UNIVERSITE DE LIEGE

Faculté des Sciences

CARACTERISATION DE METHODES DE RANGEMENT BASEES SUR DES RELATIONS BINAIRES VALUEES

Mémoire présenté par

Jean-Luc MARICHAL

pour l'obtention du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
Année académique 1991-1992

REMERCIEMENTS

Je tiens, ici, à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin, à la réalisation de ce travail et notamment Monsieur le Professeur M. ROUBENS pour m'avoir permis de mener à bien ce travail.

J'exprime aussi ma reconnaissance à Messieurs M. ROUBENS, P. LECOMTE, G. COLSON, J. SCHMETS, Membres du Jury, pour l'attention qu'ils voudront bien consacrer à la lecture de cet ouvrage.

TABLE DES MATIERES

0. INTRODUCTION DU SUJET

0.1. Position du problème

Soit A = {a,b,c,...} un ensemble fini avec $|A|\geq 2$. Ses éléments, appelés *actions*, représentent généralement des objets, des modalités, des décisions, des candidats, des solutions, etc. Notre objectif est de ranger ces éléments du meilleur au moins bon en prenant en compte plusieurs critères ou l'opinion de plusieurs votants. Par exemple, le classement de dix finalistes d'un concours musical à partir des scores attribués par les juges.

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour ranger les actions sur base de telles informations. Pour comparer ces méthodes nous pouvons étudier leur comportement vis-à-vis d'un certain nombre de propriétés "désirables". Celles-ci sont souvent appréciées par le décideur à travers son expérience et son jugement. Nous pouvons aussi essayer de trouver un ensemble d'axiomes qui caractérise une méthode particulière; c'est la voie que nous avons choisi de suivre. Ce travail a donc pour objet de mettre en évidence des caractérisations axiomatiques permettant d'identifier une procédure de classement à un ensemble d'axiomes.

0.2. Structures valuées de préférences

Contrairement aux modèles classiques (modèles booléens) où le décideur ne fait pas de distinction entre des préférences plus ou moins fortes, nous allons associer à chaque couple (a,b) d'actions, une valeur traduisant le "degré" de la préférence. Plus précisément, ce nombre va indiquer la force ou la crédibilité de la proposition

"a est au moins aussi bon que b".

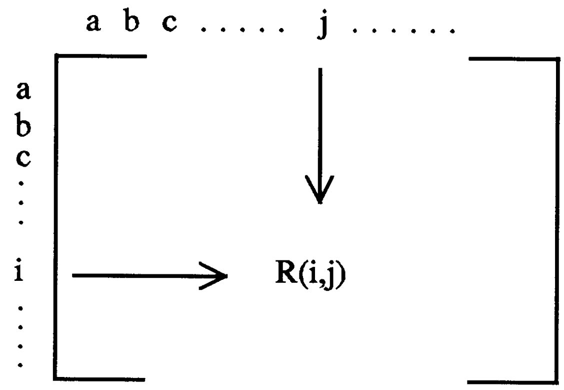
Pour qu'il synthétise le résultat de la comparaison de a et b après agrégation des différents points de vue, on peut demander à ce nombre de refléter l'importance des critères pour lesquels "a est au moins aussi bon que b" ou encore l'importance de l'adhésion des votants qui sont de cet avis. Il suffit par exemple de prendre, selon le cas, la somme des poids des critères favorisant a ou le pourcentage de votants déclarant que a est préféré ou indifférent à b. Quoique de tels procédés soient souvent utilisés, nous savons depuis le marquis de Condorcet (1785) que lorsque les différents points de vue pris en compte sont conflictuels, il peut être difficile de comparer les actions sur base de ces nombres.

Nous définissons une *relation (binaire) valuée*[1] *sur A* comme une fonction R associant à chaque couple d'actions $(a,b) \in A \times A$ avec $a \neq b$ un élément de $[0,1]$:

$$R : A \times A \rightarrow [0,1] : (a,b) \rightarrow R(a,b).$$

D'un point de vue technique, la condition $a \neq b$ pourrait être omise de cette définition au prix de quelques modifications mineures de certains axiomes. Cependant, puisqu'il est clair que les valeurs R(a,a) sont insignifiantes pour le classement des actions, nous utiliserons cette définition tout au long de nos développements.

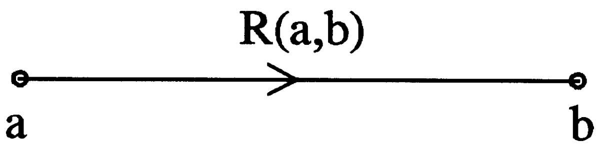
La représentation matricielle d'une relation valuée facilite d'une manière évidente le traitement des informations (sur un ordinateur par exemple). Cette représentation consiste à attribuer à chaque relation valuée R sur A une matrice carrée où chaque ligne et chaque colonne sont relatives aux éléments de A et dont l'élément d'indices (i,j) n'est autre que le nombre R(i,j), pour tout $i,j \in A$, , avec $i \neq j$.



Une représentation sagittale, c'est-à-dire au moyen d'un graphe orienté est également possible. Un graphe orienté est un ensemble de noeuds X et un ensemble d'arcs $U \subseteq X \times X$. Nous disons que x est l'extrémité initiale et y l'extrémité finale de l'arc $u = (x,y) \in U$. Considérons donc un graphe orienté pour lequel l'ensemble des noeuds est A et l'ensemble des arcs U est $\{(a,b) : a,b \in A \text{ et } a \neq b\}$. Il est clair qu'il y a une correspondance

[1] On parle aussi de relation floue. Les relations booléennes sont alors appelées relations nettes.

biunivoque entre relations valuées sur A et valuations entre 0 et 1 portées sur les arcs de ce graphe. Dans la suite, nous identifions une relation valuée avec son graphe valué associé dans lequel la valuation $v_R(u)$ de l'arc $u = (a,b)$ est $R(a,b)$.



Cela étant, nous appelons *rangement (complet) sur A*, tout préordre total sur A (relation binaire booléenne complète et transitive sur A). De même, nous appelons *rangement partiel sur A*, tout préordre partiel sur A (relation binaire booléenne réflexive et transitive sur A).

Une *méthode de rangement (resp. de rangement partiel)* $\geq$ est une fonction assignant un rangement (resp. un rangement partiel) $\geq(R)$ sur A à toute relation valuée R sur A :

$$\geq \; : R(A) \rightarrow P(A\times A) : R \rightarrow \; \geq(R)$$

où R(A) désigne l'ensemble des relations valuées sur A et P(A×A) l'ensemble des parties de A×A.

0.3. Le rangement par les scores

Une manière évidente d'obtenir une méthode de rangement est d'associer un score S(a,R) à chaque action a et de ranger les actions selon leur score[2], c'est-à-dire :

$$a \geq (R) b \qquad \text{ssi} \qquad S(a,R) \geq S(b,R).$$

Dans ce cas, on a aussi

$$a = (R) b \qquad \text{ssi} \qquad S(a,R) = S(b,R)$$

et

$$a > (R) b \qquad \text{ssi} \qquad S(a,R) > S(b,R).$$

[2] Le score S(a,R) représente ainsi une "mesure" de la qualité de a.

La relation $\geq(R)$ est alors un préordre total puisqu'on est ramené à comparer des nombres réels. Cette idée fut d'abord proposée par le Chevalier Jean-Charles de Borda en 1781. C'est actuellement la technique de rangement la plus commune et peut-être la plus naturelle.

Si deux types de scores, notés S_1 et S_2, sont compétitifs, un rangement partiel peut être envisagé en prenant l'intersection des deux rangements complets :

$$a \geq (R) b \quad ssi \quad [S_1(a,R) \geq S_1(b,R) \ et \ S_2(a,R) \geq S_2(b,R)]$$

Dans ce cas, on a aussi

$$a=(R)b \text{ ssi } [S_1(a,R) = S_1(b,R) \text{ et } S_2(a,R) = S_2(b,R)]$$

et $a>(R)b$ ssi $[S_1(a,R) \geq S_1(b,R)$ et $S_2(a,R) \geq S_2(b,R)$, une au moins de ces inégalités étant stricte].

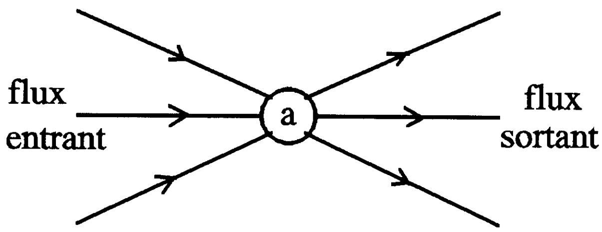
La relation $\geq(R)$ est alors un préordre partiel en tant qu'intersection de deux préordres totaux.

Voici quelques scores généralement utilisés. Citons d'abord le flux sortant, le flux entrant et le flot net :

$$S_L(a,R) = \sum_{c \in A \setminus \{a\}} R(a,c)$$

$$S_E(a,R) = - \sum_{c \in A \setminus \{a\}} R(c,a)$$

$$S_{NF}(a,R) = S_L(a,R) + S_E(a,R)$$



Ensuite, nous pouvons envisager le produit sortant, le produit entrant et le produit net :

$$S_{\Pi^+}(a,R) = \Pi_{c\in A\setminus\{a\}} R(a,c)$$

$$S_{\Pi^-}(a,R) = -\Pi_{c\in A\setminus\{a\}} R(c,a)$$

$$S_{NP}(a,R) = S_{\Pi^+}(a,R) + S_{\Pi^-}(a,R)$$

Enfin, en utilisant les opérateurs Min et Max, nous obtenons

$$S_{\min,+}(a,R) = S_{\min}(a,R) = \min_{c\in A\setminus\{a\}} R(a,c)$$

$$S_{\max,+}(a,R) = S_{\max}(a,R) = \max_{c\in A\setminus\{a\}} R(a,c)$$

pour le minimum et le maximum sortants et

$$S_{\min,-}(a,R) = -\min_{c\in A\setminus\{a\}} R(c,a)$$

$$S_{\max,-}(a,R) = -\max_{c\in A\setminus\{a\}} R(c,a)$$

pour le minimum et le maximum entrants.

D'autres scores peuvent encore être envisagés. Bien sûr, ils sont tous basés sur le principe que les éléments qui plaident en faveur de a sont les arcs du type (a,c), c $\in$ A\{a}, alors que ceux qui plaident contre a sont les arcs du type (c,a), c $\in$ A\{a}.

0.4. **Exemples**

Pour un premier exemple, soient l'ensemble A = {Audi (A), BMW (B), Mercedes (M), Opel (O), Renault (R), Volvo (V)}
et R_1, R_2, R_3, R_4 les rangements pour quatre critères différents dont les poids sont 4/12, 3/12, 3/12 et 2/12 respectivement :

$$R_1 : V > R > O > B \sim M > A$$

$$R_2 : A \sim B \sim M \sim R > O > V$$

$$R_3 : V \sim O \sim B > A > R > M$$

$$R_4 : A \sim M \sim O \sim V > B \sim R$$

Le degré de préférence d'une voiture a sur une autre b est égal à la somme des poids des critères pour lesquels on a (a > b) ou (a ~ b). Nous obtenons donc la matrice des valuations suivante (les valeurs sont multipliées par 12) :

	A	B	M	O	R	V
Audi (A)		5	8	5	8	5
BMW (B)	10		10	6	8	6
Mercedes (M)	9	9		5	5	5
Opel (O)	9	9	9		5	8
Renault (R)	7	9	10	7		3
Volvo (V)	9	9	9	9	9	

En utilisant différents scores (parmi ceux que nous avons présenté dans le paragraphe précédent), nous obtenons des rangements variés :

$$S_L\text{: } V > O \sim B > R > M > A$$

$$S_E\text{: } V > O > R > B > A > M$$

$$S_{NF}\text{: } V > O > R > B > A \sim M$$

$$S_\Pi^+\text{: } V > O > B > R > M > A$$

$$S_\Pi^-\text{: } V > O > R > B > A > M$$

$$S_{NP}\text{: } V > O > R > B > A > M$$

$$S_{min,+}\text{: } V > B > A \sim M \sim O > R$$

$$S_{max,-}\text{: } V > B \sim O \sim R > A \sim M$$

Pour un second exemple, nous comparons le goût de cinq vins Médoc. Soit p(a,b) la proportion de dégustateurs qui expriment une préférence pour le goût du vin a sur celui du vin b. Il s'agit d'un cas typique de choix forcé où $p(a,b) + p(b,a) = 1$ pour tout $a,b \in A$ avec $a \neq b$. La relation valuée p est alors appelée une *relation probabiliste*. Voici la matrice des proportions observées :

	a	b	c	d	e
a		.57	.57	.29	.67
b	.43		.70	.52	.28
c	.43	.30		.72	.48
d	.71	.48	.28		.48
e	.33	.72	.52	.52	

Voici quelques rangements obtenus par des scores :

S_L, S_E, S_{NF}	: $a > e > d > b \sim c$
S_Π^+, S_Π^-	: $e > a > d > c > b$
$S_{min,+}$, $S_{max,-}$	: $e > c > a > b \sim d$

Nous observons par exemple que les scores S_L, S_E et S_{NF} donnent le même rangement. Ceci n'est pas une coïncidence. Dans toute relation probabiliste R sur A ($R(a,b) + R(b,a) = 1$), nous avons

$$S_L(a,R) - S_E(a,R) = |A| - 1$$

$$S_{NF}(a,R) = (|A|-1) + 2\ S_E(a,R) = 2\ S_L(a,R) - (|A|-1)$$

$$S_{min,+}(a,R) = 1 + S_{max,-}(a,R)$$

1. PROPRIETES SOUHAITABLES POUR UNE PROCEDURE DE RANGEMENT

Nous présentons ci-dessous quelques propriétés qui peuvent être considérées comme souhaitables par l'utilisateur d'une procédure de rangement. La liste n'est certainement pas exhaustive (voir aussi sections 5 et 9); de plus, certaines propriétés sont plus discutables que d'autres; nous verrons également qu'il existe des implications entre certaines d'entre elles. Dans tous les cas, il peut être utile, lorsqu'on applique une procédure de rangement, de connaître les propriétés qu'elle satisfait et celles qu'elle viole.

Dans la suite, nous noterons =(R) et >(R) les parties symétrique et asymétrique de $\geq(R)$, c'est-à-dire, pour tout a,b $\in$ A,

a=(R)b ssi [$a \geq (R) b$ et $b \geq (R) a$]

a>(R)b ssi [$a \geq (R) b$ et *non* $b \geq (R) a$]

Les notations =(R) et >(R) seront parfois remplacées par I(R) et P(R) respectivement.

a. Neutralité vis-à-vis des noms (ou labels) des actions

Si on permute les noms des éléments de A, la relation $\geq(R)$ doit rester inchangée à la permutation près, ce qui, mathématiquement, peut se formuler comme suit :

une méthode de rangement $\geq$ est dite *neutre* si et seulement si, pour toute permutation σ de A, pour toute relation valuée R sur A et tout a,b $\in$ A :

$$a \geq (R) b \Leftrightarrow \sigma(a) \geq (R^\sigma) \sigma(b)$$

où R^σ est défini par $R^\sigma(\sigma(a), \sigma(b)) = R(a,b)$ pour tout a,b $\in$ A.

