toutes les bijections croissantes ϕ de E dans lui-même, est noté $A(E)$. Nous noterons également l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ par $[n]$ et les opérations minimum et maximum respectivement par $\wedge$ et $\vee$.

Pour tout entier $k \geqslant 2$, une échelle ordinale $(S, \preccurlyeq)$ à k points sera notée

$$S = \{s_1 \prec s_2 \prec \cdots \prec s_k\}$$

où $s_1 = s_*$ (resp. $s_k = s^*$) est l'élément le plus bas (resp. le plus haut) de l'échelle et $\prec$ représente la partie asymétrique de $\preccurlyeq$.

Puisque la relation binaire $\preccurlyeq$ est un ordre total sur un ensemble fini S, il peut toujours être numériquement représenté au moyen d'un isomorphisme $f : S \to E$ tel que

$$s_i \preccurlyeq s_j \quad \Leftrightarrow \quad f(s_i) \leqslant f(s_j),$$

voir [7, Chapitre 1]. Un tel isomorphisme est défini à un automorphisme $\phi \in A(E)$ près ; i.e., avec f, toutes les fonctions $f' = \phi \circ f$ (et uniquement ces fonctions) représentent le même ordre sur S. Ainsi, $A(E)$ représente l'ensemble de toutes les *transformations d'échelle admissibles*, i.e., les transformations de E qui permettent de passer d'une échelle numérique quelconque à une échelle équivalente ; voir e.g. [16].

Nous supposerons toujours que f préserve les éléments extrêmes, i.e., si $e_0 \in E$ (resp. $e_1 \in E$) alors $f(s_*) = e_0$ (resp. $f(s^*) = e_1$) pour toute échelle ordinale $(S, \preccurlyeq)$. Ceci revient à supposer que l'élément le plus bas s_* (resp. le plus haut s^*) d'une échelle donnée est commun à toutes les échelles considérées et que sa représentation numérique est nécessairement e_0 (resp. e_1). C'est la raison pour laquelle nous considérons des représentations numériques dans un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$, éventuellement non ouvert, plutôt que dans $\mathbb{R}$ lui-même. Par exemple, si $E = [0, 1]$, toutes les échelles ordinales considérées ont des extrémités fixées.

Pour alléger les notations, nous écrirons respectivement $\phi(x)$ et $f(a)$ au lieu de

$$(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) \text{ et } (f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

Finalement, l'ensemble des valeurs possibles prises par une fonction f sera noté $\mathrm{ran}(f)$.

3 Sous-ensembles invariants

Dans cette section, nous rappelons le concept de sous-ensemble invariant ; voir e.g. [1, 10, 12].

Définition 3.1. Un sous-ensemble non vide $I \subseteq E^n$ est dit *invariant* si

$$x \in I \;\Rightarrow\; \phi(x) \in I \qquad (\phi \in A(E)).$$

Un ensemble invariant I est dit *minimal* s'il n'a aucun sous-ensemble invariant propre.

La famille $\mathcal{I}(E^n)$ de tous les sous-ensembles invariants minimaux (SEIM) de E^n fournit une partition de E^n en des classes d'équivalence, où $x, y \in E^n$ sont équivalents s'il existe $\phi \in A(E)$ tel que $y = \phi(x)$. Une description complète des éléments de $\mathcal{I}(E^n)$ est donnée dans la proposition suivante [1, 12] :

Proposition 3.1. *On a $I \in \mathcal{I}(E^n)$ si et seulement s'il existe une permutation π sur $[n]$ et une suite $\{\lhd_i\}_{i=0}^n$ de symboles $\lhd_i \in \{<, =\}$, qui ne sont pas tous des égalités si $e_0 \in E$ et $e_1 \in E$, telles que*

$$I = \{x \in E^n | e_0 \lhd_0 x_{\pi(1)} \lhd_1 \cdots \lhd_{n-1} x_{\pi(n)} \lhd_n e_1\},$$

où $\lhd_0$ est $<$ si $e_0 \notin E$ et $\lhd_n$ est $<$ si $e_1 \notin E$.

