Le calcul des variations stochastique

1. La décomposition en chaos de Wiener

Soit $W_t = W(t,\omega);\ t \geq 0, \omega \in \Omega$ un processus de Wiener standard sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pour $t \geq 0$, désignons par $\mathcal{F}_t$ la σ-algèbre engendrée par $\{W(s,\cdot); 0 \leq s \leq t\}$. Fixons $T > 0$.

Définition 1.1 *Une fonction* $g : [0,T]^n \to \mathbb{R}$ *est appelée symétrique si*

$$g(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) = g(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

pour toutes les permutations σ *de* $(1,2,\ldots,n)$. *Si de plus*

$$\|g\|^2_{L^2([0,T]^n)} := \int_{[0,T]^n} g^2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n < +\infty \tag{1.2}$$

on dit que la fonction g appartient à l'espace $\hat{L}^2([0,T]^n)$ *des fontions symétriques sur* $[0,T]^n$ *de carré intégrable.*

Soit, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,T]^n; 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq T\}. \tag{1.3}$$

Alors, l'ensemble S_n remplit un $\frac{1}{n!}$ de l'ensemble n-dimensionnel $[0,T]^n$. Par conséquent, si $g \in \hat{L}^2([0,T]^n)$, alors

$$\|g\|^2_{L^2([0,T]^n)} = n! \int_{S_n} g^2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = n! \|g\|^2_{L^2(S_n)}. \tag{1.4}$$

Définition 1.2 *Si f est une fonction réelle quelleconque, alors la symétrisation* $\tilde{f}$ *de f est la fonction définie par*

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) \tag{1.5}$$

où la somme est prise sur toutes les permutations toutes les permutations σ *de* $(1,2,\ldots,n)$.

Exemple 1.3 Soit la fonction *f* définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 \sin x_1 .$$

Alors,

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[x_1^2 + x_2^2 + x_2 \sin x_1 + x_1 \sin x_2].$$

Définition 1.4 *Si f est une fonction déterministe appartenant à* $L^2(S_n)$, *alors on appelle intégrale d'Itô multiple* $J_n(f)$ *la variable aléatoire définie par*

$$J_n(f) = \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_3} \left(\int_0^{t_2} f(t_1, ..., t_n)\, dW_{t_1} \right) dW_{t_2} \cdots dW_{t_n}. \tag{1.6}$$

Remarquons que cette définition a un sens, parce qu'à chaque intégration par rapport à dW_{t_i}, l'intégrand est $\mathcal{F}_t$-adapté et de carré intégrable par rapport à $dP \times dt_i,\ 1 \le i \le n.$

De plus, en appliquant l'isométrie d'Itô de façon répetée, on obtient pour toute fonction *h* dans $L^2(S_n)$

$$\begin{aligned} E[J_n^2(h)] &= E\left[\left\{ \int_0^T \left(\int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1, ..., t_n)\, dW_{t_1} \cdots dW_{t_{n-1}} \right) dW_{t_n} \right\}^2 \right] \\ &= \int_0^T E\left[\left(\int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1, ..., t_n)\, dW_{t_1} \cdots dW_{t_{n-1}} \right)^2 \right] dt_n \\ &= \cdots = \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} h^2(t_1, ..., t_n)\, dt_1 \cdots dt_n = \|h\|^2_{L^2(S_n)} . \end{aligned} \tag{1.7}$$