La propriété de neutralité paraît indiscutable. Elle signifie que les noms donnés aux actions ne peuvent avoir aucune influence sur leur rangement (ce qui exclut, par exemple, la procédure qui consisterait à ranger les actions par ordre alphabétique).

b. **Axiome de non discrimination**

Une méthode de rangement $\geq$ est dite *non discriminatoire* si et seulement si, pour toute relation valuée R sur A et tout a,b $\in$ A,

$$[R(a,b) = R(b,a) \text{ et } R(a,c) = R(b,c),\ R(c,a) = R(c,b) \text{ pour tout } c \in A\backslash\{a,b\}] \Rightarrow a =(R)b.$$

L'axiome de non discrimination dit que si deux actions sont comparées similairement vis-à-vis de toutes les autres actions, alors elles sont déclarées indifférentes.
Cette propriété est tout à fait acceptable et on peut aisément vérifier qu'elle est une conséquence de la neutralité[3].

En effet, la transposition de a et b ne modifie en rien les hypothèses de la non discrimination (placées entre crochets). On ne peut donc avoir une préférence stricte entre a et b dans le rangement.

c. **Axiomes de monotonie**

Une méthode de rangement est dite *monotone* si elle ne répond pas "dans la mauvaise direction" à une modification de R. Plus formellement, $\geq$ est monotone si, pour toute relation valuée R sur A et tout a,b $\in$ A :

$$a \geq (R) b \Rightarrow a \geq (R') b$$

où R' est identique à R excepté que

$[R'(a,c) > R(a,c)$ ou $R'(c,a) < R(c,a)$ pour un $c \in A\backslash\{a\}]$ ou

$[R'(b,d) < R(b,d)$ ou $R'(d,b) > R(d,b)$ pour un $d \in A\backslash\{b\}]$.

---

[3] La propriété de neutralité est nécessaire. En effet, la procédure qui consiste à ranger les actions par ordre alphabétique, pour ne citer qu'elle, n'est pas non discriminatoire.

En conséquence, on a aussi : $a>(R)b \Rightarrow a>(R')b$[4]

Une méthode de rangement est dite *strictement monotone* si elle répond "dans la bonne direction" à une modification de R. Plus formellement, $\geq$ est strictement monotone si, pour toute relation valuée R sur A et tout $a,b \in A$:

$$a \geq (R) b \Rightarrow a > (R') b$$

où R' est défini comme avant.

Comme définie ici, la monotonie apparaît comme une propriété acceptable. Elle signifie que si on modifie la relation R en avantageant (resp. désavantageant) une action, alors la situation de cette action dans le rangement ne peut pas se détériorer (resp. s'améliorer). La stricte monotonie demande beaucoup plus, en excluant, en particulier l'usage de tout seuil dans le traitement des valuations (voir section 8). Elle exige que la modification de R ait un impact sur le rangement en faveur (resp. défaveur) de l'action qui a été avantagée (resp. désavantagée).

Une méthode de rangement $\geq$ est dite *monotone sur les lignes* si pour toute relation valuée R sur A et tout $a, b \in A$:

$$a \geq (R) b \Rightarrow a > (R') b$$

où R' est identique à R excepté que $R'(a,c) > R(a,c)$ pour tout $c \in A \setminus \{a\}$.

La monotonie sur les lignes est une forte propriété : elle dit que la position d'une action s'améliore si sa position dans la relation valuée s'est avantagée vis-à-vis de toutes les autres actions.

---

4 On ne peut en effet avoir $b \geq (R') a$, car par la propriété de monotonie, on aurait $b \geq (R) a$.

Supposons que R" soit identique à R excepté que R(b,d) > R"(b,d) pour tout d $\in$ A\{b}. Il n'est pas difficile de constater que la monotonie sur les lignes implique que

$[a \geq (R) b \Rightarrow a > (R'') b]$. .

d. **Axiome d'ordinalité**

Une méthode de rangement $\geq$ est dite *ordinale* si, pour toute relation valuée R sur A et toute transformation ϕ strictement croissante de [0,1] sur [0,1],

$$\geq(R) = \geq(\phi[R])$$

où $\phi[R]$ est une relation valuée telle que $\phi[R](c,d) = \phi(R(c,d))$ pour tout c,d $\in$ A avec c $\neq$ d. L'ordinalité implique qu'une méthode de rangement ne fait pas usage des propriétés "cardinales" des valuations.

e. **Axiome de continuité**

Considérons une suite de relations valuées sur A ($R^i \in R(A)$, i = 1,2,...). Nous dirons que cette suite *converge* vers R $\in$ R(A) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k tel que, pour tout j > k et tout a,b $\in$ A avec a $\neq$ b, $|R^j(a,b) - R(a,b)| < \varepsilon$.

Une méthode de rangement $\geq$ est dite *continue* si, pour toute relation valuée R $\in$ R(A), toute suite ($R^i \in R(A)$, i = 1,2,...) convergeant vers R et tout a,b $\in$ A :

$$[a \geq (R^i) b \textit{ pour tout } R^i \textit{ de la suite}] \Rightarrow [a \geq (R) b].$$

La continuité dit que les changements "faibles" dans une relation valuée ne devraient pas conduire à des réactions chaotiques dans le rangement.

f. Axiome d'égalitarisme

Une méthode de rangement $\geq$ est *égalitaire sur les lignes* si pour toute relation valuée R sur A et tout a,b $\in$ A,

$$a \geq (R) b \Rightarrow a \geq (R_a) b$$

où R_a est identique à R excepté que $R_a(a,c) = \sum_{d \in A \setminus \{a\}} R(a,d)/(|A|-1)$ pour tout c $\in$ A\{a}.

Cela signifie que, la relation valuée R étant considérée sous sa représentation matricielle, la moyenne arithmétique des éléments de la ligne associée à une action ne peut diminuer la position de cette action dans le rangement.

g. Axiomes de définitions sur les flux

Définissons l'ensemble des flux sortants (resp. entrants) de l'action a $\in$ A par :

$$L_{a,R} = \cup_{c \in A \setminus \{a\}} \{R(a,c)\} \text{ (resp. } E_{a,R} = \cup_{c \in A \setminus \{a\}} \{R(c,a)\}).$$

Une méthode de rangement $\geq$ est *définie sur les flux sortants (resp. entrants)* si pour toute relation valuée R sur A et tout a,b $\in$ A,

$$L_{a,R} = L_{b,R} \text{ (resp. } E_{a,R} = E_{b,R}) \Rightarrow a = (R) b.$$

Une méthode de rangement $\geq$ est *définie sur les flux* si pour toute relation valuée R sur A et tout a,b $\in$ A,

$$[L_{a,R} = L_{b,R} \text{ et } E_{a,R} = E_{b,R}] \Rightarrow a=(R)b.$$

Il est clair que si une méthode de rangement est définie sur les flux sortants (resp. entrants), elle est définie sur les flux. La réciproque est évidemment fausse.

h. Axiomes de renversement des préférences

Une procédure de rangement vérifie *l'axiome de renversement faible des préférences* lorsque :

si $a \geq (R) b$

alors [pour tout c $\in$ A\{a}, il existe une relation valuée R' identique à R,

excepté que R'(a,c) $\leq$ R(a,c), telle que $b \geq (R') a$]. .

Une procédure de rangement vérifie *l'axiome de renversement strict des préférences* lorsque :

si $[a \geq (R) b$ ***et*** $R(b,d) \neq 0$ ***pour tout*** $d \in A \setminus \{b\}]$

alors [pour tout c $\in$ A\{a}, il existe une relation valuée R' identique à R,

excepté que R'(a,c) < R(a,c), telle que b>(R')a].

Le premier axiome énonce qu'on peut renverser (non strictement) la préférence de a sur b en abaissant la performance de a par rapport à n'importe quelle action. Dans le second axiome, on peut renverser strictement la préférence de a sur b à condition que la performance minimale de b par rapport à toute action soit non nulle.

Remarque Si on impose R(x,y) > 0 $\forall$ x,y $\in$ A, x $\neq$ y, alors la condition R(b,d) $\neq$ 0 est d'office vérifiée.

i. **Indépendance vis-à-vis des transformations admissibles**

Les axiomes qui vont suivre ne sont sans doute pas impératifs mais ils permettent de départager facilement certaines procédures.

i) **Transformations sur les circuits et les cycles élémentaires**

Une caractéristique importante d'une méthode de rangement consiste en la manière dont elle traite les "intransitivités" de R. Afin de formaliser ce point, rappelons quelques définitions bien connues utilisées dans la théorie des graphes.

Un *circuit* (resp. un *cycle*) de longueur q dans un graphe orienté est une collection ordonnée d'arcs $(u_1,u_2,...,u_q)$ telle que pour $i = 1,2,...,q$ l'extrémité initiale de u_i est l'extrémité finale de u_{i-1} et l'extrémité finale de u_i est l'extrémité initiale de u_{i+1} (resp. $u_i \neq u_{i-1}$, une des extrémités de u_i est une extrémité de u_{i-1} et l'autre une extrémité de u_{i+1}), où u_0 est interprété comme u_q et u_{q+1} comme u_1.
Un circuit (resp. un cycle) est *élémentaire* si et seulement si chaque noeud, extrémité d'un arc du circuit (resp. du cycle) est l'extrémité d'exactement deux arcs du circuit (resp. du cycle).

Une *translation sur un circuit élémentaire* consiste en l'addition d'une même quantité δ positive ou négative sur les valuations des arcs du circuit. Une *homothétie sur un circuit élémentaire* consiste en la multiplication par une même quantité θ strictement positive des valuations des arcs du circuit. Une transformation (translation ou homothétie) est *admissible* si les valuations transformées sont encore comprises entre 0 et 1. Lorsque nous appliquons une transformation admissible au graphe associé à une relation valuée R, nous obtenons une autre relation valuée R' et nous disons que R' a été obtenu à partir de R via une transformation admissible.

Considérons un cycle élémentaire dans le graphe associé à une relation valuée. Un arc u_i du cycle est appelé *arc avant* si son extrémité commune avec u_{i-1} est son extrémité initiale et *arc arrière* sinon. Un cycle est dit *alterné* si chaque arc avant du cycle est suivit par un arc arrière et vice-versa.

Une *translation sur un cycle élémentaire* consiste en l'addition d'une même quantité δ positive ou négative sur les valuations des arcs avants du cycle et en la soustraction de cette même quantité sur les valuations des arcs arrières. Une *homothétie sur un cycle élémentaire* consiste en la multiplication par une même quantité θ strictement positive des valuations des arcs avants du cycle et en la division par cette même quantité des valuations des arcs arrières.

Une méthode de rangement est dite *indépendante des translations (resp. des homothéties) sur les circuits* si et seulement si pour toutes relations valuées R et R', [R' peut être obtenu à partir de R via une translation (resp. une homothétie) admissible sur un circuit élémentaire de longueur 2 ou 3] $\Rightarrow$ [$\geq(\boldsymbol{R}) = \geq(\boldsymbol{R'})$].

Cet axiome a une interprétation directe. L'indépendance vis-à-vis des translations sur les 2-circuits, c'est-à-dire sur les circuits de longueur 2, implique que le rangement est uniquement influencé par les différences R(a,b) - R(b,a). L'indépendance vis-à-vis des translations sur les 3-circuits implique que des intransitivités du type R(a,b) > 0, R(b,c) > 0 et R(c,a) > 0 peuvent être "effacées" en soustrayant Min(R(a,b); R(b,c); R(c,a)) des valuations sur le 3-circuit ((a,b); (b,c); (c,a)). Une interprétation comparable peut être obtenue pour l'indépendance vis-à-vis des homothéties.

Remarque Il est évident qu'en ajoutant à cet axiome une condition sur un 1-circuit, nous pourrions considérer des relations pour lesquelles R(a,a) est défini.

ii) Transformations sur une paire d'actions

Une *translation sur une paire d'actions* {a,b} consiste en l'addition d'une même quantité δ positive ou négative sur les valuations de tous les arcs sortant de a et de b.

$R' = t_{\delta,a,b}(R)$ est la relation valuée identique à R excepté que :

$$R'(a,c) = R(a,c) + \delta \quad \forall c \in A\backslash\{a\}$$

$$R'(b,c) = R(b,c) + \delta \quad \forall c \in A\backslash\{b\}$$

La translation $t_{\delta,a,b}$ est dite *admissible* si les valuations transformées sont encore comprises entre 0 et 1.

Une méthode de rangement est dite *indépendante des translations sur une paire d'actions* si et seulement si pour toutes relations valuées R et R' sur A, et tout a,b $\in$ A,

[R' peut être obtenu à partir de R via une translation admissible sur {a,b}]

$\Rightarrow$ $[a \geq (R) b \Leftrightarrow a \geq (R') b$ *et* $b \geq (R) a \Leftrightarrow b \geq (R') a]$. .

Remarque Il est facile de voir qu'on a aussi a>(R)b $\Leftrightarrow$ a>(R')b et b>(R)a $\Leftrightarrow$ b>(R')a.

iii) **Transformations en marguerite**

Une *translation en marguerite sur une action* a consiste en l'addition d'une même quantité δ positive ou négative sur les valuations de tous les arcs sortants et entrants de a.

R' = $t_{\delta,a}(R)$ est la relation valuée identique à R excepté que :

$$R'(a,c) = R(a,c) + \delta \quad \forall c \in A\backslash\{a\}$$

$$R'(c,a) = R(c,a) + \delta \quad \forall c \in A\backslash\{a\}$$

La translation $t_{\delta,a}$ est dite *admissible* si les valuations transformées sont encore comprises entre 0 et 1.

Une méthode de rangement est dite *indépendante des translations en marguerite* si et seulement si pour toutes relations valuées R et R' sur A, et tout a $\in$ A, [R' peut être obtenu à partir de R via une translation admissible en marguerite sur a] $\Rightarrow$ $[\geq(R) = \geq(R')]$. .

De toutes ces définitions découlent celles relatives aux homothéties (voir aussi i).

2. UNE CARACTERISATION DE LA METHODE DU FLOT NET

2.1. Introduction

L'objet de cette section est de présenter une caractérisation axiomatique de la méthode de rangement basée sur le score suivant :

$$S_{NF}(a,R) = \sum_{c \in A \setminus \{a\}} (R(a,c) - R(c,a)) \qquad (1)$$

Le rangement des actions se ramène donc au rangement des scores, c'est-à-dire :

$$a \geq_{NF}(R) b \quad ssi \quad S_{NF}(a,R) \geq S_{NF}(b,R) \qquad (2)$$

Nous appellerons la méthode définie par (1) et (2) la méthode du *Flot Net* (Net Flow Method). Elle s'inspire de la première loi de Kirchhoff (loi des noeuds) de la théorie des circuits électriques. La caractérisation que nous allons présenter est due à BOUYSSOU (1991). Elle utilise un système de trois axiomes indépendants.

Lorsque R est une relation booléenne, c'est-à-dire lorsque R(a,b) ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, cette méthode de rangement se ramène à la méthode de rangement de Copeland (voir section 4). En effet, le score s'écrit alors :

$$S_{NF}(a,R) = |\{c \in A \setminus \{a\} : R(a,c) = 1\}| - |\{c \in A \setminus \{a\} : R(c,a) = 1\}|$$

Avant de mettre en évidence certaines propriétés de la méthode du flot net, nous devons mentionner l'utilité de prendre une position sur la nature et la signifiance des valuations R(a,b). Contrairement aux méthodes utilisant seulement les opérateurs MIN et/ou MAX, il faut signaler que la méthode du flot net fait usage des propriétés "cardinales" des valuations. En fait, il est clair à partir de (1) et (2) que nous pouvons très bien avoir $\geq_{NF}(R) \neq \geq_{NF}(\phi R)$,

où ϕ est une fonction strictement croissante sur [0,1] telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$.