Exemple 3.1. Le carré $[0, 1]^2$ contient exactement onze SEIM, à savoir les triangles ouverts $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < x_2 < 1\}$ et $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_2 < x_1 < 1\}$, la diagonale ouverte $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 = x_2 < 1\}$, les quatre sommets du carré, et les quatres segments ouverts joignant des sommets voisins.

4 Fonctions indépendantes des échelles

Dans cette section, nous étudions les deux types de FIE dont nous avons parlé dans l'introduction. En fait, nous verrons que ces fonctions ne sont rien d'autre que les FOI, à savoir : les *fonctions invariantes* et les *fonctions signifiantes en comparaison.*

4.1 Fonctions indépendantes des échelles identiques

Les premières FIE que nous étudions sont les fonction d'agrégation numériques à n variables dont les valeurs d'entrée et de sortie sont exprimées sur une même échelle ordinale. Nous les appelons *fonctions indépendantes des échelles identiques* (FIEI).

Définition 4.1. Une fonction $M : E^n \to E$ est dite *indépendantes des échelles identiques* si, pour toute échelle ordinale finie $(S, \preccurlyeq)$, il existe une fonction d'agrégation $G : S^n \to S$ telle que, pour tout isomorphisme $f : S \to E$ préservant les extrêmes, nous avons

$$M[f(a)] = f[G(a)] \qquad (a \in S^n). \tag{1}$$

Nous disons alors que G représente M dans $(S, \preccurlyeq)$.

Comme toute transformation admissible des valeurs d'entrée doit entraîner la même transformation des valeurs de sortie, il apparaît que les FIEI sont des *fonction invariantes* au sens suivant (voir [8, 11, 12, 15]) :

Définition 4.2. $M : E^n \to E$ est une fonction *invariante* si

$$M[\phi(x)] = \phi[M(x)]$$

pour tout $x \in E^n$ et tout $\phi \in A(E)$.

La description complète de ces fonctions a été donnée récemment comme suit [10, 12] :

Théorème 4.1. *$M : E^n \to E$ est une fonction invariante si et seulement si, pour tout $I \in \mathcal{I}(E^n)$, soit $M|_I \equiv c \in B(E)$ (si cette constante existe), ou il existe $i \in [n]$ tel que $M|_I = P_i|_I$ est la projection sur la i-ème coordonnée.*

Ainsi, une fonction invariante $M : E^n \to E$ se réduit, sur chaque SEIM de E^n, à une constante ou une projection sur une coordonnée. En particulier, on a

$$M(x) \in \{x_1, \ldots, x_n\} \cup B(E) \qquad (x \in E^n).$$

Nous avons aussi le résultat suivant :

Proposition 4.1. *La fonction $M : E^n \to E$ est une FIEI si et seulement si elle est invariante.*

D'après la Proposition 4.1, une fonction invariante $M : E^n \to E$ peut toujours être représentée par une fonction d'agrégation discrète $G : S^n \to S$ sur n'importe quelle échelle ordinale $(S, \preccurlyeq)$, quel que soit le cardinal de cette échelle. De plus, il est clair à partir de (1) que G est univoquement déterminé et isomorphe à la "restriction" de M à S^n.

Exemple 4.1. Soient $n = 2$ et $M(x) = x_1 \wedge x_2$. Alors, le représentant unique G de M est défini par $G(a) = a_1 \wedge a_2$ pour tout $a \in S^2$.

Il est facile de voir que, pour une échelle ordinale donnée $(S, \preccurlyeq)$, l'ensemble des fonctions $G : S^n \to S$ représentant les fonctions invariantes dans $(S, \preccurlyeq)$ se décrit exactement par la version discrète du Théorème 4.1, où E est remplacé par S et où la famille des SEIM "discrets" de S^n est simplement définie par

$$\{f^{-1}(I) \mid I \in \mathcal{I}(E^n)\},$$

pour tout f fixé, ou, indépendamment de tout f, au moyen de la Proposition 3.1. Bien sûr, pour avoir une correspondance 1-1 entre M et G nous devons avoir $f^{-1}(I) \neq \varnothing$ pour tout $I \in \mathcal{I}(E^n)$, condition qui est vérifiée si et seulement si

