Le calcul des variations stochastique

4. La formule de Clark-Ocone et ses généralisations

Définition 4.1 *Soit G un sous-ensemble Borélien de* $[0,T]$. *On note* $\mathcal{F}_G$ *la* $\sigma-$*algèbre engendrée par les variables aléatoires de la forme*

$$\int_A dW_t := \int_0^T \chi_A(t)\, dW_t, \tag{4.1}$$

où A est un sous-ensemble Borélien de G.

Pour l'ensemble $G=[0,t]$, par exemple, on obtient que $\mathcal{F}_{[0,t]} = \mathcal{F}_t$.

Lemme 4.2 *Soit une fonction déterministe* $g \in L^2([0,T])$. *Alors,*

$$E[\int_0^T g(t)\, dW_t \mid \mathcal{F}_G] = \int_0^T \chi_G(t)\, g(t)\, dW_t.$$

Preuve : Par définition de l'espérance conditionnelle, il suffit de vérifier que

$$\int_0^T \chi_G(t)\, g(t)\, dW_t \text{ est } \mathcal{F}_G-\text{mesurable} \tag{4.2}$$

et que

$$E[F(\omega)\int_0^T g(t)\, dW_t] = E[F(\omega)\int_0^T \chi_G(t)\, g(t)\, dW_t] \tag{4.3}$$

pour toute variable aléatoire F $\mathcal{F}_G$-mesurable.

Pour montrer (4.2), on peut supposer que g est une fonction continue , puisque les fonctions continues sont denses dans $L^2([0,T])$. Si g est continue, alors

$$\int_0^T \chi_G(t)\, g(t)\, dW_t = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i g(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \chi_G(t)\, dW_t \in L^2(\Omega).$$

La limite est alors $\mathcal{F}_G$-mesurable, comme chacun des termes de la somme l'est.

Pour montrer (4.3), on peut supposer que

$$F(\omega) = \int_0^T \chi_A(t)\, dW_t \quad \text{pour quelque } A \subset G.$$

En appliquant l'isométrie d'Itô, cela implique que le membre gauche de (4.3) devient

$$E[\int_0^T \chi_A(t)\,dW_t \cdot \int_0^T g(t)\,dW_t] = E[\int_0^T \chi_A(t)\,g(t)\,dt],$$

De même, le membre droit de (4.3) est égal à

$$\begin{aligned} E[\int_0^T \chi_A(t)\,dW_t \cdot \int_0^T \chi_G(t)\,g(t)\,dW_t] &= E[\int_0^T \chi_A(t)\,\chi_G(t)\,g(t)\,dt] \\ &= E[\int_0^T \chi_A(t)\,g(t)\,dt] \ \text{ comme } A \subset G. \end{aligned}$$

□

Lemme 4.3 Soit $v(t,\omega) \in R$ un processus stochastique vérifiant

(i) $v(t,\cdot)$ *est* $\mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_G -$ *mesurable pour tout* t

(ii) $E[\int_0^T v^2(t,\omega)\,dt] < +\infty.$

Alors,

$$\int_G v(t,\omega)\,dW_t \text{ est } \mathcal{F}_G - \text{mesurable.}$$

Preuve : On peut supposer que $v(t,\omega)$ est un processus élémentaire de la forme

$$v(t,\omega) = \sum_i v_i(\omega)\,\chi_{[t_i,t_{i+1}[}(t),$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ et où $v_i(\cdot)$ est $\mathcal{F}_{t_i} \cap \mathcal{F}_G -$ mesurable. Alors,

$$\int_G v(t,\omega)\,dW_t = \sum_i v_i(\omega) \int_{G \cap [t_i,t_{i+1}[} dW_t,$$

qui est une somme de produits de fonctions $\mathcal{F}_G -$ mesurables et est donc également $\mathcal{F}_G -$ mesurable.

□

Lemme 4.4 *Soit* $u(t,\omega)$ *un processus* $\mathcal{F}_t -$ *adapté tel que*

$$E[\int_0^T u^2(t,\omega)\,dt] < +\infty.$$

Alors,

$$E[\int_0^T u(t,\omega)\,dW_t \mid \mathcal{F}_G] = \int_G E[u(t,\omega) \mid \mathcal{F}_G]\,dW_t.$$