Par conséquent, cette méthode ne semble pas appropriée lorsque les comparaisons des valuations n'ont qu'une signification ordinale (échelle ordinale) en terme de crédibilité.

2.2. Propriétés de la méthode du flot net

Voici quelques propriétés vérifiées par la méthode du flot net :

i) Neutralité

Il est évident que la méthode du flot net est neutre, donc non discriminatoire.
On a d'ailleurs $S_{NF}(a,R) = S_{NF}(\sigma(a), R^{\sigma})$.

ii) Stricte monotonie

La méthode du flot net est strictement monotone. En effet, si R' est identique à R sauf

$[R'(a,c) > R(a,c)$ ou $R'(c,a) < R(c,a)$ pour un $c \neq a]$ ou

$[R'(b,d) < R(b,d)$ ou $R'(d,b) > R(d,b)$ pour un $d \neq b]$ alors

$[S_{NF}(a,R') > S_{NF}(a,R)$ ou $S_{NF}(b,R') < S_{NF}(b,R)]$.

iii) Indépendance vis-à-vis des translations sur les circuits

Il est clair qu'une translation admissible sur un circuit élémentaire n'altère en rien le score d'aucune action, lorsque les scores sont définis par (1), de sorte que la méthode du flot net est indépendante des translations sur les circuits.

En effet, si a est l'extrémité de deux arcs d'un circuit, on a $S_{NF}(a,R') = S_{NF}(a,R) + (\delta - \delta) =$

$S_{NF}(a,R)$, si R' est obtenu à partir de R via une translation admissible de δ sur le circuit.

D'une façon analogue, on voit aisément qu'une translation admissible sur un cycle élémentaire n'altère le score d'aucune action, lorsque les scores sont définis par (1). Contrairement à la neutralité et la monotonie, cet axiome fait un usage explicite des propriétés cardinales des valuations.

2.3 Résultats

Nous sommes à présent en position d'énoncer le résultat principal.

> **Théorème 2.1.** La méthode du flot net est la seule méthode de rangement qui est neutre, strictement monotone et indépendante des translations sur les circuits.

Nous avons déjà noté que la méthode du flot net est neutre, strictement monotone et indépendante des translations sur les circuits. Il reste à prouver qu'elle est la seule. Notons d'abord que les trois axiomes qui caractérisent la méthode du flot net sont indépendants comme le montrent les exemples suivants :

i - Soit $\Phi : A \rightarrow \{1,2,\ldots,|A|\}$ une bijection (on numérote les actions)

Définissons $\geq_1$ comme :

$$a \geq_1 (R) b \quad ssi \quad S_1(a,R) \geq S_1(b,R)$$

où, pour tout $c \in A$, $S_1(c,R) = S_{NF}(c,R). \Phi(c)$.

Cette méthode de rangement est strictement monotone et indépendante des translations sur les circuits mais non neutre.

ii - Définissons $\geq_2$ comme :

$$a \geq_2 (R) b \quad ssi \quad S_2(a,R) \geq S_2(b,R)$$

où, pour tout $c \in A$, $S_2(c,R) = - S_{NF}(c,R)$.

Cette méthode de rangement est neutre et indépendante des translations sur les circuits mais non strictement monotone.

iii - Définissons $\geq_3$ comme :

$$a \geq_3(R) b \quad ssi \quad S_3(a,R) \geq S_3(b,R),$$

où pour tout c $\in$ A, $S_3(c,R) = \sum_{d \in A \setminus \{c\}} (R(c,d)^2 - R(d,c)^2)$

Cette méthode de rangement est neutre et strictement monotone mais non indépendante des translations sur les circuits.

Avant de démontrer le théorème 2.1, nous allons établir quelques lemmes.

Lemme 2.2 Pour toutes relations valuées R et R', si [R' peut être obtenu à partir de R via une translation admissible sur un circuit élémentaire] alors [R' peut être obtenu à partir de R via un nombre fini de translations admissibles sur des circuits élémentaires de longueur 2 ou 3]

Démonstration du lemme 2.2.

La preuve se fait par induction sur la longueur q du circuit élémentaire. Si q = 2 ou 3, alors le lemme est démontré. Supposons maintenant que le lemme soit vrai pour tout q $\leq$ k avec k $\geq$ 3 et montrons qu'il est encore vrai pour q = k + 1. Considérons un circuit élémentaire de longueur k + 1 :

$u_1 = (a_1,a_2)$, $u_2 = (a_2,a_3)$, ..., $u_k = (a_k,a_{k+1})$, $u_{k+1} = (a_{k+1},a_1)$ et supposons que R' a été obtenu à partir de R par addition de δ sur les arcs de ce circuit. Si $\delta = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Supposons que $\delta > 0$ (la démonstration est similaire pour $\delta < 0$).

Définissons $r = (a_1,a_k)$ et $s = (a_k,a_1)$.

Si $v_R(r) \leq 1 - \delta$ *et* $v_R(s) \leq 1 - \delta$, alors nous avons deux circuits $(u_1,u_2,...,u_{k-1},s)$ et (u_k,u_{k+1},r) de longueur respective k et 3 sur lesquels l'addition de δ est une translation admissible. A ce moment, la soustraction de δ sur le 2-circuit (r,s) est alors une translation admissible. Nous obtenons ainsi R'.

Si $v_R(r) > 1-\delta$ *et* $v_R(s) \leq 1-\delta$ *(le cas* $v_R(r) \leq 1-\delta$ *et* $v_R(s) > 1-\delta$ ***étant symétrique*****),**

alors l'addition de δ sur $(u_1,u_2,\ldots,u_{k-1},s)$ est une translation admissible. Puisque maintenant les valuations de s et r sont strictement positives, nous pouvons trouver un entier n suffisamment grand pour que la soustraction de δ/n sur le 2-circuit (r,s) soit une translation admissible. L'addition de δ/n sur (u_k,u_{k+1},r) est maintenant une translation admissible. En répétant n fois ces opérations, nous obtenons finalement R' (voir figure 1).

Si $v_R(r) > 1 - \delta$ *et* $v_R(s) > 1 - \delta$, $v_R(s)$ *et* $v_R(r)$ sont tous deux strictement positifs et nous pouvons trouver un entier n suffisamment grand pour que la soustraction de δ/n sur le 2-circuit (r,s) soit une translation admissible. L'addition de δ/n sur (u_k,u_{k+1},r) et sur $(u_1,u_2,\ldots, u_{k-1},s)$ sont maintenant des translations admissibles. La répétition n fois de ces opérations conduit à R'.

Ceci termine la démonstration du lemme 2.2 parce que si A est fini, il en va de même pour la longueur maximum d'un circuit élémentaire. □

Remarque Le lemme 2.2 implique que l'indépendance vis-à-vis des translations sur les 2 ou 3-circuits élémentaires est équivalente à l'indépendance vis-à-vis des translations sur les circuits élémentaires de longueur quelconque. Ceci justifie, en particulier, la définition de l'indépendance vis-à-vis des translations sur les circuits (voir section 1).

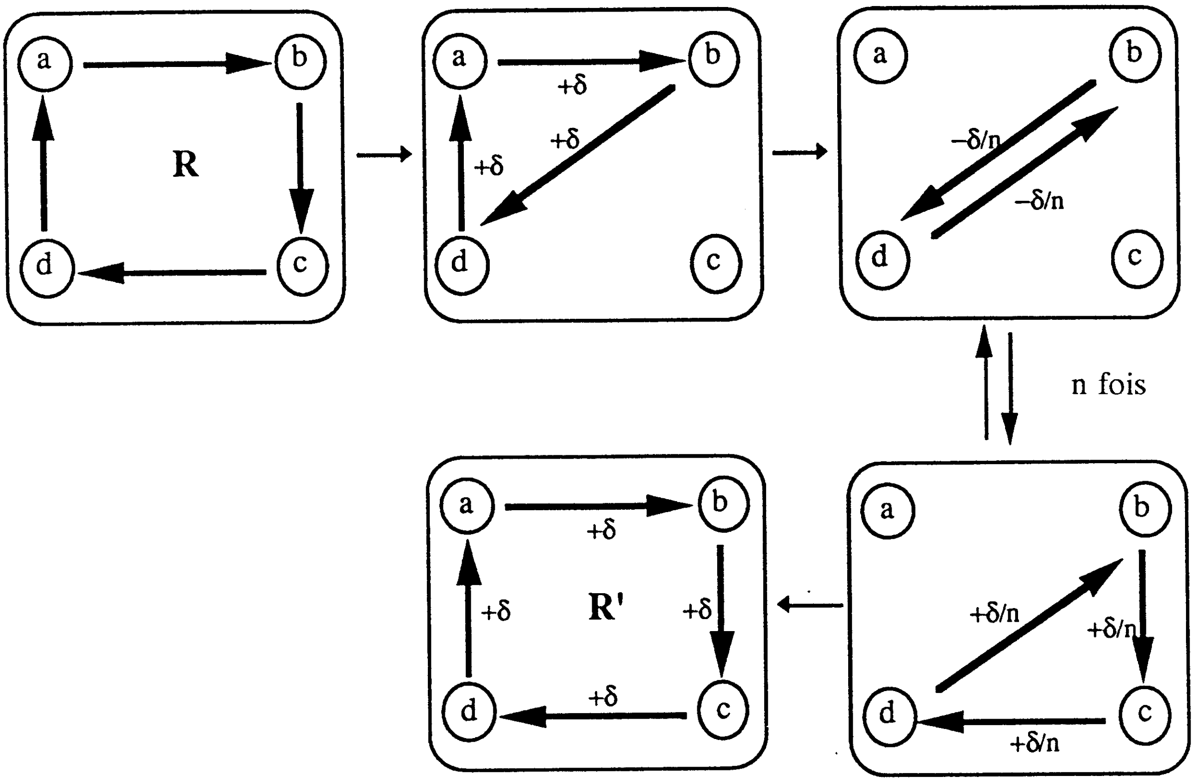


Figure 1

Translation sur un 4-circuit via un nombre de translations sur des 2 ou 3-circuits.

Lorsque $R(b,d) \leq 1 - \delta$ *et* $R(d,b) > 1 - \delta$, une translation de δ sur le 4-circuit [(a,b),(b,c), (c,d), (d,a)] est obtenue après addition de δ sur le 3-circuit [(a,b), (b,d), (d,a)] et l'accomplissement n fois d'une translation de $-\delta/n$ sur le 2-circuit [(b,d), (d,b)] et d'une translation de δ/n sur le 3-circuit [(b,c), (c,d), (d,b)].

Lemme 2.3. Pour toutes relations valuées R et R', si [R' peut être obtenu à partir de R via une translation admissible sur un cycle élémentaire] alors [R' peut être obtenu à partir de R via un nombre fini de translations admissibles sur des circuits élémentaires]

Démonstration du lemme 2.3.

Considérons un cycle élémentaire du graphe associé à R et supposons que R' a été obtenu à partir de R par addition de δ sur les arcs avants du cycle et par soustraction de δ sur les arcs arrières. Notons respectivement U_F et U_B l'ensemble des arcs avants et arrières (F = forward, B = backward) du cycle. Si $\delta = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $\delta > 0$ (la démonstration est similaire pour $\delta < 0$).

Définissons $\alpha_{max} = Max_{(a,b) \in U_B} v_R(b,a)$.

Si $\alpha_{max} \leq 1 - \delta$ alors l'addition de δ sur le circuit élémentaire obtenu en considérant les arcs de U_F et l'ensemble $\{(b,a) \in U : (a,b) \in U_B\}$ est une translation admissible. A ce moment, la soustraction de δ sur tous les 2-circuits du type ((a,b), (b,a)) avec $(a,b) \in U_B$ constitue des translations admissibles et conduisent à R'.

Si $\alpha_{max} > 1 - \delta$, *définissons* $U_P = \{(a,b) \in U_B : v_R(b,a) > 1 - \delta\}$. .

Pour tout $(a,b) \in U_P$, *nous avons* $v_R(a,b) \geq \delta$ *et* $v_R(b,a) > 0$. . Puisque $\delta > 0$, nous pouvons trouver un entier n suffisamment grand tel que la soustraction de δ / n sur tous les 2-circuits ((a,b), (b,a)) avec (a,b) $\in U_P$ constitue des translations admissibles. Dès lors l'addition de δ / n sur le circuit obtenu en considérant les arcs de U_F et les arcs (b,a) si (a,b) est dans U_B, est une translation admissible.

Il est facile de voir qu'il est possible de répéter n fois ces opérations. Nous obtenons dès lors

R' après avoir soustrait δ sur les 2-circuits ((a,b), (b,a)) avec (a,b) $\in U_B \backslash U_P$, toutes ces translations étant admissibles par construction (voir figure 2).

Ceci termine la démonstration du lemme 2.3., parce que si A est fini, il en va de même pour la longueur maximum d'un cycle élémentaire. □

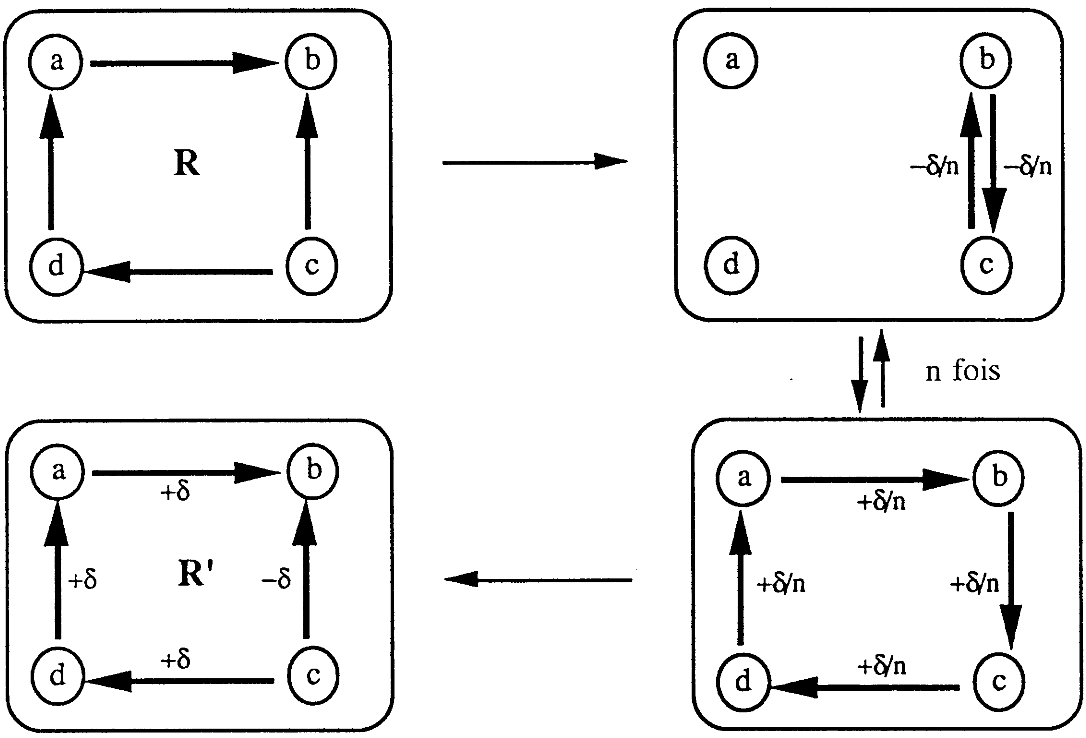


Figure 2

Translation sur un cycle via un nombre de translations sur des circuits.