$$|S| \geqslant n + |B(E)|.$$

Dans ce cas, étant donnés $I \in \mathcal{I}(E^n)$ et $i \in [n]$, nous avons $M|_I = P_i|_I$ (resp. $M|_I \equiv e_0$, $M|_I \equiv e_1$) si et seulement si $G(a) = a_i$ (resp. $G(a) = s_*$, $G(a) = s^*$) pour tout $a \in f^{-1}(I)$, f étant fixé. D'autre part, si $|S| < n + |B(E)|$, plusieurs M peuvent conduire au même G. Par exemple, si $n = 2$, $|S| = 3$, $E = [0, 1]$ et $I \in \mathcal{I}([0, 1]^2)$ est l'un des deux triangles ouverts, alors $f^{-1}(I) = \varnothing$ et, pour un G donné, la fonction invariante M peut prendre n'importe quelle valeur dans I.

4.2 Fonctions indépendantes des échelles d'entrée identiques

A présent, nous étudions les FIE dont les valeurs d'entrée sont exprimées dans une même échelle ordinale et dont les valeurs de sortie dans une échelle ordinale. Nous appelons ces fonctions, *fonctions indépendantes des échelles d'entrée identiques* (FIEEI).

Définition 4.3. Une fonction $M : E^n \to \mathbb{R}$ est dite *indépendantes des échelles d'entrée identiques* si, pour toute échelle ordinale finie $(S, \preccurlyeq_S)$, il existe une échelle ordinale finie $(T, \preccurlyeq_T)$ et une fonction d'agrégation surjective $G : S^n \to T$ telles que, pour tout isomorphisme $f : S \to E$ préservant les extrêmes, il existe un isomorphisme $g_f : T \to \mathbb{R}$ tel que

$$M[f(a)] = g_f[G(a)] \qquad (a \in S^n). \quad (2)$$

Nous disons alors que G représente M dans $(S, \preccurlyeq_S)$.

Tout comme les FIEI sont exactement les fonctions invariantes, nous allons voir que les FIEEI sont exactement les fonctions *signifiantes en comparaison* (voir [8, 10, 13, 14, 17]).

Définition 4.4. $M : E^n \to \mathbb{R}$ est dit *signifiant en comparaison* (à partir d'une échelle ordinale) si

$$M(x) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} \right\} M(x')$$

$$\Rightarrow \quad M[\phi(x)] \left\{ \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} \right\} M[\phi(x')]$$

pour tous $x, x' \in E^n$ et tout $\phi \in A(E)$.

La description complète de ces fonctions a été donnée récemment comme suit [10] :

Théorème 4.2. *$M : E^n \to \mathbb{R}$ est une fonction signifiante en comparaison si et seulement si, pour tout $I \in \mathcal{I}(E^n)$, il existe un indice $i_I \in [n]$ et une fonction constante ou strictement monotone $g_I : P_{i_I}(I) \to \mathbb{R}$ telle que*

$$M|_I = g_I \circ P_{i_I}|_I,$$

où, pour tout $I, J \in \mathcal{I}(E^n)$, soit $g_I = g_J$, ou $\mathrm{ran}(g_I) = \mathrm{ran}(g_J)$ est un singleton, ou $\mathrm{ran}(g_I) < \mathrm{ran}(g_J)$, ou $\mathrm{ran}(g_I) > \mathrm{ran}(g_J)$.

(NB : $\mathrm{ran}(g_I) < \mathrm{ran}(g_J)$ signifie que pour tout $r \in \mathrm{ran}(g_I)$ et tout $s \in \mathrm{ran}(g_J)$, on a $r < s$.)

Ainsi, une fonction signifiante en comparaison $M : E^n \to \mathbb{R}$ se réduit, sur chaque SEIM de E^n, à une constante ou une transformée de projection sur une coordonnée.