De même, si $g \in L^2(S_m)$ et $h \in L^2(S_n)$, avec $m < n$, alors

$$\begin{aligned} E[J_m(g) J_n(h)] &= E\Bigg[\left\{ \int_0^T \left(\int_0^{s_m} \cdots \int_0^{s_2} g(s_1, ..., s_m)\, dW_{s_1} \cdots dW_{s_{m-1}} \right) dW_{s_m} \right\} \\ &\qquad \left\{ \int_0^T \left(\int_0^{s_m} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1, ..., t_{n-m}, s_1, ..., s_m)\, dW_{t_1} \cdots dW_{s_{m-1}} \right) dW_{s_m} \right\} \Bigg] \\ &= \int_0^T E\Bigg[\left\{ \int_0^{s_m} \cdots \int_0^{s_2} g(s_1, ..., s_{m-1}, s_m)\, dW_{s_1} \cdots dW_{s_{m-1}} \right\} \\ &\qquad \left\{ \left(\int_0^{s_m} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1, ..., s_{m-1}, s_m)\, dW_{t_1} \cdots dW_{s_{m-1}} \right) \right\} \Bigg] ds_m \\ &= \int_0^T \int_0^{s_m} \cdots \int_0^{s_2} E\left[g(s_1, ..., s_m) \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1, ..., t_{n-m}, s_1, ..., s_m)\, dW_{t_1} \cdots dW_{t_{n-m}} \right] ds_1 \cdots ds_m \\ &= 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

comme l'espérance d'une intégrale stochastique est nulle.

En résumé, on a donc

$$E[J_m(g)J_n(h)] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (g,h)_{L^2(S_n)} & \text{si } n = m \end{cases} \tag{1.9}$$

où

$$(g,h)_{L^2(S_n)} = \int_{S_n} g(x_1,...,x_n)\,h(x_1,...,x_n)\,dx_1 \cdots dx_n \tag{1.10}$$

désigne le produit intérieur de $L^2(S_n)$.

Remarquons que (1.9) est valable même pour $n=0$ ou $m=0$, à condition de poser $J_0(g)=g$ et $(g,h)_{L^2(S_0)} = gh$ pour toutes fonctions constantes *g* et *h*.

Définition 1.5 *Pour* $g \in \hat{L}^2([0,T]^n)$, *définissons la variable aléatoire* $I_n(g)$ *par*

$$I_n(g) := \int_{[0,T]^n} g(t_1,...,t_n)\,dW_{t_1} \cdots dW_{t_n} = n!\,J_n(g). \tag{1.11}$$

Alors, pour toute fonction $g \in \hat{L}^2([0,T]^n)$,

$$E[I_n^2(g)] = E[(n!)^2 J_n^2(g)] = (n!)^2 \|g\|^2_{L^2(S_n)} = n!\|g\|^2_{L^2([0,T]^n)}. \tag{1.12}$$

Rappelons que les polynômes d'Hermite h_n sont définies pour tout entier *n* par

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{1}{2}x^2}) \tag{1.13}$$

Itô a montré en 1951 que, pour toute fonction $g \in L^2([0,T])$, on a

$$n!\int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} g(t_1)g(t_2)\cdots g(t_n)\,dW_{t_1} \cdots dW_{t_n} = \|g\|^2 h_n\left(\tfrac{\theta}{\|g\|}\right), \tag{1.14}$$

où

$$\|g\| = \|g\|_{L^2([0,T])} \quad \text{et} \quad \theta = \int_0^T g(t)\,dW_t.$$

Rappelons le théorème de représentation d'Itô :

Théorème 1.6 *Pour toute fonction* $F \in L^2(\Omega)$ *qui est* $\mathcal{F}_T$ *-mesurable, il existe un processus* $\mathcal{F}_t$ *-adapté unique* $\varphi(t,\omega)$ *tel que* $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|F\|_{L^2(\Omega)}$ *et*

$$F(\omega) = E[F] + \int_0^T \varphi(t,\omega)\,dW_t. \tag{1.15}$$

Théorème 1.7 La décomposition en chaos de Wiener-Itô (Wiener 1938, Itô 1951)

Soit φ une variable aléatoire F_T -mesurable appartenant à l'espace $L^2(\Omega)$. Alors, il existe une suite unique $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions déterministes $f_n \in \hat{L}^2([0,T]^n)$ tel que

$$\varphi(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n). \tag{1.16}$$

De plus, on a l'isométrie suivante

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n!\|f_n\|^2_{\hat{L}^2([0,T]^n)}. \tag{1.17}$$