Lorsque $R(b,c) > 1 - \delta$, une translation de δ sur le cycle [(a,b), (c,b), (c,d), (d,a)] est obtenue après l'accomplissement n fois d'une translation de $-\delta/n$ sur le 2-circuit [(b,c), (c,b)] et une translation de δ/n sur le 4-circuit [(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)].

Lemme 2.4. Pour toutes relations valuées R et R' sur A, [$S_{NF}(c,R) = S_{NF}(c,R')$ pour tout c appartenant à A] $\Leftrightarrow$ [R' peut être obtenu à partir de R via un nombre fini de translations admissibles sur des cycles élémentaires]

Démonstration du lemme 2.4.

La partie $\Leftarrow$ est évidente. Afin de démontrer la partie $\Rightarrow$, supposons que nous ayons deux relations R et R' pour lesquelles $S_{NF}(c,R) = S_{NF}(c,R')$ pour tout c $\in$ A. Si R = R', le lemme est démontré. Si R $\neq$ R' alors il existe a, b $\in$ A avec a $\neq$ b tels que R(a,b) $\neq$ R'(a,b) et nous supposerons que R(a,b)>R'(a,b), l'autre cas étant symétrique. Dès lors, il existe c,d $\in$ A\{a} tels que :

R(c,a)>R'(c,a) ou R(a,d)<R'(a,d) parce qu'autrement

$$R(c,a) \leq R'(c,a),\ R(a,d) \geq R'(a,d) \text{ pour tout } c,d \in A \setminus \{a,b\},$$

$$R(a,b) > R'(a,b) \text{ et } R(b,a) \leq R'(b,a) \text{ contredirait } S_{NF}(a,R) = S_{NF}(a,R').$$

Dans l'un ou l'autre cas, nous pouvons répéter le même argument et, puisque le nombre d'actions est fini, ce procédé conduira à un cycle élémentaire dans le graphe associé à R. Soit Δ le minimum sur les arcs (a,b) du cycle de $|R(a,b) - R'(a,b)|$. Il est facile de vérifier que l'addition de Δ sur les arcs du cycle tels que R(x,y)<R'(x,y) et la soustraction de Δ sur les arcs du cycle tels que R(x,y)>R'(x,y) est une translation admissible sur le cycle. Nous obtenons ainsi une relation valuée R_1. Si R_1 = R', le lemme est démontré. Sinon, nous pouvons répéter le même argument en commençant avec R_1 au lieu de R. Puisque A est fini, il n'y a qu'un nombre fini d'arcs tels que R(x,y) $\neq$ R'(x,y). Comme à chaque étape le nombre d'arcs sur lesquels la relation courante et R' sont différents est décroissant d'au moins une unité, ce procédé s'achèvera après un nombre fini d'étapes, ce qui termine la démonstration du lemme 2.4. □

Démonstration du théorème 2.1.

Tout ce que nous avons à démontrer est que si $\geq$ est neutre, strictement monotone et indépendant des translations sur les circuits alors

$[a \geq (R) b \Leftrightarrow S_{NF}(a,R) \geq S_{NF}(b,R)]$, *c'est-à-dire*

$S_{NF}(a,R) = S_{NF}(b,R) \Rightarrow a=(R)b$ et (3)

$S_{NF}(a,R) > S_{NF}(b,R) \Rightarrow a>(R)b.$ (4)

Supposons d'abord que $S_{NF}(a,R) = S_{NF}(b,R)$ pour deux actions a et b. Comme la relation $\geq(R)$ est complète, nous avons soit $a \geq (R) b$, *soit* $b \geq (R) a$. *Si* $a \geq (R) b$, appelons v la permutation de A qui transpose a et b. On vérifie aisément que $S_{NF}(c,R) = S_{NF}(c,R^v)$ pour tout $c \in A$. Vu le lemme 2.4., nous savons que R^v peut être obtenu à partir de R via un nombre fini de translations admissibles sur des cycles élémentaires. En combinant les lemmes 2.2. et 2.3. nous concluons que R^v peut être obtenu à partir de R via un nombre fini de translations admissibles sur des circuits élémentaires de longueur 2 ou 3. Dès lors, en utilisant l'indépendante des translations sur les circuits, nous obtenons $\geq(R) = \geq(R^v)$ si bien que

$a \geq (R^v) b$. Cela étant, la neutralité implique $b \geq (R) a$, ce qui établit (3).

Supposons maintenant que $S_{NF}(a,R) > S_{NF}(b,R)$ pour deux actions a et b, et soit $d(R) = S_{NF}(a,R) - S_{NF}(b,R)$. Puisque :

$$d(R) = \sum_{c \in A \setminus \{a\}} R(a,c) - \sum_{c \in A \setminus \{a\}} R(c,a) - \sum_{d \in A \setminus \{b\}} R(b,d) + \sum_{d \in A \setminus \{b\}} R(d,b),$$

on ne peut avoir $[R(a,c) = 0, R(c,a) = 1 \ \forall c \in A \setminus \{a\}$ et $R(b,d) = 1, R(d,b) = 0$

$\forall d \in A \setminus \{b\}]$ car cela entraînerait $d(R) = -2(|A| - 1) < 0$.

Il est donc possible de construire une relation valuée R^* identique à R sauf sur des couples du type (a,c), (c,a) avec $c \in A \setminus \{a\}$, (b,d), (d,b) avec $d \in A \setminus \{b\}$, telle que $d(R^*) = 0$. Il suffit en effet de diminuer lorsque c'est possible des valuations parmi R(a,c) et R(d,b) et/ou augmenter des valuations parmi R(c,a) et R(b,d) jusqu'à obtention d'une relation valuée R^* sur A qui puisse assurer $d(R^*) = 0$[5]. Cela étant, par (3), on a $a=(R^*)b$ et des applications répétées de la stricte monotonie conduisent à a>(R)b. Ceci termine la démonstration du théorème 2.1.

□

2.4. **Un exemple**

Illustrons la méthode du flot net par un exemple numérique simple. Soient A = {a,b,c,d} et une relation valuée R sur A donnée par la matrice :

	a	b	c	d	Σ^+
a		.7	.9	1	2.6
b	.2		.4	.3	.9
c	.4	.8		.8	2
d	1	.6	.6		2.2
Σ^-	1.6	2.1	1.9	2.1	

Utilisons la méthode du flot net pour ranger les éléments de A. Les scores sont :

$S_{NF}(a,R) = 2.6 - 1.6 = 1$

$S_{NF}(b,R) = .9 - 2.1 = -1.2$

$S_{NF}(c,R) = 2 - 1.9 = .1$

$S_{NF}(d,R) = 2.2 - 2.1 = .1$

Nous obtenons donc le classement : a > (c ~ d) > b.

---

[5] Ceci est effectivement possible. Pour le voir, il suffit de se rappeler un théorème bien connu d'analyse : "Toute fonction réelle, continue dans un connexe de $\mathbb{R}^n$ y prend toute valeur comprise entre deux quelconques de ses valeurs."

3. UNE CARACTERISATION DE LA METHODE DU RAPPORT DES PRODUITS

3.1. Introduction

Nous présentons dans cette section une caractérisation axiomatique de la méthode de rangement basée sur le score suivant :

$$S_{RP}(a,R) = \prod_{c \in A \setminus \{a\}} (R(a,c) / R(c,a)) \tag{1}$$

Le rangement des actions se ramène au rangement des scores, c'est-à-dire :

$$a \geq_{RP}(R) b \quad ssi \quad S_{RP}(a,R) \geq S_{RP}(b,R). \tag{2}$$

Nous appellerons la méthode définie par (1) et (2) la méthode du *Rapport des Produits* (RP). Pour assurer l'existence des scores, nous ferons l'hypothèse suivante :

$$R(x,y) > 0 \quad \forall\, x,y \in A,\ x \neq y. \tag{3}$$

La caractérisation que nous allons présenter est très voisine de celle que nous avons vue concernant la méthode du flot net (voir section 2). Il suffit en effet de remplacer dans l'énoncé du théorème 2.1. le mot "translations" par "homothéties" et nous obtenons une caractérisation axiomatique de la méthode du rapport des produits.

3.2. Propriétés et résultats

Il est clair que la méthode du rapport des produits est neutre, strictement monotone et indépendante des homothéties sur les circuits[6]. En outre, ces trois propriétés sont indépendantes. Le résultat principal s'énonce alors comme suit :

[6] Vu la condition (3), nous dirons qu'une homothétie est admissible si les valuations transformées sont dans]0,1].

Théorème 3.1. La méthode du rapport des produits est la seule méthode de rangement qui est neutre, strictement monotone et indépendante des homothéties sur les circuits.

Pour démontrer ce théorème, nous allons reprendre le schéma qui a été utilisé pour caractériser la méthode du flot net. Les démonstrations seront toutefois un peu plus simple dans cette section.

Lemme 3.2. Pour toutes relations valuées R et R', si [R' peut être obtenu à partir de R via une homothétie admissible sur un circuit élémentaire] alors [R' peut être obtenu à partir de R via un nombre fini d'homothéties admissibles sur des circuits élémentaires de longueur 2 ou 3].

Démonstration du lemme 3.2.
La preuve se fait par induction sur la longueur q du circuit élémentaire. Si q = 2 ou 3, alors le lemme est démontré. Supposons maintenant que le lemme soit vrai pour tout $q \leq k$ *avec* $k \geq 3$ et montrons qu'il est encore vrai pour q = k + 1. Considérons un circuit élémentaire de longueur k + 1 :
$u_1 = (a_1,a_2)$, $u_2 = (a_2,a_3)$, ..., $u_k = (a_k,a_{k+1})$, $u_{k+1} = (a_{k+1},a_1)$, et supposons que R' a été obtenu à partir de R par multiplication par θ sur les arcs de ce circuit. Si $\theta = 1$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, définissons $r = (a_1, a_k)$ et $s = (a_k, a_1)$.

Si $\theta>1$, alors la division par θ sur le 2-circuit (r,s) est une homothétie admissible. A ce moment, nous avons deux circuits $(u_1,u_2,...,u_{k-1},s)$ et (u_k,u_{k+1},r) de longueur respective k et 3 sur lesquels la multiplication par θ est une homothétie admissible. Nous obtenons ainsi R'.

Si $\theta<1$, alors la multiplication par θ sur les circuits $(u_1,u_2,...,u_{k-1},s)$ et (u_k,u_{k+1},r) constitue des homothéties admissibles. Ensuite, la division par θ sur le 2-circuit (r,s) est une homothétie admissible. Nous obtenons ainsi R'.

Ceci termine la démonstration du lemme 3.2, parce que si A est fini, il en va de même pour la longueur maximum d'un circuit élémentaire. □

Lemme 3.3. Pour toutes relations valuées R et R', si [R' peut être obtenu à partir de R via une homothétie admissible sur un cycle élémentaire] alors [R' peut être obtenu à partir de R via un nombre fini d'homothéties admissibles sur des circuits élémentaires].

Démonstration du lemme 3.3.

Considérons un cycle élémentaire du graphe associé à R et supposons que R' a été obtenu à partir de R par multiplication par θ sur les arcs avants du cycle et par division par θ sur les arcs arrières. Notons respectivement U_F et U_B l'ensemble des arcs avants et arrières du cycle. Si $\theta = 1$, il n'y a rien a démontrer.

Si $\theta>1$ alors la division par θ sur tous les 2-circuits du type ((a,b), (b,a)) avec (a,b) $\in U_B$ constitue des homothéties admissibles. A ce moment, la multiplication par θ sur le circuit élémentaire obtenu en considérant les arcs de U_F et l'ensemble $\{(b,a) \in U : (a,b) \in U_B\}$ est une homothétie admissible et conduit à R'.

Si $\theta<1$, il suffit d'inverser les deux opérations décrites dans le cas précédent et on arrive à R'.

Ceci termine la démonstration du lemme 3.3. parce que si A est fini, il en va de même pour la longueur maximum d'un cycle élémentaire. □

Lemme 3.4. Pour toutes relations valuées R et R' sur A, [$S_{RP}(c,R) = S_{RP}(c,R')$ pour tout c appartenant à A] $\Leftrightarrow$ [R' peut être obtenu à partir de R via un nombre fini d'homothéties admissibles sur des cycles élémentaires].

Démonstration du lemme 3.4.

La partie $\Leftarrow$ est évidente. En effet, on voit aisément qu'une homothétie admissible sur un cycle élémentaire n'altère en rien le score d'aucune action lorsque les scores sont définis par (1). La partie $\Rightarrow$ est identique à celle du lemme 2.4. (voir section 2), excepté qu'il faut remplacer les mots "addition", "soustraction", "translation" respectivement par "multiplication", "division" et "homothétie", le score S_{NF} par S_{RP}, l'expression $|R(a,b) - R'(a,b)|$ par $\max(R(a,b)/R'(a,b),\ R'(a,b)/R(a,b))$, et enfin le symbole Δ par Θ. □

Démonstration du théorème 3.1.

Tout ce que nous avons à démontrer est que si $\geq$ est neutre, strictement monotone et indépendant des homothéties sur les circuits alors

$$a \geq (R) b \leftrightarrow S_{RP}(a,R) \geq S_{RP}(b,R), \text{ c'est-à-dire}$$

$S_{RP}(a,R) = S_{RP}(b,R) \Rightarrow a=(R)b$ et (4)

$S_{RP}(a,R) > S_{RP}(b,R) \Rightarrow a>(R)b$ (5)

La démonstration de (4) est identique à celle qui a été proposée dans la section 2, excepté qu'il faut évidemment remplacer le mot "translations" par "homothéties" et le score S_{NF} par S_{RP}. Il faut également modifier les numéros des lemmes qui sont utilisés.

Démontrons (5). Supposons que $S_{RP}(a,R) > S_{RP}(b,R)$ pour deux actions a et b, et soit $d(R)= S_{RP}(a,R) - S_{RP}(b,R)$, c'est-à-dire :

$$d(R) = \prod_{c \in A \setminus \{a\}} (R(a,c)/R(c,a)) - \prod_{d \in A \setminus \{b\}} (R(b,d)/R(d,b))$$

Il est alors possible de construire une relation valuée R^* identique à R sauf sur des couples du type (a,c) avec $c \in A\setminus\{a\}$ et (d,b) avec $d \in A\setminus\{b\}$, telle que $d(R^*) = 0$. Il suffit en effet de diminuer des valuations parmi R(a,c) et R(d,b) jusqu'à obtention d'une relation valuée R^* sur A qui puisse assurer $d(R^*) = 0$. Cela étant, par (4), on a $a=(R^*)b$ et des applications répétées de la stricte monotonie conduisent à $a>(R)b$. Ceci termine la démonstration du théorème 3.1. □

3.3. **Un exemple**

Reprenons l'exemple qui a été traité dans la section 2. Les scores se calculent aisément :

$S_{RP}(a,R) = .63/.08 = 7.875$

$S_{RP}(b,R) = .024/.336 = .071$

$S_{RP}(c,R) = .256/.216 = 1.185$

$S_{RP}(d,R) = .36/.24 = 1.5$

Le classement est donc : a > d > c > b.