Le résultat suivant montre clairement que la signifiance en comparaison généralise l'invariance :

Proposition 4.2. *$M : E^n \to \mathbb{R}$ est une fonction signifiante en comparaison si et seulement si, pour tout $\phi \in A(E)$, il existe une fonction strictement croissante $\psi_\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que*

$$M[\phi(x)] = \psi_\phi[M(x)] \qquad (x \in E^n). \qquad (3)$$

Notons qu'il est clair à partir de (3) que la restriction de ψ_ϕ à $\mathrm{ran}(M)$ est univoquement déterminée.

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.3. *La fonction $M : E^n \to \mathbb{R}$ est une FIEEI si et seulement si elle est signifiante en comparaison.*

D'après la Proposition 4.3 une fonction signifiante en comparaison $M : E^n \to \mathbb{R}$ peut toujours être représentée par une fonction d'agrégation discrète $G : S^n \to T$ sur n'importe quelle échelle ordinale $(S, \preccurlyeq_S)$, quel que soit le cardinal de cette échelle. De plus, les étapes nécessaires pour déterminer l'échelle d'arrivée T et les fonctions $G : S^n \to T$ et $g_f : T \to \mathbb{R}$ sont :

Étape 1. Fixer un isomorphisme particulier $f^* : S \to E$, préservant les extrêmes.

Étape 2. On a $T = \{t_1 \prec \cdots \prec t_{|R|}\}$, où

$$\begin{aligned} R &:= \{r_1 < \cdots < r_{|R|}\} \\ &= \{M[f^*(a)] \mid a \in S^n\}. \end{aligned}$$

Étape 3. On a $G(a) = \sigma^{-1}(M[f^*(a)])$, où $\sigma : T \to R$ est défini par $\sigma(t_i) = r_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |R|$.

Étape 4. Déterminer l'unique fonction $\psi_\phi : \mathrm{ran}(M) \to \mathrm{ran}(M)$ de la Proposition 4.2.

Étape 5. On a $g_f = \psi_{f \circ f^{*-1}} \circ \sigma$.

Nous observons clairement que, étant donné $M : E^n \to \mathbb{R}$ et $(S, \preccurlyeq_S)$, l'échelle T et les fonctions $G : S^n \to T$ et $g_f : T \to \mathbb{R}$ sont univoquement déterminées et ne dépendent pas du choix de f^*.

Exemple 4.2. Soit $M : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ défini par

$$M(x) = x_1 \wedge x_2 + 2\,\mathrm{sign}(x_2 - x_1).$$

Alors, étant donné une échelle ordinale à trois points $(S, \preccurlyeq_S)$ et un isomorphisme $f^* : S \to E$ préservant les extrêmes, nous avons

$$R = \{-2 < z - 2 < 0 < z < 1 < 2 < z + 2\},$$

où $z = f^*(s_2)$. Ensuite, nous avons $|T| = 7$ et la fonction $G : S^n \to T$ est donnée par

$$G(a) = \sigma^{-1}[f^*(a_1 \wedge a_2) + 2\,\mathrm{sign}(a_2 - a_1)],$$

ou, de façon équivalente, par la table

$a_2 \backslash a_1$	s_1	s_2	s_3
s_1	t_3	t_1	t_1
s_2	t_6	t_4	t_2
s_3	t_6	t_7	t_5

Finalement,

$$\psi_\phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{if } x \in [0,1], \\ \phi(x-2)+2, & \text{if } x \in [2,3), \\ \phi(x+2)-2, & \text{if } x \in [-2,-1). \end{cases}$$

et

$$g_f(t_i)=\begin{cases} (f \circ f^{*-1})[\sigma(t_i)], & \text{if } i = 3,4,5, \\ (f \circ f^{*-1})[\sigma(t_i)-2]+2, & \text{if } i = 6,7, \\ (f \circ f^{*-1})[\sigma(t_i)+2]-2, & \text{if } i = 1,2. \end{cases}$$

Notons que la relation entre M et G n'est pas aussi claire que dans le cas des FIEI. En particulier, reconstruire M à partir de G semble être une tâche difficile. Nous proposons alors le problème suivant :

Problème ouvert 1. Décrire toutes les fonctions signifiantes en comparaison ayant le même représentant discret.