Preuve : Le lemme 4.3 implique qu'il suffit de vérifier que

$$E[f(\omega)\int_0^T u(t,\omega)\,dW_t] = E\left[f(\omega)\int_0^T E[u(t,\omega)\,|\,\mathcal{F}_G]\,dW_t\right] \tag{4.4}$$

pour tous $f(\omega)$ de la forme

$$f(\omega) = \int_A dW_t;\ \ A \subset G.$$

Pour de tels f, l'isométrie d'Itô implique que le membre droit de (4.4)) est égal à

$$E[\int_0^T \chi_A(t)\,u(t,\omega)\,dt] = \int_A E[u(t,\omega)]\,dt$$

tandis que le membre droit est égal à

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T \chi_A(t)\,\chi_G(t)\,E[u(t,\omega)\,|\,\mathcal{F}_G]\,dt\right] &= \int_0^T \chi_A(t)\,E\left[E[u(t,\omega)\,|\,\mathcal{F}_G]\right]dt \\ &= \int_A E[u(t,\omega)]\,dt. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.5 *Soit* $f_n \in \hat{L}^2([0,T]^n)$. *Alors,*

$$E[I_n(f_n)\,|\,\mathcal{F}_G] = I_n[f_n\,\chi_G^{\otimes n}], \tag{4.5}$$

où

$$(f_n\,\chi_G^{\otimes n})(t_1,\dots,t_n) = f_n(t_1,\dots,t_n)\,\chi_G(t_1)\cdots\chi_G(t_n).$$

Preuve : On procède par récurrence sur *n*. Pour $n=1$, le lemme 4.4 implique que

$$E[I_1(f_1)\,|\,\mathcal{F}_G] = E[\int_0^T f_1(t_1)\,dW_{t_1}\,|\,\mathcal{F}_G] = \int_0^T f_1(t_1)\,\chi_G(t_1)\,dW_t.$$

Supposons que (4.5) soit vérifié pour $n=k$. Alors, le lemme 4.4 implique que

$$\begin{aligned} E[I_{k+1}(f_{k+1})\,|\,\mathcal{F}_G] &= (k+1)!\,E[\int_0^T\{\int_0^{t_k}\cdots\int_0^{t_2} f_{k+1}(t_1,\dots,t_{k+1})\,dW_{t_1}\cdots dW_{t_k}\}\,dW_{t_{k+1}}\,|\,\mathcal{F}_G] \\ &= (k+1)!\int_0^T E[\int_0^{t_k}\cdots\int_0^{t_2} f_{k+1}(t_1,\dots,t_{k+1})\,dW_{t_1}\cdots dW_{t_k}\,|\,\mathcal{F}_G]\cdot\chi_G(t_{k+1})\,dW_{t_{k+1}} \\ &= (k+1)!\int_0^T\int_0^{t_k}\cdots\int_0^{t_2} f_{k+1}(t_1,\dots,t_{k+1})\,\chi_G(t_1)\cdots\chi_G(t_{k+1})\,dW_{t_1}\cdots dW_{t_{k+1}} \\ &= I_{k+1}[f_{k+1}\,\chi_G^{\otimes(k+1)}], \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve.

□

Proposition 4.6 *Si* $F \in \mathbb{D}_{1,2}$, *alors* $E[F\,|\,\mathcal{F}_G] \in \mathbb{D}_{1,2}$ *et*

$$D_t(E[F\,|\,\mathcal{F}_G]) = E[D_tF\,|\,\mathcal{F}_G]\cdot\chi_G(t).$$

Preuve : Supposons d'abord que $F = I_n(f_n)$ pour quelque fonction $f_n \in \hat{L}^2([0,T]^n)$. Alors, la proposition 4.5 implique que

$$\begin{aligned} D_t(E[F \mid \mathcal{F}_G]) &= D_t(E[I_n(f_n) \mid \mathcal{F}_G]) \\ &= D_t[I_n(f_n \cdot \chi_G^{\otimes n})] \\ &= n\, I_{n-1}[f_n(\cdot,t)\chi_G^{\otimes(n-1)}(\cdot)\chi_G(t)] \\ &= n\, I_{n-1}[f_n(\cdot,t)\chi_G^{\otimes(n-1)}(\cdot)]\cdot \chi_G(t) \\ &= E[D_t F \mid \mathcal{F}_G]\cdot \chi_G(t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Considérons maintenant une fonction $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ arbitraire. On peut alors trouver des fonctions $F_k \in \mathcal{P}$ telles que

$$F_k \to F \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et } \mathrm{D}_t F_k \to D_t F \text{ dans } L^2(\Omega\times[0,T])$$

et des fonctions $f_j^{(k)} \in \hat{L}^2([0,T]^j)$ telles que pour tout *k*,

$$F_k = \sum_{j=0}^{+\infty} I_j(f_j^{(k)}).$$

De plus, la proposition 5.6 implique que pour tout *k*,

$$D_t(E[F_k \mid \mathcal{F}_G]) = E[D_t F_k \mid \mathcal{F}_G]\cdot \chi_G(t).$$

et le résultat suit en passant à la limite sur k .

□

Corollaire 4.7 *Soit* $u(s,\omega)$ *un processus stochastique* $\mathcal{F}-$*adapté tel que* $u(s,\cdot) \in \mathbb{D}_{1,2}$, *pour tout s. Alors,*

(i) $D_t u(s,\omega)$ *est* $\mathcal{F}_s -$*adapté, pour tout* t

(ii) $D_t u(s,\omega) = 0$ *pour* t>s.