4. LA METHODE DE COPELAND

4.1 Méthode de la majorité par paires de Condorcet

La méthode décrite par le marquis de Condorcet en 1785 est la suivante :

$$a \geq_C (R) b \quad ssi \quad R(a,b) \geq R(b,a)$$

Elle prend tout son sens si R(a,b) est interprété comme le pourcentage de votants déclarant que a est préféré ou indifférent à b. En effet, a sera classé avant b s'il détient le plus grand nombre de suffrages. Si le nombre de suffrages en faveur de a et de b est égal, il y a ballottage. Il s'agit donc d'une règle à la majorité (simple) par paires. Si R est une relation probabiliste (R(a,b) + R(b,a) = 1) alors on a :

$$a \geq_C (R) b \quad ssi \quad R(a,b) \geq .5$$

Il est bien connu que la méthode de Condorcet peut conduire à de l'intransitivité. Pour le voir, considérons par exemple le scrutin suivant relatif à 3 candidats (a,b,c) :

23 votants classent	a > b > c
17	b > c > a
2	b > a > c
10	c > a > b
8	c > b > a

La matrice de surclassement s'écrit (les valeurs sont multipliées par 60)

	a	b	c
a		33	25
b	27		42
c	35	18	

La conclusion tombe : b > c, c > a, a > b.

4.2 Méthode de Condorcet modifiée par Copeland

Copeland propose en 1951 une modification de la méthode de Condorcet qui fournit un rangement. Pour chaque action a, on détermine le score :

$$S_{CP}(a,R) = |\{c \in A\backslash\{a\} : a \geq_C(R) c\}| - |\{c \in A\backslash\{a\} : c \geq_C(R) a\}|$$

c'est-à-dire

$$S_{CP}(a,R) = \sum_{c \in A\backslash\{a\}} sign[R(a,c) - R(c,a)] \tag{1}$$

où sign x = - 1 si x < 0

0 si x = 0

1 si x > 0

Le préordre total est alors obtenu à partir des scores :

$$a \geq_{CP}(R) b \quad ssi \quad S_{CP}(a,R) \geq S_{CP}(b,R)$$

Reprenons l'exemple précédent. On obtient, par la méthode de Copeland : a ~ b ~ c. La méthode du flot net, quant à elle, fournirait le rangement : b > a > c. Il y a cependant une ressemblance entre ces deux méthodes. Si la relation $\geq_C(R)$ est assimilée à une relation valuée ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1, alors on a visiblement $S_{CP}(a,R) = S_{NF}(a, \geq_C(R))$ pour toute relation valuée R sur A et tout a $\in$ A.

La méthode de Copeland est indépendante des translations et des homothéties en marguerite. En effet, une translation ou une homothétie admissible en marguerite sur une action quelconque n'altère en rien le score d'aucune action, lorsque les scores sont définis par (1). Plus généralement, nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.1. Pour toute relation valuée R sur A et tout a appartenant à A, [le score S(a,R), fonction uniquement des valuations sur les arcs du type (a,c) et (c,a), c appartenant à $A\backslash\{a\}$, est indépendant des translations et des homothéties admissibles en marguerite] $\Leftrightarrow$ [il existe une fonction réelle f définie sur $\{-1, 0, 1\}^{n-1}$, $n = |A|$,
telle que $S(a,R) = f\,(\text{sign}[R(a,c_1) - R(c_1,a)],...,\text{sign}[R(a,c_{n-1}) - R(c_{n-1},a)])$
où $\{c_1, ..., c_{n-1}\} = A\backslash\{a\}$].

Démonstration du théorème 4.1.

La partie $\Leftarrow$ est évidente. Démontrons la partie $\Rightarrow$. Considérons une relation valuée R sur A et une action $a \in A$. Par hypothèse, il existe une fonction réelle g définie sur $[0, 1]^{2(n-1)}$ telle que : $S(a,R) = g\,(R(a,c_1), R(c_1,a),...,R(a,c_{n-1}), R(c_{n-1}, a))$.

Exprimons que S(a,R) ne dépend pas des translations admissibles en marguerite.

Posons $x_i=R(a,c_i)$ et $y_i=R(c_i,a)$ pour tout $i \in \{1,...,n-1\}$

Translations sur a :

$$g(x_1 + \delta, y_1 + \delta,...,x_{n-1} + \delta, y_{n-1} + \delta) = g(x_1,y_1,...,x_{n-1},y_{n-1}) \qquad \text{(i)}$$

avec $x_i + \delta, y_i + \delta \in [0,1]$ *pour tout* $i \in \{1,...,n-1\}$

Translations sur c_j, $j \in \{1, ..., n-1\}$:

$$g(x_1, y_1, ..., x_j + \delta, y_j + \delta, ..., x_{n-1}, y_{n-1}) = g(x_1, y_1, ..., x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad \text{(ii)}$$

avec $x_j + \delta, y_j + \delta \in [0,1]$.

Notons que (ii) implique (i).

Fixons $j \in \{1,...,n-1\}$. La condition (ii) signifie que pour tout point $\lambda = (x_1,y_1,...,x_{n-1},y_{n-1})$ de $[0,1]^{2(n-1)}$, la fonction g est constante sur l'ensemble

$E_{\lambda,j} = \{(x_1,y_1,...,x_j + \delta, y_j + \delta, ...,x_{n-1},y_{n-1}) : x_j + \delta, y_j + \delta \in [0,1]\}$

Les points de $E_{\lambda,j}$ ont pour coordonnées

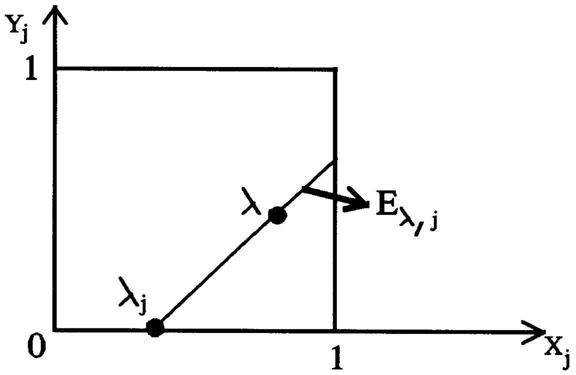
$X_1 = x_1$, $Y_1 = y_1$,...,$X_j = x_j + \delta$, $Y_j = y_j + \delta$,...,$X_{n-1} = x_{n-1}$, $Y_{n-1} = y_{n-1}$ avec X_j, $Y_j \in [0,1]$.

En éliminant le paramètre δ entre les équations $X_j = x_j + \delta$ et $Y_j = y_j + \delta$, on trouve

$Y_j - y_j = X_j - x_j$.
Soit alors λ_j le point de $E_{\lambda,j}$ dont les coordonnées sont
$X_1 = x_1, Y_1 = y_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, Y_{n-1} = y_{n-1}$,
excepté que

$$(X_j, Y_j) = \begin{cases} (0, y_j - x_j) \text{ si } y_j - x_j \in [0,1] \\ (x_j - y_j, 0) \text{ si } x_j - y_j \in [0,1] \end{cases}$$

Nous avons donc $g(\lambda) = g(\lambda_j)$.



En utilisant ce dernier résultat pour j = 1,2,...,n-1, il vient au total :
$g(x_1,y_1,...,x_{n-1},y_{n-1}) = h(x_1-y_1,...,x_{n-1}-y_{n-1})$
où h est une fonction réelle définie sur $[-1, 1]^{n-1}$.

Exprimons maintenant que S(a,R) ne dépend pas des homothéties admissibles en marguerite.

Pour tout $j \in \{1,...,n-1\}$, on a, en posant $z_j = x_j - y_j$,

$$h(z_1,...,\theta z_j,...,z_{n-1}) = h(z_1,...,z_j,...,z_{n-1})$$

avec $\theta z_j \in [-1,1]$, $\theta \in]0, +\infty[$.

Dès lors, la fonction h ne dépend donc pas de la valeur de sa j-ième variable, mais uniquement de son signe.

Dans ces conditions, on a

$h(z_1,...,z_{n-1}) = f(\text{sign } z_1,...,\text{sign } z_{n-1})$

où f est une fonction réelle définie sur $\{-1,0,1\}^{n-1}$.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.1. □

5. UNE CARACTERISATION DE LA METHODE DU MINIMUM SORTANT

5.1. Introduction

Nous présentons dans cette section une caractérisation axiomatique de la méthode de rangement basée sur le score suivant :

$$S_{\min}(a,R) = \min_{c \in A \setminus \{a\}} R(a,c) \tag{1}$$

Le rangement des actions s'effectue selon la règle habituelle :

$$a \geq_{\min}(R) b \quad ssi \quad S_{\min}(a,R) \geq S_{\min}(b,R) \tag{2}$$

Nous appellerons la procédure définie par (1) et (2) la procédure du *minimum sortant.* La caractérisation est due à PIRLOT (1991). Introduisons également trois autres procédures.

i) La procédure du minimum lexicographique

Notons $R(a,1), R(a,2),\ldots,R(a,|A|-1)$ les valeurs distinctes ou non prises par $R(a,c)$, $c \in A\setminus\{a\}$, rangées dans l'ordre croissant. La procédure du minimum lexicographique, notée $\geq_{ml}$ est définie par :

$a >_{ml}(R)b$ ssi $R(a,1) > R(b,1)$
ou $R(a,1) = R(b,1)$
et $R(a,2) > R(b,2)$
ou ...

c'est-à-dire ssi il existe j, $1 \leq j \leq |A|-1$ tel que

pour tout $i < j$, $R(a,i) = R(b,i)$
et, $R(a,j) > R(b,j)$

$a =_{ml}(R)b$ ssi $R(a,i) = R(b,i)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,|A|-1\}$.

ii) **La procédure de l'indifférence**

La procédure de l'indifférence, notée $\geq_I$ est définie par :

$$a =_I (R) b \text{ pour tout } a,b \in A,\ a \neq b,$$

et pour toute relation valuée R sur A. Bien sûr, son intérêt n'est que théorique.
Remarque : on a toujours $P_I(R) = \emptyset$.

iii) **La procédure du produit sortant**

La procédure du produit sortant est basée sur le score :

$$S_{\Pi^+}(a,R) = \prod_{c \in A \setminus \{a\}} R(a,c)$$

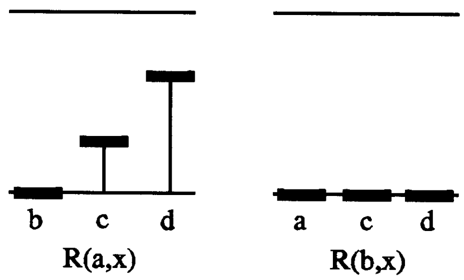
c'est-à-dire :

$$a \geq_{\Pi^+}(R) b \quad ssi \quad S_{\Pi^+}(a,R) \geq S_{\Pi^+}(b,R)$$

5.2. **Propriétés**

La procédure $\geq_{\min}$ est monotone, indépendante des translations sur une paire d'actions et vérifie les deux axiomes de renversement des préférences. Les procédures $\geq_{ml}$ et $\geq_I$ sont monotones et indépendantes des translations sur une paire d'actions. La procédure $\geq_I$ vérifie l'axiome de renversement faible, mais pas l'axiome de renversement strict. La procédure $\geq_{ml}$ vérifie l'axiome de renversement strict mais pas l'axiome de renversement faible.

Seul le dernier point nécessite justification. La procédure $\geq_{ml}$ ne vérifie pas l'axiome de renversement faible des préférences. En effet, soit A = {a,b,c,d} et supposons que R(a,x) et R(b,x) soient donnés par les schémas suivants (représentations au moyen de curseurs) :



On $a >_{ml} (R) b$.
En considérant R' identique à R, sauf sur (a,c) où R'(a,c) = 0, on devrait renverser (non strictement) la préférence, c'est-à-dire avoir $b \geq_{ml} (R') a$. Or on continue à avoir $a >_{ml} (R') b$.

La procédure $\geq_{\Pi^+}$ est monotone, vérifie les deux axiomes de renversement des préférences, mais n'est pas indépendante des translations sur une paire d'actions.
Justifions encore le dernier point. Soient A = {a,b,c} et la relation valuée R sur A donnée par la matrice

	a	b	c	Π^+
a		.3	.3	.09
b	.8		.1	.08
c	.1	.6		.06

On a $a >_{\Pi^+}(R) b$.

Considérons la relation valuée $R' = t_{.2,a,b}(R)$. On a $S_{\Pi+}(a,R') = .25$ et $S_{\Pi+}(b,R') = .30$, c'est-à-dire $b >_{\Pi+}(R')a$.

5.3. **Résultats**

Annonçons dès maintenant le résultat principal :

> **Théorème 5.1.** La procédure du minimum sortant est la seul méthode de rangement qui est monotone, indépendante des translations sur une paire d'actions et qui vérifie les deux axiomes de renversement des préférences.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons établir quelques résultats.

> **Lemme 5.2.** Si > vérifie l'axiome de renversement faible des préférences et $a>(R)b$, alors $S_{min}(a,R) \neq 0$.

Démonstration du lemme 5.2.

On procède par l'absurde. Si $a>(R)b$, on a en particulier $a \geq (R) b$. Soit $c \in A\backslash\{a\}$ tel que $S_{min}(a,R) = R(a,c) = 0$. Si l'axiome de renversement faible est valide, on peut faire en sorte que $b \geq (R') a$ avec R' identique à R sauf sur (a,c) où $R'(a,c) \leq R(a,c)$. Comme $R(a,c) = 0$, on a $R' = R$ et donc $b \geq (R) a$, ce qui contredit l'hypothèse. □

> **Proposition 5.3.** Si $\geq$ est indépendant des translations sur une paire d'actions et satisfait l'axiome de renversement faible des préférences, alors $[aI_{min}(R)b \Rightarrow aI(R)b]$.

Démonstration de la proposition 5.3.

Supposons que $S_{min}(a,R) = S_{min}(b,R) = \delta$. Soit R' = $t_{-\delta,a,b}(R)$. On a $S_{min}(a,R') = S_{min}(b,R')$ = 0. Si on avait a>(R)b (ou b>(R)a) on aurait a>(R')b (ou b>(R')a), ce qui est en contradiction avec le lemme 5.2.

Comme la relation $\geq(R)$ est complète, on a donc a=(R)b.

> **Proposition 5.4.** Si $\geq$ est monotone, indépendant des translations sur une paire d'actions et vérifie l'axiome de renversement faible des préférences, alors [aP(R)b $\Rightarrow$ aP_{min}(R)b].