Notons aussi que, de (2), nous avons immédiatement le résultat suivant, qui nous sera utile dans la dernière section :

Proposition 4.4. *Soit $M : E^n \to \mathbb{R}$ une FIEEI, avec représentant discret $G : S^n \to T$. Alors, pour toute fonction $g : \mathrm{ran}(M) \to \mathbb{R}$ strictement croissante (resp. strictement décroissante), le représentant discret de $g \circ M$ est $\eta \circ G : S^n \to T'$, où T' est isomorphe à T pour l'ordre et $\eta : T \to T'$ est défini par $\eta(t_i) = t'_i$ (resp. $\eta(t_i) = t'_{|T|-i+1}$) pour tout $i = 1, \ldots, |T|$.*

5 Fonctions ordinales invariantes continues

Dans cette dernière section, nous examinons le cas des FOI continues, à savoir les fonctions invariantes continues et les fonctions signifiantes en comparaison continues.

Jusqu'à récemment, on croyait que cela n'avait pas de sens de combiner la continuité avec une propriété d'invariance pour l'ordre. L'argument évoqué était que la définition classique de la continuité utilise la distance entre les valeurs numériques et donc fait usage des propriétés cardinales de ces valeurs, alors qu'une propriété d'invariance implique que les propriétés cardinales des valeurs numériques ne doivent pas être prises en compte.

En fait, comme nous allons maintenant le voir, la continuité a du sens pour les fonctions invariantes et peut même être interprétée d'une façon très naturelle. Plus précisément, nous donnons une interprétation de la continuité pour les fonctions invariantes en imposant une propriété de *lissage* sur leurs représentants discrets.

Nous montrerons aussi qu'une telle interprétation ne s'applique pas pour les fonction signifiantes en comparaison et que la continuité est une condition plutôt restrictive pour ces fonctions.

Décrivons tout d'abord les FOI continues. Un exemple typique de ces fonctions continues est donnée par un *polynôme latticiel* [2] :

Définition 5.1. Un polynôme latticiel à n variables est une expression contenant n variables $x_1, \ldots, x_n$ liées par les opérations latticielles $\wedge = \min$ et $\vee = \max$ dans une combinaison arbitraire de parenthèses.

On peut montrer (voir e.g. [2, Chapitre 2, §5]) que tout polynôme latticiel dans $\mathbb{R}^n$ peut être mis sous la *forme normale disjonctive* :

$$L_\gamma(x) = \bigvee_{\substack{A \subseteq [n] \\ \gamma(A)=1}} \bigwedge_{i \in A} x_i \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

où $\gamma : 2^{[n]} \to \{0,1\}$ est une fonction d'ensemble non décroissante et non constante. Nous dénoterons par Γ_n la famille de ces fonctions d'ensemble.

La description complète des FOI continues est donnée dans les deux théorèmes suivants [8, 10] :

Théorème 5.1. *$M : E^n \to E$ est une fonction invariante continue si et seulement si $M \equiv c \in B(E)$ (si cette constante existe) ou il existe $\gamma \in \Gamma_n$ tel que $M = L_\gamma$.*

Théorème 5.2. $M : E^n \to \mathbb{R}$ *est une fonction signifiante en comparaison continue si et seulement s'il existe* $\gamma \in \Gamma_n$ *et une fonction* $g : E \to \mathbb{R}$ *continue et strictement monotone ou constante telle que* $M = g \circ L_\gamma$.

Nous donnons maintenant une interprétation de la continuité pour les fonctions invariantes à travers leurs représentants discrets. Dans ce but, nous utilisons le concept de *lissage* [4] pour les fonctions discrètes.

Soit $(S, \preccurlyeq) = \{s_1 \prec \cdots \prec s_k\}$ une échelle ordinale à k points et soit $a \in S$. Pour localiser a dans S nous définissons une fonction d'indice $\mathrm{ind} : S \to \{1, \ldots, k\}$ par

$$\mathrm{ind}(a) = r \quad \Leftrightarrow \quad a = s_r \qquad (1 \leqslant r \leqslant k).$$

Dans la suite, pour tout $i \in [n]$, $S^{(i)}$ représente une échelle ordinale finie.