Preuve : La proposition 4.6 implique que

$$D_t u(s,\omega) = D_t(E[u(s,\omega) \mid \mathcal{F}_s) = E[D_t u(s,\omega) \mid \mathcal{F}_s]\cdot \chi_{[0,s]}(t),$$

d'où résulte immédiatement le résultat .

□

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients pour le premier résultat important de ce paragraphe.

Théorème 4.8 (Formule de Clark-Ocone) *Soit F une variable aléatoire $\mathcal{F}_T -$mesurable, appartenant à l'espace $\mathbb{D}_{1,2}$. Alors,*

$$F(\omega) = E[F] + \int_0^T E[D_t F \mid \mathcal{F}_t](\omega)\, dW_t. \tag{4.7}$$

Preuve : On sait que F admet une décomposition en chaos de Wiener de la forme $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n)$ avec $f_n \in \hat{L}^2([0,T]^n)$. Le théorème 3.15 et la proposition 4.5 impliquent alors que

$$\begin{aligned}
\int_0^T E[D_t F \mid \mathcal{F}_t]\, dW_t &= \int_0^T E\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n\, I_{n-1}\big(f_n(\cdot,t)\big) \mid \mathcal{F}_t\right] dW_t \\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{+\infty} n\, E[I_{n-1}\big(f_n(\cdot,t)\big) \mid \mathcal{F}_t]\, dW_t \\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{+\infty} n\, I_{n-1}[f_n(\cdot,t)\cdot \chi_{[0,t]}^{\otimes(n-1)}(\cdot)]\, dW_t \\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(n-1)!\, J_{n-1}[f_n(\cdot,t)\cdot \chi_{[0,t]}^{\otimes(n-1)}(\cdot)]\, dW_t \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n!\, J_n[f_n(\cdot)] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(f_n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) - I_0(f_0) \\
&= F - E[F].
\end{aligned}$$

□

On peut généraliser ce résultat et exprimer une variable aléatoire $\mathcal{F}_T -$mesurable $F(\omega)$ comme intégrale stochastique par rapport à un processus de la forme

$$\tilde{W}(t,\omega) = \int_0^t \theta(s,\omega)ds + W(t,\omega); \quad 0 \le t \le T, \tag{4.8}$$

où $\theta(t,\omega)$ est un processus $\mathcal{F}_s -$adapté vérifiant quelques hypothèses supplémentaires. D'après le théorème de Girsanov, le processus stochastique $\tilde{W}_t$ est alors un processus de Wiener sous la mesure de probabilité Q définie sur $\mathcal{F}_T$ par la dérivée de Radon-Nikodym

$$dQ(\omega) = Z(T,\omega)\, dP(\omega), \tag{4.9}$$

où

$$Z_t = Z(t,\omega) = \exp\left\{-\int_0^t \theta(s,\omega)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)\, ds\right\};\ 0 \le t \le T. \qquad (4.10)$$

Dans la suite, on note E_Q l'espérance par rapport à Q et $E_P = E$ l'espérance par rapport à P.

Théorème 4.9 (La formule de Clark-Ocone généralisé) *Soit F une variable aléatoire $\mathcal{F}_T -$mesurable, appartenant à l'espace $\mathbb{D}_{1,2}$. Supposons de plus que*

$$E_Q[|F|] < +\infty. \qquad (4.11)$$

$$E_Q[\int_0^T |D_t F|^2\, dt] < +\infty. \qquad (4.12)$$

$$E_Q\left[|F| \cdot \int_0^T \left(\int_0^T D_t\theta(s,\omega)\, dW_s + \int_0^T D_t\theta(s,\omega)\,\theta(s,\omega) ds\right)^2 dt\right] < +\infty. \qquad (4.13)$$

Alors,

$$F(\omega) = E_Q[F] + \int_0^T E_Q\left[\left(D_t F - F\int_t^T D_t\theta(s,\omega)\, d\tilde{W}_s\right) | \mathcal{F}_t\right] d\tilde{W}_t. \qquad (4.14)$$

Remarque 4.10 : Remarquons qu'on ne peut pas obtenir une représentation de F comme intégrale par rapport au processus $\tilde{W}_t$ en appliquant simplement la formule de Clark-Ocone au processus de Wiener $(\tilde{W}_t, Q)$, parce que F est seulement supposé être $\mathcal{F}_T -$mesurable et non $\tilde{\mathcal{F}}_T -$mesurable (En général, on a $\tilde{\mathcal{F}}_T \subset \mathcal{F}_T$, sans avoir égalité des deux filtrations) . L'intégrale d'Itô en (4.14) est quand même bien définie, comme $\tilde{W}_t$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale par rapport à la mesure de probabilité Q.

On peut scinder la preuve du théorème 4.10 en plusieurs résultats utiles. Rappelons d'abord la formule de Bayes.