Démonstration de la proposition 5.4.
On ne peut en effet avoir aI_{min}(R)b car alors aI(R)b, en vertu de la proposition 5.3.. Supposons donc avoir bP_{min}(R)a, c'est-à-dire $S_{min}(b,R)>S_{min}(a,R)$. Soit alors d $\in$ A\{b} tel que R(b,d) = $S_{min}(b,R)$ et soit R' identique à R sauf sur (b,d) où R'(b,d) = $S_{min}(a,R)$. Vu la propriété de monotonie, on a aP(R')b. Or $S_{min}(b,R') = S_{min}(a,R')$, c'est-à-dire a$I_{min}$(R')b. Ce qui contredit la proposition 5.3. □

> **Proposition 5.5** Si $\geq$ est monotone, indépendant des translations sur une paire d'actions et satisfait l'axiome de renversement strict des préférences alors [aP_{min}(R)b $\Rightarrow$ aP(R)b].

Démonstration de la proposition 5.5.

Supposons, a contrario, $b\geq(R)a$.

Soit d = $S_{min}(a,R) - S_{min}(b,R) > 0$ et notons c^* un élément quelconque de A\{b}
tel que $R(b,c^*) = S_{min}(b,R)$.

a) Modifions R en R' en changeant seulement les valuations des arcs (b,c) inférieures à $S_{min}(a,R)$:

$$R'(b,c) = \max [S_{min}(a,R), R(b,c)] \ \forall c \in A\backslash\{b\}.$$

Sur les autres arcs : R' = R.

En particulier, $R'(b,c^*) = R(b,c^*) + d = S_{min}(a,R)$ et $S_{min}(b,R') = S_{min}(a,R')$.

Par la propriété de monotonie, on a $b \geq (R')a$.

b) On applique à R' une translation admissible sur {a,b}. Soit $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut et soit $\delta = S_{min}(b,R') - \varepsilon$. On définit $R'' = t_{-\delta,a,b}(R')$, de sorte que

$$R''(a,c) = R'(a,c) - \delta \quad \forall c \in A\backslash\{a\},$$

et $$R''(b,c) = R'(b,c) - \delta \quad \forall c \in A\backslash\{b\}.$$

On a $S_{min}(a,R'') = S_{min}(b,R'') = \varepsilon$,

et par l'indépendance vis-à-vis des translations sur {a,b} : $b \geq (R'')a$.

c) Définissons R''^* à partir de R'' en annulant la valeur de $R''(b,c^*)$:

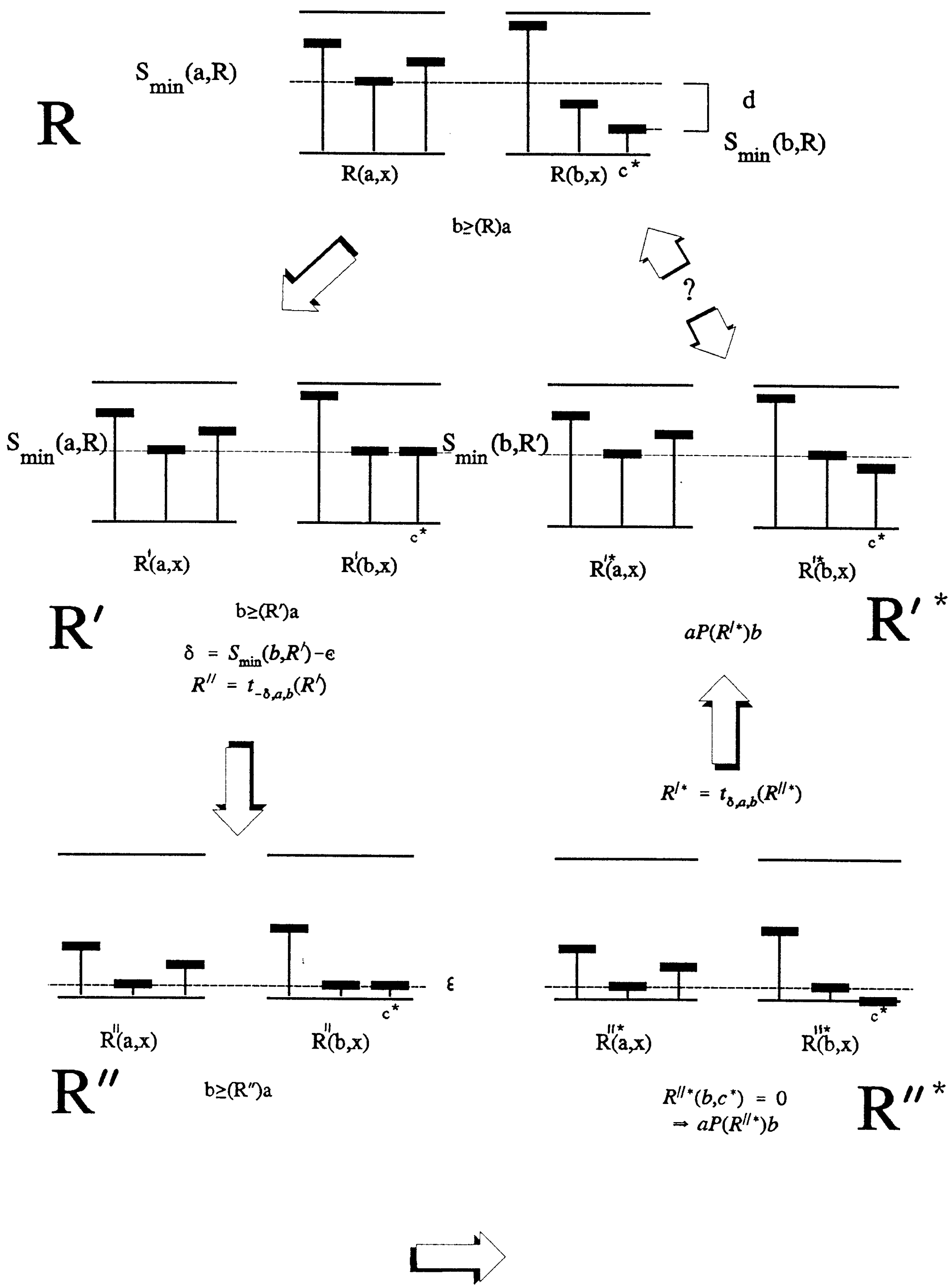
$$R''^*(b,c^*) = R''(b,c^*) - \varepsilon$$

et $R''^* = R''$ sur tous les autres arcs.

Par l'axiome de renversement strict, la préférence s'est renversée et on a $aP(R''^*)b$.

Film de la démonstration de la proposition 5.5.

Supposons b≥(R)a.



d) Appliquons à R''^*, la translation $t_{\delta,a,b}$ inverse de celle appliquée au b). On définit ainsi

$R'^* = t_{\delta,a,b}(R''^*)$, c'est-à-dire :

$$R'^*(a,c) = R''^*(a,c) + \delta \ \forall c \in A\backslash\{a\},$$

$$R'^*(b,c) = R''^*(b,c) + \delta \ \forall c \in A\backslash\{b\}.$$

Par l'indépendance vis-à-vis des translations sur $\{a,b\}$: $aP(R'^*)b$.

Cela étant, R'^* ne diffère de R' que sur l'arc (b,c^*) :

$$R'^*(b,c^*) = R'(b,c^*) - \varepsilon.$$

Si ε est suffisamment petit, on a

$$R(b,c^*) < R'^*(b,c^*)$$

et $$R(b,c) \leq R'^*(b,c) \ \forall c \in A\backslash\{b\},$$

et pourtant $b \geq (R) a$ et $aP(R'^*)b$, en contradiction avec l'hypothèse de monotonie. □

Corollaire 5.6. Si $\geq$ est monotone, indépendant des translations sur une paire d'actions et satisfait l'axiome de renversement strict des préférences, alors $[aI(R)b \Rightarrow aI_{min}(R)b]$. □

En combinant les résultats 5.3., 5.4., 5.5. et 5.6., nous obtenons la caractérisation annoncée par le théorème 5.1.

5.4. La méthode du maximum entrant

En s'inspirant de la caractérisation que nous venons de présenter, nous avons pu mettre en évidence une caractérisation de la méthode de maximum entrant. Cette dernière méthode, notée $\geq_{\mathbf{max},-}$, utilise le score

$$S_{\max,-}(a,R) = -\max_{c \in A\setminus\{a\}} R(c,a).$$

Dégageons tout d'abord les propriétés auxquelles on s'attend. Comme la procédure $\geq_{\min}$, la procédure $\geq_{\max,-}$ est monotone. Ensuite, pour être vérifiés, l'indépendance vis-à-vis des translations sur une paire d'actions et les deux axiomes de renversement des préférences doivent cependant être légèrement modifiés, puisqu'ils ont été définis uniquement à partir des arcs sortants. Il est toutefois très facile de les convertir en les définissant sur les arcs entrants. Nous introduisons ainsi de nouveaux axiomes. Pour les distinguer de leurs frères jumeaux, nous pouvons leur attribuer le préfixe "E" pour "entrants" (entering), quitte à donner aux autres le préfixe "L" pour "sortants" (leaving) :

i) Une E-translation sur une paire d'actions {a,b} consiste en l'addition d'une même quantité δ positive ou négative sur les valuations de tous les arcs entrant en a et en b.

Une méthode de rangement est dite *indépendante des E-translations sur une paire d'actions* si et seulement si pour toutes relations valuées R et R' sur A, et tout a,b $\in$ A, [R' peut être obtenu à partir de R via une E-translation admissible sur

{a,b}] $\Rightarrow$ [$a \geq(R) b \Leftrightarrow a \geq(R') b$ *et* $b \geq(R) a \Leftrightarrow b \geq(R') a$].

ii) Une procédure de rangement vérifie *l'axiome de E-renversement faible des préférences* lorsque

si $a \geq(R) b$

alors [pour tout c $\in$ A\{a}, il existe une relation valuée R' identique à R, excepté que $R'(c,a) \geq R(c,a)$, *telle que* $b \geq(R') a$].

Elle vérifie *l'axiome de E-renversement strict des préférences* lorsque

si [$a \geq(R) b$ et R(d,b) $\neq$ 1 pour tout d $\in$ A\{b}] alors [pour tout c $\in$ A\{a}, il existe une relation valuée R' identique à R, excepté que $R'(c,a) > R(c,a)$ telle que $b >(R')a$].

Ces nouveaux axiomes étant maintenant installés, nous avons la caractérisation suivante.

Théorème 5.7. La procédure du maximum entrant est la seule méthode de rangement qui est monotone, indépendante des E-translations sur une paire d'actions et qui vérifie les deux axiomes de E-renversement des préférences.

Les résultats préliminaires s'énoncent comme suit (ils se démontrent comme dans le paragraphe précédent) :

1. Si $\geq$ vérifie l'axiome de E-renversement faible des préférences et $a>(R)b$, alors $S_{max,-}(a,R) \neq -1$.

2. Si $\geq$ est indépendant des E-translations sur une paire d'actions et satisfait l'axiome de E-renversement faible des préférences, alors $[aI_{max,-}(R)b \Rightarrow aI(R)b]$.

3. Si $\geq$ est monotone, indépendant des E-translations sur une paire d'actions et vérifie l'axiome de E-renversement faible des préférences, alors $[aP(R)b \Rightarrow aP_{max,-}(R)b]$.

4. Si $\geq$ est monotone, indépendant des E-translations sur une paire d'actions et satisfait l'axiome de E-renversement strict des préférences alors $[aP_{max,-}(R)b \Rightarrow aP(R)b]$.

5. Si $\geq$ est monotone, indépendant des E-translations sur une paire d'actions et satisfait l'axiome de E-renversement strict des préférences, alors $[aI(R)b \Rightarrow aI_{max,-}(R)b]$.

6. UNE DEUXIEME CARACTERISATION DE LA METHODE DU MINIMUM SORTANT

Dans cette section, nous présentons une caractérisation axiomatique de la méthode du minimum sortant distincte de celle décrite dans la section précédente. Elle est due à BOUYSSOU (1992) et s'énonce comme suit :

Théorème 6.1. La méthode du minimum sortant est la seule méthode de rangement qui est neutre, ordinale, continue, monotone sur les lignes et égalitaire sur les lignes.

Il est clair que la procédure du minimum sortant est neutre, ordinale et monotone sur les lignes. De plus, elle est continue car si la suite ($R^i \in R(A)$, i = 1,2,...) converge vers une relation valuée $R \in R(A)$, alors pour tout $a \in A$, la suite ($S_{min}(a,R^i)$, i = 1,2,...) converge (au sens usuel) vers $S_{min}(a,R)$.

La méthode du minimum sortant n'est cependant pas la seule méthode de rangement qui est neutre, ordinale, continue et monotone sur les lignes. Par exemple, c'est aussi le cas pour la méthode du maximum sortant dont la définition est évidente. Il nous faut donc un axiome supplémentaire qui soit plus spécifique à la méthode du minimum sortant. L'axiome d'égalitarisme sur les lignes nous vient alors en aide. La méthode du minimum sortant est clairement égalitaire sur les lignes alors que la méthode du maximum sortant ne l'est pas. Les lemmes qui suivent vont être utilisés dans la démonstration du théorème 6.1.

Lemme 6.2. Si une méthode de rangement $\geq$ est neutre, continue, ordinale et monotone sur les lignes, alors pour toute relation valuée R sur A et tout a,b appartenant à A avec $a \neq b$,
$[R(a,c) = 1$ pour tout c appartenant à $A\backslash\{a\}] \Rightarrow a \geq (R) b$.

Démonstration du lemme 6.2.

Supposons au contraire qu'il existe une méthode de rangement $\geq$ neutre, continue, ordinale et monotone sur les lignes, et deux actions a,b $\in$ A avec a $\neq$ b telles que R(a,c) = 1 pour tout c $\in$ A\{a} et b>(R)a.

Considérons une suite ($\varepsilon_i \in [0,1]$, i = 1,2,...) convergeant vers 0. A cette suite, nous associons une suite de relations valuées ($R^i \in$ R(A), i = 1,2,...) telle que, pour tout c,d $\in$ A, avec c $\neq$ d,

R^i(c,d) = R(c,d) si et seulement si c = a et

R^i(c,d) = max {0,R(c,d) - ε_i} sinon.

La suite ($R^i \in$ R(A), i = 1,2,...) converge vers R et donc, par continuité, nous devons avoir b>(R^j)a pour un R^j de la suite.

Considérons à présent une suite de transformations strictement croissantes (ϕ_i, i = 1,2,...) de [0,1] sur [0,1] telle que $\phi_i(x) = x^i$ pour tout x $\in$ [0,1]. La suite ($\phi_i[R^j] \in$ R(A), i = 1,2,...) converge vers une relation valuée $R^* \in$ R(A) telle que, pour tout c,d $\in$ A avec c $\neq$ d, R^*(c,d) = 1 si et seulement si c = a et R^*(c,d) = 0 sinon. L'ordinalité implique b>($\phi_i[R^j]$)a pour tout $\phi_i[R^j]$ de la suite et la continuité conduit à ***b≥(R*)a.***

Considérons enfin une relation valuée <u>R</u> telle que <u>R</u>(c,d) = 0 pour tout c,d $\in$ A avec c $\neq$ d. La neutralité implique a=(<u>R</u>)b et la monotonie sur les lignes conduit à a>(R^*)b, d'où une contradiction. □

Lemme 6.3. Si une méthode de rangement ≥ est neutre, continue, ordinale, monotone sur les lignes et égalitaire sur les lignes, alors pour toute relation valuée R sur A et tout a,b appartenant à A avec a $\neq$b, [R(a,c)=1 pour tout c appartenant à A\{a} et R(b,d)<1 pour un d appartenant à A\{b}] ⇒ a>(R)b.