Définition 5.2. Une fonction discrète $G : \times_{i=1}^n S^{(i)} \to T$ est dite *lisse* si, pour tout $a, b \in \times_{i=1}^n S^{(i)}$, nous avons

$$\sum_{i=1}^n |\mathrm{ind}(a_i) - \mathrm{ind}(b_i)| \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{ind}[G(a)] - \mathrm{ind}[G(b)]| \leqslant 1.$$

La propriété de lissage, initialement introduite seulement pour les fonctions discrètes non décroissantes (voir [4]), représente l'équivalent discret de la continuité. De plus, on peut montrer (voir [3, Théorème 2] pour une preuve dans un cas particulier) que cette propriété est équivalente à la version discrète de la propriété des valeurs intermédiaires. Le résultat est le suivant :

Proposition 5.1. *La propriété de lissage pour* $G : \times_{i=1}^n S^{(i)} \to T$ *est équivalente à la condition suivante : Pour tout* $j \in [n]$ *et tout* $a, b \in \times_{i=1}^n S^{(i)}$ *différant uniquement sur la coordonnée* j*, l'élément* $t \in T$ *est entre* $G(a)$ *et* $G(b)$ *inclus si et seulement s'il existe* $c \in \times_{i=1}^n S^{(i)}$*, différant de* a *et* b *seulement sur la coordonnée* j*, tel que* c_j *est un élément entre* a_j *et* b_j *inclus et* $t = G(c)$.

Nous allons maintenant montrer que toute fonction invariante est continue si et seulement si elle est représentée uniquement par des fonction d'agrégation discrètes lisses. Ceci fait de la continuité une propriété qui a du sens, et même attrayante, pour les fonctions invariantes. Nous allons aussi montrer que cette propriété ne s'applique pas pour les fonctions signifiantes en comparaison. Plus précisément, nous allons montrer que la continuité est une condition seulement suffisante pour que ces fonctions soient représentées uniquement par des fonctions discrètes lisses.

Proposition 5.2. *Une fonction invariante* $M : E^n \to E$ *est continue si et seulement si elle est représentée uniquement par des fonctions d'agrégation discrète lisses.*

Examinons à présent le cas des fonctions signifiantes en comparaison continues. Par la Proposition 4.4, nous observons que toute fonction invariante continue de la forme L_γ et toute fonction signifiante en comparaison continue et non constante de la forme $g \circ L_\gamma$, où g est strictement croissant (resp. strictement décroissant), conduisent respectivement aux représentants $L_\gamma : S^n \to S$ et $\eta \circ L_\gamma : S^n \to T$, où T est isomorphe à S pour l'ordre, et $\eta : S \to T$ est la fonction qui préserve les indices (resp. renverse les indices).

Proposition 5.3. *Une fonction signifiante en comparaison continue* $M : E^n \to \mathbb{R}$ *est représentée uniquement par des fonctions d'agrégation discrètes lisses.*

En revenant à l'Exemple 4.2, nous pouvons immédiatement voir à partir de la table décrivant la fonction G que cette fonction n'est pas lisse. Ceci est en accord avec la non continuité de M.

Notons que, contrairement au cas des fonctions invariantes, la réciproque de la Proposition 5.3 est fausse. Il existe des fonctions signifiantes en comparaison qui sont non continues et qui, cependant, ont des représentant discrets lisses.

De fait, en partant d'une fonction strictement monotone (mais pas nécessairement continue) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous pouvons toujours transformer une fonction invariante continue $M : E^n \to \mathbb{R}$ en une fonction signifiante en comparaison (pas nécessairement continue) $g \circ M$, qui a un représentant lisse semblable à celui de M (cf. Proposition 4.4). Plus précisément, pour toute fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante, constante) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le représentant unique dans $(S, \preccurlyeq_S)$ de $M = g \circ L_\gamma$ est la fonction lisse $G = \eta \circ L_\gamma$, où $\eta : S \to T = \mathrm{ran}(G)$ préserve les indices (resp. renverse les indices, est constant) et $|T| = |S|$ (resp. $|T| = |S|$, $|T| = 1$).