Lemme 4.11 *Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{G})$ tel que $d\nu(\omega) = f(\omega)\, d\mu(\omega)$ pour un certaine fonction $f \in L^1(\mu)$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{G})$ appartenant à $L^1(\nu)$. Soit une $\sigma -$algèbre $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Alors,*

$$E_\nu[X | \mathcal{H}] \cdot E_\mu[f | \mathcal{H}] = E_\mu[f\, X | \mathcal{H}]. \qquad (4.15)$$

Corollaire 4.12 *Supposons que* $G \in L^1(Q)$. *Alors,*

$$E_Q[G \mid \mathsf{F}_t] = \frac{E[Z_T G \mid \mathsf{F}_t]}{Z_t}. \tag{4.16}$$

Le résultat suivant donne une relation utile entre la dérivée de Malliavin et l'intégrale de Skohorod.

Théorème 4.13 *Soit* $u(s,\omega)$ *un processus stochastique tel que*

$$E[\int_0^T u^2(s,\omega)\,ds] < +\infty. \tag{4.17}$$

Supposons de plus, que $u_s \in \mathbb{D}_{1,2}$ *pour tout* $s \in [0,T]$, *que* $D_t u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et que*

$$E[\int_0^T \left(\delta(D_t u)\right)^2 dt] < +\infty. \tag{4.18}$$

Alors, $\int_0^T u(s,\omega)\,\delta W_s \in \mathbb{D}_{1,2}$ *et*

$$D_t\left(\int_0^T u(s,\omega)\,\delta W_s\right) = \int_0^T D_t u(s,\omega)\,\delta W_s + u(t,\omega). \tag{4.19}$$

Preuve : Supposons d'abord que *u* est de la forme

$$u(s,\omega) = I_n\left(f_n(\cdot,s)\right),$$

où $f_n(t_1,\ldots,t_n,s)$ est symétrique par rapport aux variables $t_1,\ldots,t_n$. Alors,

$$\int_0^T u(s,\omega)\,\delta W_s = I_{n+1}[\tilde{f}_n],$$

où

$$\tilde{f}_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \frac{1}{n+1}[f_n(\cdot,x_1) + \cdots + f_n(\cdot,x_{n+1})]$$

désigne la symétrisation de f_n comme fonction à $n+1$ variables. Par conséquent,

$$D_t\left(\int_0^T u(s,\omega)\,\delta W_s\right) = (n+1)\,I_n[\tilde{f}_n(\cdot,t)], \tag{4.20}$$

où

$$\tilde{f}_n(\cdot,t) = \frac{1}{n+1}[f_n(t,\cdot,x_1) + \cdots + f_n(t,\cdot,x_n) + f_n(\cdot,t)]. \tag{4.21}$$

En effet, comme f_n est symétrique par rapport à ses n premières variables, on peut choisir t comme étant la première dans les n premiers termes du membre droit. En combinant (4.20) avec (4.21), on obtient alors que

$$D_t\left(\int_0^T u(s,\omega)\,\delta W_s\right) = I_n[\,f_n(t,\cdot,x_1)+\cdots+f_n(t,\cdot,x_n)+f_n(\cdot,t)]. \qquad (4.22)$$

D'autre part,

$$\delta(D_t u) = \int_0^T D_t u(s,\omega)\,\delta W_s = \int_0^T n\,I_{n-1}[\,f_n(\cdot,t,s)]\,\delta W_s = n\,I_n[\,\hat{f}_n(\cdot,t,\cdot)], \qquad (4.23)$$

où

$$\hat{f}_n(x_1,\ldots,x_{n-1},t,x_n) = \frac{1}{n}[\,f_n(t,\cdot,x_1)+\cdots+f_n(t,\cdot,x_n)] \qquad (4.24)$$

est la symétrisation de $f_n(x_1,\ldots,x_{n-1},t,x_n)$ par rapport aux variables $x_1,\ldots,x_n$. Les relations (4.23) et (4.24) impliquent alors que

$$\int_0^T D_t u(s,\omega)\,\delta W_s = I_n[\,f_n(t,\cdot,x_1)+\cdots+f_n(t,\cdot,x_n)]. \qquad (4.25)$$

On obtient (4.19) en comparant (4.25) et (4.22).

Dans le cas général, i.e. quand

$$u(s,\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n[\,f_n(\cdot,s)],$$

définissons pour $m \geq 1$,

$$u_m(s,\omega) = \sum_{n=0}^{m} I_n[\,f_n(\cdot,s)]. \qquad (4.26)$$

Alors, ce qui précède implique que pour tout m, on a

$$D_t\left(\delta(u_m)\right) = \delta(D_t u_m) + u_m(t). \qquad (4.27)$$

La relation (4.23) montre que la relation (4.18) est équivalent à dire que

$$\begin{aligned} E[\int_0^T \left(\delta(D_t u)\right)^2 dt] &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, n!\int_0^T \left\|\hat{f}_n(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L^2([0,T]^n)} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, n!\left\|\hat{f}_n\right\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} < +\infty, \end{aligned} \qquad (4.28)$$

comme $D_t u \in \mathrm{Dom}(\delta)$. Donc,

$$\left\|\delta(D_t u_m) - \delta(D_t u)\right\|^2_{L^2([0,T]\times\Omega)} = \sum_{n=m+1}^{+\infty} n^2\, n!\left\|\hat{f}_n\right\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} \to 0 \text{ quand } m \to +\infty. \quad (4.29)$$