Preuve :

D'après le théorème de représentation d'Itô, il existe un processus stochastique F_t -adapté $\varphi_1(t_1,\omega),\ 0 \leq t_1 \leq T$ dans $L^2([0,T])$ tel que

$$\varphi(\omega) = E[\varphi] + \int_0^T \varphi_1(t_1,\omega)\, dW_{t_1}. \tag{1.18}$$

Posons

$$g_0 = E[\varphi]. \tag{1.19}$$

En appliquant pour presque tout $t_1 \leq T$ le théorème de représentation d'Itô pour la fonction $\varphi_1(t_1,\omega)$, on montre qu'il existe un processus F_t -adapté $\varphi_2(t_2,t_1,\omega),\ 0 \leq t_2 \leq t_1$ dans $L^2([0,T])$ tel que

$$\varphi(t_1,\omega) = E[\varphi_1(t_1)] + \int_0^{t_1} \varphi_2(t_2,t_1,\omega)\, dW_{t_2}. \tag{1.20}$$

En substituant (1.20) dans (1.18), on obtient

$$\varphi(\omega) = g_0 + \int_0^T g_1(t_1,\omega)\, dW_{t_1} + \int_0^T \int_0^{t_1} \varphi_2(t_2,t_1,\omega) dW_{t_2} dW_{t_1}, \tag{1.21}$$

où

$$g_1(t_1) = E[\varphi_1(t_1)]. \tag{1.22}$$

De plus, l'isométrie d'Itô et le théorème 1.6 impliquent que

$$E\left[\left\{\int_0^T \int_0^{t_1} \varphi_2(t_1,t_2,\omega)\, dW_{t_2} dW_{t_1}\right\}^2\right] = \int_0^T \int_0^{t_1} E[\varphi_2^2(t_1,t_2,\omega)]\, dt_2 dt_1 \leq \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.23}$$

En itérant cette procédure, on obtient, après n étapes, un processus $\varphi_{n+1}(t_1,t_2,\dots,t_{n+1},\omega); 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n+1} \leq T$ et $n+1$ fonctions déterministes $g_0, g_1, \dots, g_n$ où $g_k \in S_k$ pour tout k tels que

$$\varphi(\omega)=\sum_{k=0}^{n}J_k(g_k)+\int_{S_{n+1}}\varphi_{n+1}\,dW^{\otimes(n+1)}, \tag{1.24}$$

où

$$\int_{S_{n+1}}\varphi_{n+1}\,dW^{\otimes(n+1)}=\int_0^T\int_0^{t_{n+1}}\cdots\int_0^{t_2}\varphi_{n+1}(t_1,...,t_{n+1},\omega)\,dW_{t_1}\cdots dW_{t_n}.$$

De plus,

$$E\left[\left\{\int_{S_{n+1}}\varphi_{n+1}\,dW^{\otimes(n+1)}\right\}^2\right]\le\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega).} \tag{1.25}$$

Donc, la famille

$$\psi_{n+1}:=\int_{S_{n+1}}\varphi_{n+1}\,dW^{\otimes(n+1)};\ n\ge 1$$

est bornée dans $L^2(\Omega)$ et pour tout entier k inférieur à n et toute fonction $f_k\in L^2([0,T]^k)$,

$$(\psi_{n+1},J_k(f_k))_{L^2(\Omega)}=0. \tag{1.26}$$

Par conséquent,

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}=\sum_{j=0}^{n}\|J_k(g_k)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\psi_{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.27}$$

En particulier, la série $\sum_{j=0}^{+\infty}J_k(g_k)$ est absolument convergente dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, la limite $\psi:=\lim_{n\to\infty}\psi_{n+1}$ existe et appartient à $L^2(\Omega)$. Or, d'après (1.26), on a

$$(\psi,J_k(f_k))_{L^2(\Omega)}=0,\quad\forall k,\forall f_k\in L^2([0,T]^k). \tag{1.28}$$