Le problème suivant émerge naturellement de cette analyse :

Problème ouvert 2. Décrire (ou caractériser) toutes les fonctions signifiantes en comparaison qui sont représentées uniquement par des fonctions d'agrégation discrètes lisses.

6 Conclusion

Nous avons mis en lumière la signification des fonctions invariantes en les interprétant comme des FIE, i.e., des fonctions qui ont des représentants discrets sur n'importe quelle échelle ordinale finie.

En particulier, cette interprétation montre que considérer une fonction discrète $G : S^n \to S$, où $(S, \preccurlyeq)$ est une échelle ordinale donnée, ne revient pas à considérer une fonction invariante $M : E^n \to E$. En effet, cette dernière forme est beaucoup plus restrictive puisque M est indépendant de toute échelle. Par exemple, si $n = 2$ et E est ouvert, nous voyons par le Théorème 4.1 qu'il n'y a que quatre fonctions invariantes (puisque E^2 n'a que trois SEIM et qu'il n'y a qu'une possibilité sur la diagonale) alors que le nombre de fonctions discrètes $G : S^2 \to S$ est évidemment $|S|^{|S|^2}$.

Nous avons aussi interprété les fonctions signifiantes en comparaison d'une manière semblable. Pour ces fonctions, la description des FOI conduisant au même représentant discret reste un problème ouvert intéressant.

Finalement, nous avons observé que ces interprétations font de la continuité une propriété pertinente pour les fonctions invariantes et, cependant, assez restrictives pour les fonctions signifiantes en comparaison.

Références

[1] L. Bartlomiejczyk and J. Drewniak, A characterization of sets and operations invariant under bijections, *Aequationes Mathematicae*, submitted.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, (Third Edition, AMS, Providence, 1967).

[3] J. Fodor, Smooth associative operations on finite ordinal scales, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **8** (6) (2000) 791–795.

[4] L. Godó and C. Sierra, A new approach to connective generation in the framework of expert systems using fuzzy logic, *Proc. 18th IEEE Int. Symposium on Multiple-Valued Logic*, Palma de Mallorca, Spain, 1988, pp. 157–162.

[5] M. Grabisch, On preference representation on an ordinal scale, in : S. Benferhat, P. Besnard (eds.), *Proc. 6th Eur. Conf. on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2001)*, Toulouse, France, September 19–21, 2001, pp. 18–28.

[6] M. Grabisch and T. Roblin, Aggregation of ordinal information, *Proc. of EUROFUSE-SIC'99 Joint Conference*, Budapest, Hungary, May 25–28, 1999, pp. 496–501.

[7] D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes, and A. Tversky, *Foundations of measurement*, volume I : *Additive and polynomial representations* (Academic Press, San Diego, 1971).

[8] J.-L. Marichal, On order invariant synthesizing functions, *Journal of Mathematical Psychology* **46** (6) (2002) 661–676.

[9] J.-L. Marichal and R. Mesiar, Aggregation on finite ordinal scales by scale independent functions, under review.

[10] J.-L. Marichal, R. Mesiar, and T. Rückschlossová, A complete description of comparison meaningful functions, to appear.

[11] J.-L. Marichal and M. Roubens, Characterization of some stable aggregation functions, *Proc. 1st Int. Conf. on Industrial Engineering and Production Management (IEPM'93)*, Mons, Belgium, June 2-4, 1993, 187–196.

[12] R. Mesiar and T. Rückschlossová, Characterization of invariant aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems* **142** (1) (2004) 63–73.

[13] A. Orlov, The connection between mean quantities and admissible transformations, *Mathematical Notes* **30** (1981) 774–778.

[14] S. Ovchinnikov, Means on ordered sets, *Mathematical Social Sciences* **32** (1996) 39–56.

[15] S. Ovchinnikov, Invariant functions on simple orders, *ORDER* **14** (1998) 365–371.

[16] F.S. Roberts, *Measurement theory with applications to decision-making, utility and the social sciences* (Addison-Wesley Pub., Reading, MA, 1979).

[17] E. Yanovskaya, Group choice rules in problems with interpersonal preference comparisons, *Automation and Remote Control* **50** (1989) 822–830.