Par conséquent, la relation (4.27) implique que

$$D_t\left(\delta(u_m)\right) \to \delta(u_m) + u(t) \;\text{ dans } L^2([0,T]\times\Omega) \text{ quand } m \to +\infty. \qquad (4.30)$$

Or, d'après (4.21) et (4.24), on a

$$(n+1)\,\tilde{f}_n(\cdot,t) = n\,\hat{f}_n(\cdot,t,\cdot) + f_n(\cdot,t)$$

et ainsi

$$(n+1)!\left\|\tilde{f}_n\right\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} \le \frac{2n^2 n!}{n+1}\left\|\hat{f}_n\right\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} + \frac{2n!}{n+1}\left\|f_n\right\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})}.$$

Donc,

$$E[\left(\delta(u_m)-\delta(u)\right)^2] = \sum_{n=m+1}^{+\infty}(n+1)!\left\|\tilde{f}_n\right\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} \to 0 \text{ quand } m \to +\infty. \qquad (4.31)$$

Les relations (4.30) et (4.31) impliquent que $\delta(u) \in \mathbb{D}_{1,2}$ et que

$$D_t\left(\delta(u)\right) = \delta(D_t u) + u(t).$$

□

Corollaire 4.14 *Soit $u(s,\omega)$ comme dans le théorème 4.13. Si de plus, u est $\mathcal{F}$ – adapté, alors*

$$D_t\left(\int_0^T u(s,\omega)\,dW_s\right) = \int_t^T D_t u(s,\omega)\,dW_s + u(t,\omega). \qquad (4.32)$$

Lemme 4.15 *Soient F et θ comme dans le théorème 4.9 et soient Q et Z_t comme dans (4.9) et (4.10). Alors,*

$$D_t(Z_T F) = Z_T\left[D_t F - F\left\{\theta(t,\omega) + \int_t^T D_t\theta(s,\omega)\,d\tilde{W}_s\right\}\right]. \qquad (4.33)$$

Preuve : D'après la formule de dérivation des fonctions composés, on a, en utilisant le corollaire 4.14

$$\begin{aligned} D_t(Z_T) &= Z_T\left\{-D_t\left(\int_0^T \theta(s,\omega)\,dW_s\right) - \frac{1}{2}D_t\left(\int_0^T \theta^2(s,\omega)\,ds\right)\right\} \\ &= Z_T\left\{-\int_t^T D_t\theta(s,\omega)\,dW_s - \theta(t,\omega) - \int_0^T \theta(s,\omega)\,D_t\theta(s,w)\,ds\right\} \\ &= Z_T\left\{-\int_t^T D_t\theta(s,\omega)\,d\tilde{W}_s - \theta(t,\omega)\right\}. \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 4.9 : Supposons les hypothèses (4.11) à (4.13) vérifiées et posons

$$Y_t = E_Q[F \mid \mathcal{F}_t] \qquad (4.34)$$

et

$$\Lambda_t = Z_t^{-1} = \exp\left\{\int_0^t \theta(s,\omega)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)ds\right\}. \tag{4.35}$$

Remarquons que

$$\Lambda_t = \exp\left\{\int_0^t \theta(s,\omega)\,d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)ds\right\}. \tag{4.36}$$

Le corollaire 4.12, le théorème 4.8 et le corollaire 4.7 impliquent que

$$\begin{aligned} Y_t &= \Lambda_t E[Z_T F \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \Lambda_t \left\{ E\left[E[Z_T F \mid \mathcal{F}_t]\right] + \int_0^T E\left[D_s E[Z_T F \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s\right] dW_s \right\} \\ &= \Lambda_t \left\{ E[Z_T F] + \int_0^t E[D_s(Z_T F) \mid \mathcal{F}_s] dW_s \right\} \\ &=: \Lambda_t U_t. \end{aligned} \tag{4.37}$$