Démonstration du lemme 6.3.

Supposons au contraire qu'il existe une méthode de rangement $\geq$ neutre, continue, ordinale, monotone sur les lignes et égalitaire sur les lignes, et deux actions a,b $\in$ A avec a $\neq$b telles que R(a,c) = 1 pour tout c $\in$ A\{a}, R(b,d) < 1 pour un d $\in$ A\{b} et $b \geq (R) a$.

Par l'égalitarisme sur les lignes, nous avons $b \geq (R_b) a$. Puisque, par hypothèse, $R_b(b,d)<1$, nous pouvons trouver une relation valuée R' identique à R_b excepté que $R'(b,d)>R_b(b,d)$ pour tout d $\in$ A\{b}. Dès lors la monotonie sur les lignes conduit à b>(R')a, ce qui contredit le lemme 6.2. □

Démonstration du théorème 6.1.

Nous avons déjà observé que la méthode du minimum sortant est neutre, continue, ordinale, monotone sur les lignes et égalitaire sur les lignes. Donc, tout ce que nous avons à démontrer est que si la méthode de rangement $\geq$ est neutre, continue, ordinale, monotone sur les lignes et égalitaire sur les lignes alors

$$[a \geq (R) b \Leftrightarrow S_{\min}(a,R) \geq S_{\min}(b,R)], \textit{ c'est-à-dire}$$

$$S_{\min}(a,R) = S_{\min}(b,R) \Rightarrow a=(R)b \text{ et} \tag{1}$$
$$S_{\min}(a,R) > S_{\min}(b,R) \Rightarrow a>(R)b. \tag{2}$$

Supposons d'abord que $S_{\min}(a,R) > S_{\min}(b,R)$ pour une relation valuée R sur A et deux actions a,b $\in$ A. Posons $\underline{A}_b = \{c \in A \backslash \{b\} : R(b,c) = S_{\min}(b,R)\}$.

Considérons une suite de transformations strictement croissantes (ϕ_i, i = 1,2,...) telle que :

$\phi_i(x)$ = x si x $\leq S_{\min}(b,R)$ et

= $x^{1/i}$ sinon.

La suite ($\varphi_i[R]$, i = 1,2,...) converge vers une relation R^* pour laquelle :

$R^*(a,c) = 1$ pour tout $c \in A\backslash\{a\}$,

$R^*(b,c) = S_{min}(b,R)$ pour tout $c \in \underline{A}_b$ et

$= 1$ sinon.

Comme $\underline{A}_b$ est non vide et $S_{min}(b,R)<1$, nous savons d'après le lemme 6.3. que $a>(R^*)b$.

Cela étant, si $b\geq(R)a$, alors l'ordinalité implique $b\geq(\phi_i[R])a$ *pour tout* $\phi_i[R]$ de la suite.

Ensuite, la continuité conduit à $b\geq(R^*)a$, donc à une contradiction. Ceci établit (2).

Afin de démontrer (1), supposons que $S_{min}(a,R) = S_{min}(b,R) = \delta$ pour $R \in R(A)$ et deux actions $a,b \in A$. Si $\delta = 1$ alors $a=(R)b$ par le lemme 6.2.

Supposons $\delta \neq 1$ et $b>(R)a$, la démonstration pour l'autre cas est similaire. Il est facile de construire une suite ($R^i \in R(A)$, i = 1,2,...) convergeant vers R et telle que $S_{min}(a,R^i) > S_{min}(b,R^i)$ pour tout R^i de la suite, par exemple en prenant R^i identique à R excepté que $R^i(a,c) = \min\{1, R(a,c) + 1/i\}$ pour tout $c \in \underline{A}_a$. Donc (2) implique $a>(R^i)b$ pour tous les R^i de la suite. En utilisant la continuité, nous avons $a\geq(R)b$, c'est-à-dire une contradiction. Ceci établit (1) et complète la démonstration du théorème 6.1. □

Il n'est pas difficile de voir qu'une démonstration semblable peut être utilisée pour caractériser la méthode du maximum sortant en modifiant d'une manière évidente l'égalitarisme sur les lignes. De plus, en remplaçant la monotonie sur les lignes et l'égalitarisme sur les lignes par des axiomes similaires relatifs aux colonnes, nous obtenons une caractérisation de la méthode du minimum entrant ainsi qu'une caractérisation de la méthode du maximum entrant.

Il nous reste encore à observer qu'il est impossible de déduire un des cinq axiomes qui caractérisent la méthode du minimum sortant à partir des quatre autres. Les exemples suivants le montrent bien :

i - Soit $\Phi : A \rightarrow \{1,2,...,|A|\}$ une bijection

Définissons $\geq$ comme :

$$a \geq (R) b \text{ ssi } S_{\min}(a,R)/\Phi(a) \geq S_{\min}(b,R)/\Phi(b).$$

Cette méthode de rangement est ordinale, continue, monotone sur les lignes et égalitaire sur les lignes mais non neutre.

ii - Définissons $\geq_L$ comme :

$$a \geq_L (R) b \text{ ssi } S_L(a,R) \geq S_L(b,R), \text{ où, pour tout } c \in A,\ S_L(c,R) = \sum_{d \in A \setminus \{c\}} R(c,d)$$

(méthode du flux sortant).
Cette méthode de rangement est neutre, continue, monotone sur les lignes et égalitaire sur les lignes mais non ordinale.

iii - La méthode du minimum lexicographique $\geq_{ml}$ (voir section 5) est neutre, ordinale, monotone sur les lignes et égalitaire sur les lignes mais non continue.

Pour montrer qu'elle est non continue, considérons deux actions $a,b \in A$ et une relation valuée R sur A telle que $R(a,1) = S_{\min}(a,R) = S_{\min}(b,R) = R(b,1)$ et $R(b,2) > R(a,2)$. On a donc $b >_{ml}(R) a$. Il est facile de construire une suite de relations valuées ($R^i \in R(A)$, $i = 1,2,...$) convergeant vers R et telle que $S_{\min}(a,R^i) > S_{\min}(b,R^i)$. Pour tout R^i de la suite, on a $a >_{ml}(R^i) b$ ce qui viole la continuité.

iv - La méthode de l'indifférence $\geq_I$ (voir section 5) est neutre, ordinale, continue et égalitaire sur les lignes mais non monotone sur les lignes.

v - La méthode du maximum sortant est neutre, ordinale, continue et monotone sur les lignes mais non égalitaire sur les lignes.

7. UNE CARACTERISATION D'UNE METHODE FONDEE SUR LES FLUX SORTANTS ET ENTRANTS

7.1. Introduction

Le but de cette section est d'étudier une méthode permettant d'obtenir un préordre partiel au départ d'une relation de préférence valuée. Cette méthode, fondée sur la notion de flux sortant et de flux entrant est caractérisée par un système de trois axiomes indépendants. Elle est définie par :

$$a \geq_{L/E}(R) b \quad ssi \quad [S_L(a,R) \geq S_L(b,R) \text{ et } S_E(a,R) \geq S_E(b,R)] \tag{1}$$

où $S_L(a,R) = \sum_{c \in A \setminus \{a\}} R(a,c)$ [flux sortant]

et $S_E(a,R) = - \sum_{c \in A \setminus \{a\}} R(c,a)$ [flux entrant]

Il est facile de vérifier que la méthode définie par (1) est vraiment une méthode de rangement partiel et que la relation $\geq_{L/E}(R)$ n'est pas nécessairement complète[7]. Nous appellerons la méthode de rangement partiel définie par (1) la méthode *L/E* (L = Leaving, E = Entering).

La caractérisation que nous présentons dans cette section est due à BOUYSSOU et PERNY (1990). Tout au long de cette section, nous ferons l'hypothèse que l'ensemble A contient au moins 3 éléments. L'intérêt de la méthode L/E réside dans sa simplicité et son attrait intuitif. Elle généralise, par le biais de l'utilisation des flux entrants et sortants pour le cas valué, l'idée de la déclaration que a est préféré à b si a "bat" plus d'actions que b et "est battu" par moins d'actions.

---

[7] Elle ne le sera que si R a des propriétés spéciales, par exemple si R(c,d) + R(d,c) est constant pour tout c,d appartenant à A.

Cependant, puisqu'un préordre partiel n'est pas nécessairement complet, la méthode $\geq_{L/E}$ permettra à deux actions d'être déclarées incomparables. Bien que cela puisse paraître étrange, il ne faut pas oublier que l'information disponible peut être très pauvre, voire conflictuelle. Le fait de déclarer a et b incomparables signifie donc qu'il semble difficile de prendre, du moins à ce stade de l'étude, une position définie sur la comparaison de a et b. Toutefois, on démontre qu'étant donné une structure de préordre partiel, il est toujours possible de remplacer les incomparabilités par des préférences de manière à en faire une structure de préordre total.

Il faut encore préciser que la méthode L/E utilise les propriétés "cardinales" des valuations. Par conséquent, elle ne semble pas appropriée lorsque les comparaisons des valuations n'ont qu'une signification ordinale en terme de crédibilité.

7.2. Propriétés de la méthode L/E

Les propriétés que nous avons définies dans la section 1 concernent les méthodes de rangement. Bien entendu, elles restent valables pour les méthodes de rangement partiel.

Dans la suite, nous noterons J(R) la relation d'incomparabilité de $\geq(\boldsymbol{R})$, c'est-à-dire, pour tout a,b $\in$ A, aJ(R)b ssi [*non* $a\geq(R)b$ *et non* $b\geq(R)a$].

Nous savons que la neutralité implique la non discrimination pour des méthodes de rangement partiel conduisant toujours à une relation binaire complète. Lorsque l'incomparabilité est tolérée, la neutralité implique que pour toute relation valuée R sur A et tout a, b $\in$ A, [R(a,b) = R(b,a) et R(a,c) = R(b,c), R(c,a) = R(c,b) pour tout c $\in$ A\{a}] $\Rightarrow$ [aI(R)b ou aJ(R)b]. La non discrimination exclut le dernier cas. Il est clair que la méthode L/E est non discriminatoire. De plus, elle est strictement monotone et donc monotone.

Définissons A^+ et A^- comme des duplications disjointes de l'ensemble A. Nous notons

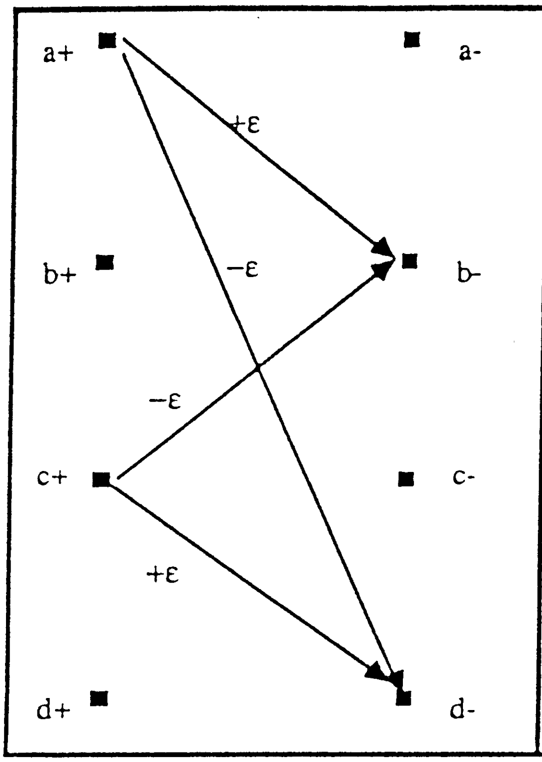
a^+ (resp. a^-) l'élément de A^+(resp.A^-) correspondant à $a \in A$. Considérons un graphe orienté G pour lequel l'ensemble des noeuds est $X = A^+ \cup A^-$ et l'ensemble des arcs est $U = \{(x^+,y^-) \in X^2 : x^+ \in A^+, y^- \in A^- \text{ et } x \neq y\}$. Dans cette section, nous identifions une relation valuée R avec le graphe valué dans lequel pour tout $a,b \in A$, la valuation $v_R(u)$ de l'arc $u = (a^+,b^-)$ est $R(a,b)$. Nous notons que tous les cycles de G sont alternés par construction[8].

Cela étant, nous dirons qu'une méthode de rangement partiel est *indépendante des translations (resp. des homothéties) sur les cycles alternés* si et seulement si pour toutes relations valuées R et R', [R' peut être obtenu à partir de R via une translation (resp. une homothétie) admissible sur un 4-cycle ou un 6-cycle alterné élémentaire] $\Rightarrow$ $[\geq(\boldsymbol{R}) = \geq(\boldsymbol{R'})]$.

Il est facile de voir que si R' peut être obtenu à partir de R via une translation admissible sur un cycle alterné élémentaire, alors $S_L(a,R) = S_L(a,R')$ et $S_E(a,R) = S_E(a,R')$ pour tout $a \in A$, si bien que la méthode L/E est indépendante des translations sur les cycles alternés (voir figure 1).

---

[8] Etant donné la morphologie particulière du graphe G, nous devons faire l'hypothèse que l'ensemble A contient au moins 3 éléments.



R	a	b	c	d
a		+ε		−ε
b				
c		−ε		+ε
d				

Figure 1 : une translation admissible sur un 4-cycle alterné élémentaire

7.3. Résultats

Il est facile de voir que la méthode L/E n'est pas la seule méthode de rangement partiel qui soit non discriminatoire, monotone et indépendante des translations sur les cycles alternés. C'est aussi le cas pour la procédure de l'indifférence $\geq_I$ (voir section 5). Cette méthode, cependant, n'est pas strictement monotone. Malheureusement, la méthode L/E n'est pas la seule méthode de rangement partiel qui soit non discriminatoire, strictement monotone et indépendante des translations sur les cycles alternés. Par exemple, c'est aussi le cas pour la méthode du flot net $\geq_{NF}$ (voir section 2). Néanmoins, les méthodes de rangement partiel qui sont non discriminatoires, (strictement) monotones et indépendantes des translations sur les cycles alternés ont de fortes relations avec la méthode L/E et nous avons ce qui suit :

Théorème 7.1. Si une méthode de rangement partiel $\geq$ est non discriminatoire, monotone et indépendante des translations sur les cycles alternés, alors pour toute relation valuée R sur A, on a [$a \geq_{L/E}(R)b$) $\Rightarrow$ $a \geq (R)b$ pour tout a, b appartenant à A]. En outre, si $\geq$ est strictement monotone, alors pour toute relation valuée R sur A, on a [$a >_{L/E}(R)b \Rightarrow a>(R)b$ pour tout a,b appartenant à A].

Le théorème 7.1. dit que la méthode L/E est la plus petite (au sens de l'inclusion) méthode de rangement partiel qui soit non discriminatoire, monotone et indépendante des translations sur les cycles alternés. Si $\geq$ est non discriminatoire, monotone et indépendant des translations sur les cycles alternés, il se peut qu'on ait $a>_{L/E}(R)b$ et $a=(R)b$. La seconde partie de ce théorème dit qu'une telle situation est impossible si $\geq$ est strictement monotone. Dès lors, la méthode L/E "impose" ses indifférences et ses strictes préférences à chaque méthode de rangement partiel qui soit non discriminatoire, strictement monotone et indépendante des translations sur les cycles alternés. Ces méthodes de rangement partiel diffèrent de la méthode L/E par la comparaison en termes d'indifférence ou de préférence stricte d'actions qui étaient déclarées incomparables avec la méthode L/E.