Ainsi, la relation (1.14) implique que

$$E\left[h_k(\tfrac{\theta}{\|g\|})\psi\right]=0,\ \text{pour tout } g\in L^2([0,T]),\forall k\ge 0, \tag{1.29}$$

où $\|g\|=\|g\|_{L^2([0,T])}$ et $\theta=\int_0^T g(t)\,dW_t.$ Comme les ploynômes d'Hermite constituent une base de l'espace des polynômes, ceci prouve que

$$E[\theta^k\psi]=0,\ \forall k\ge 0$$

et donc

$$E[\exp\theta\cdot\psi]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}E[\theta^k\cdot\psi]=0.$$

Or, la famille $\{\exp\theta;\ g\in L^2([0,T])\}$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent $\psi\equiv 0.$

Ainsi,

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k(g_k) \tag{1.30}$$

et

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \|J_k(g_k)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.31}$$

Les fonctions g_k ainsi obtenues sont seulement définies sur S_k, mais on peut les prolonger sur $[0,T]^k$, en posant

$$g_k(t_1,\dots,t_n) = 0 \text{ si } (t_1,\dots,t_n) \in [0,T]^k \setminus S_k. \tag{1.32}$$

Considérons les fonctions $f_k = \tilde{g}_k$. Alors,

$$I_k(f_k) = n!J_k(f_k) = n!J_k(\tilde{g}_k) = J_k(g_k)$$

et le résultat suit alors des relations (1.30) et (1.31).

□

Exemple 1.8 Quelle est la décomposition en chaos de Wiener de la variable aléatoire $\varphi(\omega) = W^2(T,\omega)$? La formule (1.14), appliquée à la fonction $g \equiv 1$ donne

$$2\int_0^T \int_0^{t_2} dW_{t_1} dW_{t_2} = T\, h_2(\frac{W_T}{T^{1/2}}) = W^2(T) - T$$

et par conséquent,

$$W^2(T) = T + 2J_2(1) = T + I_2(1).$$

2. L’intégrale de Skohorod

Soit $u(t,\omega),\ \omega \in \Omega, t \in [0,T]$ un processus stochastique (t,ω)-mesurable tel que

$$u(t,\cdot) \text{ est } \mathcal{F}_T\text{-mesurable pour tout } t \in [0,T] \tag{2.1}$$

et

$$E[u^2(t,\omega)] < +\infty \text{ pour tout } t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Pour tout t dans $[0,T]$, on peut alors appliquer le théorème de décomposition en chaos de Wiener à la variable aléatoire $\omega \to u(t,\omega)$ et obtenir des fonctions $f_{n,t}(t_1,\dots,t_n) \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$u(t,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_{n,t}(\cdot)). \tag{2.3}$$

Comme les fonctions $f_{n,t}(\cdot)$ dépendent du paramètre *t*, on peut écrire

$$f_{n,t}(t_1,\dots,t_n)=f_n(t_1,\dots,t_n,t). \tag{2.4}$$

Ainsi, on regarde f_n comme fonction des $n+1$ variables $t_1,\dots,t_n,t$. Comme cette fonction est symétrique par rapport à ses *n* premières variables, sa symétrisation $\tilde{f}_n$ est donnée par

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n(t_1,\dots,t_{n+1})&=\\ &\frac{1}{n+1}\left[f_n(t_1,\dots,t_{n+1})+\dots+f_n(t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_{n+1},t_i)+\dots+f_n(t_2,\dots,t_{n+1},t_1)\right].\end{aligned} \tag{2.5}$$

Exemple 2.1 Soit la fonction $f_{2,t}$ définie par

$$f_{2,t}(t_1,t_2)=f_2(t_1,t_2,t)=\tfrac{1}{2}[\chi_{\{t_1<t<t_2\}}+\chi_{\{t_2<t<t_1\}}].$$