La relation (4.36) et la formule d'Itô impliquent alors que

$$d\Lambda_t = \Lambda_t \theta_t d\tilde{W}_t. \tag{4.38}$$

En combinant les relations (4.37), (4.38) et (4.33) on obtient

$$\begin{aligned} dY_t &= \Lambda_t \cdot E[D_t(Z_T F) \mid \mathcal{F}_t] dW_t + \Lambda_t \theta_t U_t\, d\tilde{W}_t + \Lambda_t \theta_t E[D_t(Z_T F) \mid \mathcal{F}_t] dW_t d\tilde{W}_t \\ &= \Lambda_t E[D_t(Z_T F) \mid \mathcal{F}_t] d\tilde{W}_t + \theta_t Y_t d\tilde{W}_t \\ &= \Lambda_t \left\{ E[Z_T D_t F) \mid \mathcal{F}_t] - E[Z_T F \theta_t \mid \mathcal{F}_t] - E[Z_T F \int_t^T D_t \theta_s d\tilde{W}_s \mid \mathcal{F}_s] \right\} d\tilde{W}_s + \theta_t Y_t d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} dY_t &= \left\{ E_Q[D_t F \mid \mathcal{F}_t] - E_Q[F\theta_t \mid \mathcal{F}_t] - E_Q[F \int_t^T D_t \theta_s d\tilde{W}_s \mid \mathcal{F}_t] \right\} d\tilde{W}_t + \theta_t E_Q[F \mid \mathcal{F}_t] d\tilde{W}_t \\ &= E_Q\left[\left(D_t F - F \int_t^T D_t \theta_s d\tilde{W}_s \right) \mid \mathcal{F}_t \right] d\tilde{W}_t. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Comme

$$Y_T = E_Q[F \mid \mathcal{F}_T] = F$$

et

$$Y_0 = E_Q[F \mid \mathcal{F}_0] = E_Q[F]$$

le théorème 4.9 suit de la relation (4.39). Les conditions (4.11) à (4.13) sont nécessaires pour donner un sens aux calculs ci-dessus.

□

5. Application aux mathématiques financières

Dans ce parageraphe, on montre comment la formule de Clark-Ocone généralisée peut être utilisée dans l'analyse de portefeuilles.
Commençons par rappeler quelques concepts fondamentaux.

Définition 5.1 a) *Un marché est un processus stochastique* $(n+1)-$*dimensionnel* $\mathcal{F}-$*adapté* $X_t = \left(X_0(t), X_1(t), \dots, X_n(t)\right); t \in [0,T]$ *déterminé par les équations différentielles stochastiques*

$$dX_0(t) = \rho_t X_0(t)dt;\ X_0(0) = 1 \tag{5.1}$$

et

$$dX_i(t) = \mu_i(t,\omega)dt + \sigma_i(t,\omega)dW_t;\ \ X_i(0) = x_i. \tag{5.2}$$

b) *Un portefeuille dans le marché* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ *est un processus stochastique* $(n+1)-$*dimensionnel* $(t,\omega)-$*mesurable et* $\mathcal{F}-$*adapté*

$$\theta(t,\omega) = \left(\theta_0(t,\omega), \theta_1(t,\omega), \dots, \theta_n(t,\omega)\right);\ \ t \in [0,T]. \tag{5.3}$$

c) *La valeur au temps t du portefeuille* $\theta(t)$ *est définie par*

$$V(t,\omega) = V^{\theta}(t,\omega) = \theta(t) \cdot X(t) = \sum_{i=0}^{n} \theta_i(t) X_i(t), \tag{5.4}$$

où on a noté $\cdot$ *le produit intérieur dans* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Supposons qu'on a le choix entre deux investissements :

a) Un investissement sûr (par exemple, un bon), dont le prix suit l'équation différentielle

$$dA_t = \rho_t A_t dt. \tag{5.5}$$

b) Un investissement risqué (par exemple, un titre), dont le prix suit l'équation différentielle

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t. \tag{5.6}$$

Ici $\rho_t = \rho(t,\omega), \mu_t = \mu(t,\omega)$ et $\sigma_t = \sigma(t,\omega)$ sont des processus $\mathcal{F}-$adaptés. Dans la suite nous n'allons pas préciser les hypothèses de travail, mais simplement admettre que tous les processus sont suffisamment réguliers pour que tout soit bien défini.

Définition 5.2 *Notons* $\xi_t = \xi(t,\omega)$ *et* $\eta_t = \eta(t,\omega)$ *le nombre d'unités investies dans l'investissement sûr respectivement risqué. Alors, la valeur* $V_t = V(t,\omega)$ *du portefeuille* (ξ_t,η_t) *est la variable aléatoire définie par*

$$V_t = \xi_t A_t + \eta_t S_t. \tag{5.7}$$

On dit que le portefeuille (ξ_t,η_t) *est auto-finançant si*

$$dV_t = \xi_t dA_t + \eta_t dS_t. \tag{5.8}$$

Nous supposons à partir de maintenant que (ξ_t,η_t) est auto-finançant. Alors,

$$\xi_t = \frac{V_t - \eta_t S_t}{A_t} \tag{5.9}$$

et

$$dV_t = \rho_t\left(V_t - \eta_t S_t\right)dt + \eta_t dS_t. \tag{5.10}$$

Alors, d'après (5.6) cela peut s'écrire

$$dV_t = \left[\rho_t V_t + (\mu_t - \rho_t)\eta_t S_t\right]dt + \sigma_t \eta_t S_t dW_t. \tag{5.11}$$

Supposons qu'on veut trouver un portefeuille (ξ_t,η_t) qui admet une valeur donnée

$$V(T,\omega) = F(\omega) \quad p.s. \tag{5.12}$$

à un instant futur donné (déterministe) *T*, où la valeur donnée $F(\omega)$ est $\mathcal{F}_T$ − mesurable. On se pose alors les questions suivantes :

Quelle fortune initiale V_0 et quel portefeuille (ξ_t,η_t) faut-il utiliser ? Est-ce que V_0 et (ξ_t,η_t) sont uniques ?

Ce type de question joue un rôle dans la détermination du prix des options. Par exemple, dans le modèle classique de Black-Scholes, on a

$$F(\omega) = \left(S(t,\omega) - K\right)^+, \tag{5.13}$$

où *K* désigne le prix à terme. V_0 est alors le prix de l'option.

La relation (5.9) indique qu'on peut aussi bien prendre (V_t,η_t) comme processus $\mathcal{F}_t$ − adapté inconnu. Si l'on adopte ce point de vue, alors les relations (5.11) et (5.12) constituent une équation différentielle stochastique rétrograde : La valeur finale $V(T,\omega)$ est donnée et on cherche la valeur de (V_t,η_t) pour $0 \le t \le T$. Comme le processus V_t est $\mathcal{F}_t$ – adapté, V_0 est $\mathcal{F}_0$ – mesurable, donc une constante. La théorie générale des équations différentielles stochastiques rétrogrades implique que l'équation (5.11), (5.12) admet une solution unique sous des conditions appropriées sur F, ρ, μ et σ. Elle ne donne par contre aucun renseignement comment trouver cette solution explicitement. Cela peut se faire en utilisant la formule de Clark-Ocone généralisée. En effet, soit le processus stochastique

$$\theta_t = \theta(t,\omega) = \frac{\mu_t - \rho_t}{\sigma_t}. \tag{5.14}$$

Si l'on pose

$$\tilde{W}_t = \int_0^t \theta_s \, ds + W_t, \tag{5.15}$$

alors $\tilde{W}_t$ est un processus de Wiener par rapport à la probabilité Q définie en (4.9). (5.11) devient alors

$$dV_t = [\rho_t V_t + (\mu_t - \rho_t)\eta_t S_t]dt + \sigma_t \eta_t S_t d\tilde{W}_t - \sigma_t \eta_t S_t \sigma_t^{-1}(\mu_t - \rho_t)dt$$

i.e.

$$dV_t = \rho_t V_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\tilde{W}_t. \tag{5.16}$$

Soit le processus

$$U_t = e^{-\int_0^t \rho(t,\omega)ds} V_t. \tag{5.17}$$

Alors,

$$dU_t = e^{-\int_0^t \rho_s ds} \sigma_t \eta_t S_t d\tilde{W}_t. \tag{5.18}$$

Par conséquent ,

$$e^{-\int_0^T \rho_s ds} V_T = V_0 + \int_0^T e^{-\int_0^t \rho_s ds} \sigma_t \eta_t S_t d\tilde{W}_t. \tag{5.19}$$

En appliquant la formule de Clark-Ocone généralisée à la variable aléatoire

$$G(\omega) = e^{-\int_0^T \rho(s,\omega)ds} F(\omega), \tag{5.20}$$

on obtient

$$G(\omega) = E_Q[G] + \int_0^T E_Q[\left(D_t G - G\int_t^T D_t \theta(s,\omega) d\tilde{W}_s\right) | \mathcal{F}_t] d\tilde{W}_t. \tag{5.21}$$

Par unicité, les relations (5.19) et (5.21) impliquent que

$$V_0 = E_Q[G] \tag{5.22}$$

et que l'investissement risqué au temps t requis est

$$\eta_t = e^{\int_0^t \rho_s ds} \sigma_t^{-1} S_t^{-1} E_Q[\left(D_t G - G \int_t^T D_t \theta_s \, d\tilde{W}_s \right) | \mathcal{F}_t]. \tag{5.23}$$

Exemple 5.3 : Supposons que $\rho(t,\omega) = \rho$, $\mu(t,\omega) = \mu$ et $\sigma(t,\omega) = \sigma \neq 0$ sont des constantes. Alors,

$$\theta(t,\omega) = \theta = \frac{\mu - \rho}{\sigma}$$

est également constante, donc $D_t \theta = 0$. Ainsi, d'après (5.23),

$$\eta_t = e^{\rho(t-T)} \sigma^{-1} S_t^{-1} E_Q[D_t F \mid \mathcal{F}_t].$$

Si, par exemple $F(\omega) = \exp(\alpha W_T)$, alors la formule de dérivation des fonctions composées implique que

$$\begin{aligned} \eta_t &= e^{\rho(t-T)} \sigma^{-1} S_t^{-1} E_Q[\alpha \exp(\alpha W_T) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{\rho(t-T)} \alpha \, \sigma^{-1} S_t^{-1} Z_t^{-1} E[Z_T \exp(\alpha W_T) \mid \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Remarquons que

$$Z_T \exp(\alpha W_T) = M_T \exp\left(\frac{1}{2} (\alpha - \theta)^2 T \right),$$

où $M_t = \exp\{(\alpha - \theta) W_t - \frac{1}{2} (\alpha - \theta)^2 t\}$ est une martingale. Avec ces notations

$$\begin{aligned} \eta_t &= e^{\rho(t-T)} \alpha \, \sigma^{-1} S_t^{-1} Z_t^{-1} M_t \exp\left(\frac{1}{2} (\alpha - \theta)^2 T \right) \\ &= e^{\rho(t-T)} \alpha \, \sigma^{-1} \exp\{(\alpha - \sigma) W_t + (\frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{2} \theta^2 - \mu) t + \frac{1}{2} (\alpha - \theta)^2 (T - t). \end{aligned}$$