Alors, la symétrisation $\tilde{f}_2(t_1,t_2,t_3)$ de f_2 est donnée par

$$\begin{aligned}\tilde{f}_2(t_1,t_2,t_3)=\frac{1}{3}\Bigg[&\frac{1}{2}\left(\chi_{\{t_1<t_3<t_2\}}+\chi_{\{t_2<t_3<t_1\}}\right)+\frac{1}{2}\left(\chi_{\{t_1<t_2<t_3\}}+\chi_{\{t_3<t_2<t_1\}}\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\chi_{\{t_2<t_1<t_3\}}+\chi_{\{t_3<t_1<t_2\}}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

Cette somme vaut $\frac{1}{6}$, sauf sur l'ensemble où plusieurs des variables coïncident. Or, cet ensemble est de mesure nulle, donc

$$\tilde{f}_2(t_1,t_2,t_3)=\tfrac{1}{6}\ \ p.s.$$

Définition 2.2 *Soit $u(t,\omega)$ est un processus stochastique vérifiant les relations (2.1) et (2.2), dont la décomposition en chaos de Wiener est*

$$u(t,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_{n,t}(\cdot,t)). \tag{2.6}$$

Alors, l'intégrale de Skohorod de u est la variable aléatoire

$$\delta(u):=\int_0^T u(t,\omega)\,\delta W_t:=\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n), \tag{2.7}$$

où $\tilde{f}_n$ est la symétrisation de la fonction $f_n(t_1,\dots,t_n,t)$ comme fonction aux $n+1$ variables $t_1,\dots,t_n,t$.

Définition 2.3 *On dit que le processus u est intégrable au sens de Skohorod et on note* $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ *si la série (2.7) converge dans* $L^2(\Omega)$. *D'après (1.17), ceci arrive si et seulement si*

$$E[\delta(u)^2] = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)! \left\| \tilde{f}_n \right\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} < +\infty. \tag{2.8}$$

Exemple 2.4 Calculons l'intégrale de Skohorod $\int_0^T W(T,\omega)\delta W_t$.

Ici $u(t,\omega) = W(T,\omega) = \int_0^T 1 dW_t$, donc $f_0 = 0, f_1 = 1$ et $f_n = 0$ pour tout $n \geq 2.$ Donc,

$$\delta(u) = I_2(\tilde{f}_1) = I_2(1) = 2\int_0^T \int_0^{t_2} dW_{t_1} dW_{t_2} = 2\int_0^T W_{t_2} dW_{t_2} = W^2(T,\omega) - T.$$

Remarquons que $W(T,\omega)$ ne dépend pas de *t*, et pourtant

$$\int_0^T W(T,\omega)\delta W_t \neq W(T,\omega)\int_0^T \delta W_t.$$

L'intégrale de Skohorod est en fait une extension de l'intégrale d'Itô. Plus précisément, les deux intégrales coïncident si $u(t,\omega)$ est F_t -adapté. Pour démontrer cela, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.5 *Soit* $u(t,\omega)$ *un processus stochastique vérifiant les relations (2.1) et (2.2) dont la décomposition en chaos de Wiener est*

$$u(t,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_{n,t}(\cdot,t)).$$

Alors, le processus $u(t,\omega)$ *est* F_t *-adapté si et seulement si*

$$f_n(t_1,\ldots,t_n,t) = 0 \;\; p.s. \;\; pour \;\; t < \max_{1\leq i\leq n} t_i. \tag{2.9}$$