Exemple 5.4 (La formule de Black et Scholes) : Reprenons l'exemple ci-dessus, c'est-à-dire, soit

$$\theta(t,\omega) = \theta = \frac{\mu - \rho}{\sigma}$$

constant et par conséquent

$$\eta_t = e^{\rho(t-T)} \sigma^{-1} S_t^{-1} E_Q[D_t F \mid \mathcal{F}_t]. \tag{5.25}$$

Cette fois-ci, on veut utiliser cette formule pour déterminer la valeur d'une option européenne, qui donne le droit (mais pas l'obligation), d'acheter le titre de valeur $S(T,\omega)$ à un prix K fixé en avance. Par conséquent, si $S(T,\omega) > K$ le possesseur de l'option fait un gain de $S(t,\omega) - K$ et si $S(T,\omega) \leq K$, le possesseur de l'option ne va pas acheter le titre, donc son gain est 0. La valeur de l'option est donc

$$F(\omega) = \left(S(T,\omega) - K\right)^{+}. \tag{5.26}$$

On peut donc écrire

$$F(\omega) = f\left(S(t,\omega)\right), \tag{5.27}$$

avec

$$f(x) = (x-K)^{+}. \tag{5.28}$$

La fonction *f* n'est pas différentiable en $x = K$, ainsi on ne peut pas utiliser la formule de dérivation des fonctions composées pour calculer $D_t G$. On peut par contre apporcher *f* par des fonctions f_n de classe C^1 ayant la propriété

$$f_n(x) = f(x) \quad \text{pour } |x-K| \geq \frac{1}{n} \tag{5.29}$$

et

$$0 \leq f_n'(x) \leq 1 \ \text{ pour tout } x. \tag{5.30}$$

Posons

$$F_n(\omega) = f_n\left(S(T,\omega)\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned} D_t F(\omega) &= \lim_{n\to+\infty} D_t F_n(\omega) = \chi_{[K,+\infty[}\left(S(T,\omega)\right) D_t S(T,\omega) \\ &= \chi_{[K,+\infty[}\left(S(T,\omega)\right)\cdot S(T,\omega)\cdot\sigma \end{aligned} \tag{5.31}$$

Par conséquent, il suit de (5.25) que

$$\eta_t = e^{\rho(t-T)} S_t^{-1} E_Q[S_T \cdot \chi_{[K,+\infty[}(S_T) \mid \mathcal{F}_t] \tag{5.32}$$

En tenant compte de la propriété de Markov du processus S_t, cela est égal à

$$\eta_t = e^{\rho(t-T)} S_t^{-1} E_Q^y[S_{t-T} \cdot \chi_{[K,+\infty[}(S_{t-T})]_{y=S_t}, \tag{5.33}$$

où E_Q^y désigne l'espérance sachant que $S_0 = y.$ Comme

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ &= (\mu - \sigma\theta) S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t \\ &= \rho S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t, \end{aligned}$$

on a

$$S_t = S_0 \exp\left((\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\tilde{W}_t\right) \tag{5.34}$$

et donc

$$\eta_t = e^{\rho(t-T)} S_t^{-1} E^y[Y_{T-t}\chi_{[K,+\infty[}(Y_{T-t})]_{y=S_t}, \tag{5.35}$$

où

$$Y_t = S_0 \exp\left((\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \right). \tag{5.36}$$

Comme la loi de probabilité de W_t est bien connue, on peut exprimer la solution de l'équation (5.35) en fonction de S_t et de la densité de la loi normale.

Dans ce modèle η_t représente le nombre d'unités qu'il faut investir dans l'investissement risqué aux temps $t \leq T$ pour être sûr de d'obtenir $F(\omega) = \left(S(T,\omega) - K\right)^+$ au temps *T*. La constante V_0 représente la fortune initiale nécessaire pour cela. Ainsi, V_0 est la fortune initiale unique qui permet de réaliser un portefeuille auto-finançant avec la même valeur au temps *T* que l'option. C'est pourquoi V_0 est appelé le bon prix pour une telle option.
D'après (5.22),

$$\begin{aligned} V_0 &= E_Q[e^{-\rho t}F(\omega)] = e^{-\rho T}E_Q[(S_T - K)^+] \\ &= e^{-T}E[(Y_T - K)^+] \end{aligned} \tag{5.37}$$

ce qu'on peut également exprimer en fonction de la densité de la loi normale.