Preuve : Remarquons d'abord, que pour toute fonction $g \in \hat{L}^2([0,T]^n)$, on a

$$\begin{aligned}
E[I_n(g) \mid \mathsf{F}_t] &= n!E[J_n(g) \mid \mathsf{F}_t] \\
&= n!E\left[\int_0^T \left\{\int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} g(t_1,\ldots,t_n)\, dW_{t_1} \cdots dW_{t_{n-1}}\right\} dW_{t_n} \mid \mathsf{F}_t\right] \\
&= n!\int_0^t \left\{\int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} g(t_1,\ldots,t_n)\, dW_{t_1} \cdots dW_{t_{n-1}}\right\} dW_{t_n} \qquad (2.10) \\
&= n!J_n\left(g(t_1,\ldots,t_n)\, \chi_{\{\max t_i < t\}}\right) \\
&= I_n\left(g(t_1,\ldots,t_n)\, \chi_{\{\max t_i < t\}}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u(t,\omega) \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-adapté} &\Leftrightarrow E[u(t,\omega) \mid \mathcal{F}_t] = u(t,\omega) \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} E[I_n(f_n(\cdot,t)) \mid \mathcal{F}_t] = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n(\cdot,t)) \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\left(f_n(\cdot,t)\,\chi_{\{\max t_i<t\}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n(\cdot,t)) \\ &\Leftrightarrow f_n(t_1,\dots,t_n,t)\,\chi_{\{\max t_i<t\}} = f_n(t_1,\dots,t_n,t) \ p.s. \end{aligned}$$

par unicité de la décomposition en chaos de Wiener.

□

Théorème 2.6 *Soit* $u(t,\omega)$ *un processus stochastique vérifiant*

$$E\left[\int_0^T u^2(t,\omega)dt\right] < +\infty \tag{2.11}$$

et tel que $u(t,\omega)$ *est* $\mathcal{F}_t$ *-adapté. Alors,* $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ *et*

$$\int_0^T u(t,\omega)\,\delta W_t = \int_0^T u(t,\omega)\,dW_t. \tag{2.12}$$

Preuve : Remarquons d'abord que la relation (2.5) et le lemme 2.5 impliquent que

$$\tilde{f}_n(t_1,\dots,t_n,t_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left[f_n(t_1,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_j)\right], \tag{2.13}$$

où

$$t_j = \max_{1\le i\le n+1} t_i.$$

Donc, le lemme 2.5 implique que

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_n\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} &= (n+1)!\int_{S_{n+1}} \tilde{f}_n^2(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_1\cdots dx_{n+1} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^2}\int_{S_{n+1}} f_n^2(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_1\cdots dx_n \\ &= \frac{n!}{n+1}\int_0^T\int_0^t\int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_2} f_n^2(x_1,\dots,x_n,t)\,dx_1\cdots dx_n dt \\ &= \frac{n!}{n+1}\int_0^T\int_0^T\int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_2} f_n^2(x_1,\dots,x_n,t)\,dx_1\cdots dx_n dt \\ &= \frac{1}{n+1}\int_0^T \|f_n(\cdot,t)\|^2_{L^2([0,T]^n)}\,dt. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (1.17),

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)!\left\|\tilde{f}_n\right\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n!\int_0^T \| f_n(\cdot,t)\|^2_{L^2([0,T]^n)}\,dt \\
&= \int_0^T\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n!\| f_n(\cdot,t)\|^2_{L^2([0,T]^n)}\right)dt \\
&= E\left[\int_0^T u^2(t,\omega)\,dt\right] < +\infty.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Cela montre que $u\in \mathrm{Dom}(\delta)$. La relation (2.12) suit d'une nouvelle application de (2.13) :

$$
\begin{aligned}
\int_0^T u(t,\omega)\,dW_t &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^T I_n\left(f_n(\cdot,t)\right)dW_t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^T\left\{ n! \int_{0\le t_1\le\cdots\le t_n\le t_{n+1}} f_n(t_1,\dots,t_n,t)\,dW_{t_1}\cdots dW_{t_n}\right\}dW_t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^T n!(n+1)\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_n\le t_{n+1}} \tilde{f}_n(t_1,\dots,t_n,t_{n+1})\,dW_{t_1}\cdots dW_{t_n}dW_{t_{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)!\,J_{n+1}(\tilde{f}_n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n) \\
&= \int_0^T u(t,\omega)\,\delta W_t.
\end{aligned}
$$

□