Nous avons déjà noté que la méthode L/E est non discriminatoire, strictement monotone et indépendante des translations sur les cycles alternés. Observons aussi que ces trois axiomes sont indépendants comme le montrent les exemples suivants :

i) Soit $\Phi : A \rightarrow \{1,2,..., |A|\}$ une bijection.

Définissons $\geq_1$ comme :

$$a \geq_1 (R) b \text{ ssi } [S_{L,1}(a,R) \geq S_{L,1}(b,R) \text{ et } S_E(a,R) \geq S_E(b,R)]$$

où $S_{L,1}(c,R) = S_L(c,R).\Phi(c)$, pour tout $c \in A$.

Cette méthode de rangement partiel est strictement monotone (et donc monotone) et indépendante des translations sur les cycles alternés mais n'est pas non discriminatoire.

ii) Définissons $\geq_2$ comme :

$$a \geq_2(R) b \textit{ ssi } [S_L(a,R) \leq S_L(b,R) \textit{ et } S_E(a,R) \leq S_E(b,R)].$$

Cette méthode de rangement partiel est non discriminatoire et indépendante des translations sur les cycles alternés mais n'est pas monotone (et donc n'est pas strictement monotone).

iii) Définissons $\geq_3$ comme :

$$a \geq_3(R) b \textit{ ssi } [S_{L,3}(a,R) \geq S_{L,3}(b,R) \textit{ et } S_{E,3}(a,R) \geq S_{E,3}(b,R)]$$

$$\textit{où } S_{L,3}(c,R) = \sum_{d \in A \setminus \{c\}} R(c,d)^2 \textit{ et } S_{E,3}(c,R) = -\sum_{d \in A \setminus \{c\}} R(d,c)^2, \textit{ pour tout } c \in A.$$

Cette méthode de rangement partiel est non discriminatoire et strictement monotone mais n'est pas indépendante des translations sur les cycles alternés.

Avant de démontrer le théorème 7.1., nous allons établir quelques lemmes.

Lemme 7.2. Pour toutes relations valuées R et R', si [R' peut être obtenu à partir de R via une translation admissible sur un cycle alterné élémentaire] alors [R' peut être obtenu à partir de R via un nombre fini de translations admissibles sur des 4-cycles et/ou des 6-cycles alternés élémentaires].

Démonstration du lemme 7.2.

La démonstration se fait par induction sur k où 2k est la longueur d'un cycle alterné élémentaire de G. Si k = 2 ou 3, alors le lemme est démontré. Supposons maintenant que le lemme soit vrai pour k $\geq$ 3 et montrons qu'il est encore vrai pour k +1.

Considérons un cycle alterné élémentaire C de longueur 2(k+1) de G, c'est-à-dire une collection ordonnée de couples d'actions $\{(x_i^+, y_i^-); (x_{i+1}^+, y_i^-) : i = 1,2,...,k+1\}$ avec pour tout i,j $\in$ $\{1,2,...,k+1\}$:

$x_i \neq y_i$, $x_{i+1} \neq y_i$ (parce que les arcs du type (a^+,a^-) ne sont pas dans G), (2)
et $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ (parce que le cycle est élémentaire), (3)
où x_{k+2} est interprété comme x_1.

Montrons que toute translation admissible sur C peut être obtenue via un nombre fini de translations sur des cycles alternés élémentaires de longueur supérieure à 4 et inférieure à 2k. Afin de le montrer, nous déclarons que pour un $j \in \{1,2,...,k+1\}$,

$C_j = ((x_1^+,y_1^-), (x_2^+,y_1^-), (x_2^+,y_2^-), (x_3^+,y_2^-),..., (x_j^+,y_j^-), (x_1^+,y_j^-))$
et
$C'_j = ((x_1^+,y_j^-), (x_{j+1}^+,y_j^-), (x_{j+1}^+,y_{j+1}^-), (x_{j+2}^+,y_{j+1}^-),...,(x_{k+1}^+,y_{k+1}^-), (x_1^+,y_{k+1}^-))$
correspondent tous deux à des cycles alternés élémentaires de G. La condition (2) implique que nous devons chercher un candidat dans $\{2,3,...,k\}$. A partir de (3), nous savons que $\{2,3,...,k\}$ contient au plus un élément t tel que $x_1 = y_t$. Soit J l'ensemble obtenu en ôtant t, si un tel t existe, de $\{2,3,...,k\}$. Nous avons $|J| \geq (k-1) - 1 = k-2$. Puisque $k \geq 3$, J n'est pas vide et la déclaration est démontrée.
Par construction, C_j et C'_j sont chacun de longueur supérieure à 4 et inférieure à 2k (voir figure 2). Ces deux cycles alternés élémentaires n'ont que l'arc (x_1^+,y_j^-) en commun. Cet arc est arrière dans C_j et avant dans C'_j.

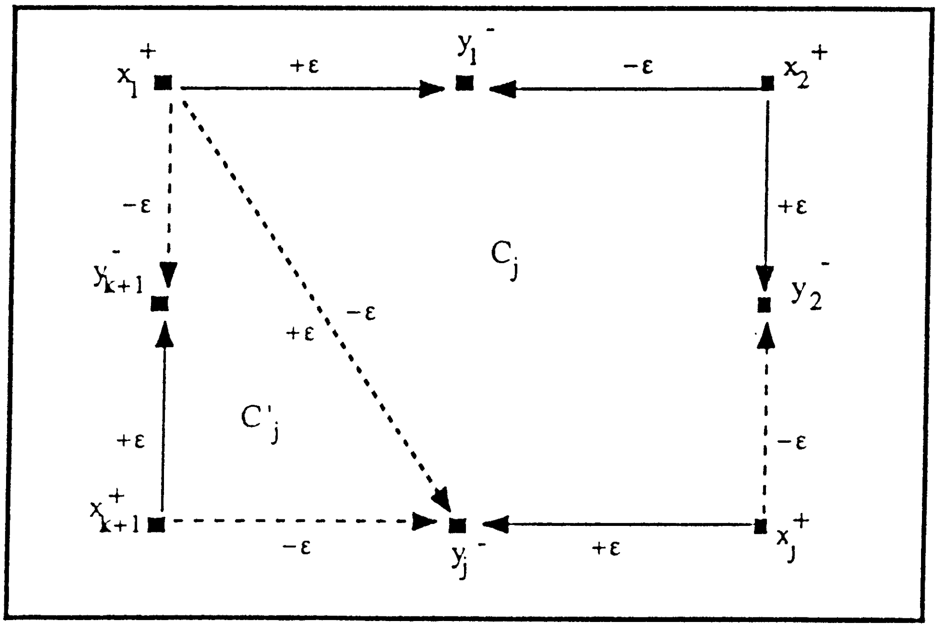


Figure 2 : une translation sur C via des translations sur C_j et C'_j.

Supposons maintenant que R' ait été obtenu à partir de R via une translation admissible de ε sur C. Si $\varepsilon = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons maintenant que $\varepsilon > 0$ (l'autre cas étant symétrique).

Si $R(x_1,y_j) > 0$ alors nous pouvons trouver un entier n suffisamment grand tel que une translation de ε/n sur C_j soit une translation admissible. Après cette première transformation, l'exécution d'une translation de ε/n est une translation admissible que C'_j. Il est facile de voir que, après avoir répété n fois ces transformations, nous obtenons R'.

Si $R(x_1,y_j) = 0$ alors l'exécution d'une translation de ε sur C'_j est une translation admissible. Après cette première transformation, l'exécution d'une translation de ε sur C_j est une translation admissible. Nous obtenons R' après ces deux transformations. Ceci termine la démonstration du lemme 7.2. □

Le lemme suivant établit un lien crucial entre translations admissibles sur les cycles alternés élémentaires et flux sortants et entrants.

Lemme 7.3. Pour toutes relations valuées R et R', [$S_L(a,R) = S_L(a,R')$ et $S_E(a,R) = S_E(a,R')$ pour tout a appartenant à A] $\Leftrightarrow$ [R' peut être obtenu à partir de R via un nombre fini de translations admissibles sur des cycles alternés élémentaires].

Démonstration du lemme 7.3.
La partie $\Leftarrow$ est évidente. Afin de démontrer la partie $\Rightarrow$, supposons que nous ayons un R et un R' pour lesquels $S_L(c,R) = S_L(c,R')$et $S_E(c,R) = S_E(c,R')$ pour tout c $\in$ A. Si R = R', le lemme est démontré. Si $R \neq R'$ alors il existe a,b $\in$ A avec $a \neq b$ tels que $R(a,b) \neq R'(a,b)$ et nous supposerons que $R(a,b) > R'(a,b)$, l'autre cas étant symétrique. Dès lors, il existe d $\in A\backslash\{a\}$ tel que $R(a,d) < R'(a,d)$ sinon $R(a,d) \geq R'(a,d)$ pour tout d $\in A\backslash\{a,b\}$ et $R(a,b) > R'(a,b)$ contredirait $S_L(a,R) = S_L(a,R')$. En utilisant un argument similaire, il existe un c $\in A\backslash\{d\}$ tel que $R(c,d) > R'(c,d)$. Ce procédé conduit à la construction d'une collection ordonnée d'arcs de G $[(a^+, b^-), (a^+,d^-), (c^+,d^-)]$.

En répétant le même procédé, nous créerons un cycle élémentaire de G puisque le nombre d'actions est fini. Soit Δ le minimum sur les arcs (a^+,b^-) du cycle de $|R(a,b) - R'(a,b)|$. Il est facile de vérifier que l'addition de Δ sur les arcs du cycle tel que $R(x,y) < R'(x,y)$ et la soustraction de ce même nombre sur les arcs du cycle tels que $R(x,y) > R'(x,y)$ est une translation admissible sur le cycle. Nous obtenons ainsi une relation valuée R_1. Si $R_1 = R'$, le lemme est démontré. Sinon, nous pouvons répéter le même argument en commençant avec R_1 au lieu de R. Puisque A est fini, il y a seulement un nombre fini d'arcs tels que $R(x,y) \neq R'(x,y)$. Puisque, à chaque étape, le nombre d'arcs sur lesquels la relation courante et R' sont différents est décroissant d'au moins une unité, ce procédé s'achèvera après un nombre fini d'étapes. Ceci termine la démonstration du lemme 7.3. □

Démonstration du théorème 7.1.

Pour établir la première partie du théorème, nous devons montrer que si $\geq$ est non discriminatoire, monotone et indépendant des translations sur les cycles alternés, alors

$S_L(a,R) \geq S_L(b,R)$ et $S_E(a,R) \geq S_E(b,R) \Rightarrow$ $a \geq (R) b$.

Montrons d'abord que si $\geq$ est non discriminatoire, monotone et indépendant des translations sur les cycles alternés alors

$$S_L(a,R) = S_L(b,R) \text{ et } S_E(a,R) = S_E(b,R) \Rightarrow a=(R)b \quad (4)$$

Afin de démontrer (4) considérons une relation valuée R sur A telle que $S_L(a,R) = S_L(b,R)$ et $S_E(a,R) = S_E(b,R)$ pour un a et un b de A. Définissons R^* par

$R^*(a,b) = R^*(b,a) = (R(a,b) + R(b,a))/2$,

$R^*(a,c) = R^*(b,c) = (R(a,c) + R(b,c))/2$ pour tout $c \in A\backslash\{a,b\}$,

$R^*(c,a) = R^*(c,b) = (R(c,a) + R(c,b))/2$ pour tout $c \in A\backslash\{a,b\}$,

$R^*(c,d) = R(c,d)$ pour tout $c,d \in A\backslash\{a,b\}$

Il est clair que R^* est une relation valuée sur A.

Nous avons $R^*(a,b) = R^*(b,a)$, $R^*(a,c) = R^*(b,c)$ et $R^*(c,a) = R^*(c,b)$ pour tout $c \in A\backslash\{a,b\}$.

Donc la non discrimination implique $a=(R^*)b$.

Nous avons aussi $S_L(c,R^*) = S_L(c,R)$ et $S_E(c,R^*) = S_E(c,R)$ pour tout $c \in A$. Vu le lemme 7.3., nous savons que R^* peut être obtenu à partir de R via un nombre fini de translations sur des cycles alternés élémentaires. Vu le lemme 7.2., l'indépendance vis-à-vis des translations sur les cycles alternés implique $\geq(R) = \geq(R^*)$. Donc $a=(R)b$, ce qui établit (4).

Montrons maintenant que si $\geq$ est non discriminatoire, monotone et indépendant des translations sur les cycles alternés alors

$S_L(a,R) \geq S_L(b,R)$ et $S_E(a,R) \geq S_E(b,R)$, une au moins de ces inégalités étant stricte,

$$\Rightarrow a \geq (R) b, \tag{5}$$

ce qui complètera la démonstration de la première partie du théorème.

Afin de démontrer (5), supposons que $S_L(a,R) \geq S_L(b,R)$ et $S_E(a,R) \geq S_E(b,R)$, une au moins de ces inégalités étant stricte. Notons $d_L(R) = S_L(a,R) - S_L(b,R)$ et $d_E(R) = S_E(a,R) - S_E(b,R)$, c'est-à-dire

$$d_L(R) = \sum_{c \in A \setminus \{a\}} R(a,c) - \sum_{d \in A \setminus \{b\}} R(b,d)$$

$$d_E(R) = \sum_{d \in A \setminus \{b\}} R(d,b) - \sum_{c \in A \setminus \{a\}} R(c,a).$$

On ne peut avoir [$R(a,c) = 0$, $R(c,a) = 1$ $\forall c \in A \setminus \{a\}$ et,$R(b,d) = 1$, $R(d,b) = 0$ $\forall d \in A \setminus \{b\}$] car cela entraînerait $d_L(R) = d_E(R) = -(|A|-1)<0$.

Il est donc possible d'obtenir une relation valuée R^* identique à R sauf sur des couples du type (a,c), (c,a) avec $c \in A \setminus \{a\}$, (b,d), (d,b) avec $d \in A \setminus \{b\}$, telle que $d_L(R^*) = d_E(R^*) = 0$. Il suffit en effet de diminuer lorsque c'est possible des valuations parmi R(a,c) et R(d,b) et/ou augmenter des valuations parmi R(c,a) et R(b,d) jusqu'à obtention d'une relation valuée R^* sur A qui puisse assurer $d_L(R^*) = d_E(R^*) = 0$. Cela étant, par (4), on a $a=(R^*)b$ et des applications répétées de la monotonie conduisent à $a \geq (R)b$. Ceci termine la démonstration de la première partie du théorème.

Afin de démontrer la seconde partie, nous devons montrer que si $\geq$ est non discriminatoire, strictement monotone et indépendant des translations sur les cycles alternés alors :

$S_L(a,R) \geq S_L(b,R)$ et $S_E(a,R) \geq S_E(b,R)$, une au moins de ces inégalités étant stricte,

$$\Rightarrow a>(R)b. \tag{6}$$

Puisque la stricte monotonie implique la monotonie, nous savons que (4) reste vrai. Dès lors en utilisant la stricte monotonie au lieu de la monotonie dans la démonstration de (5), nous voyons que (6) est vrai, ce qui complète la démonstration du théorème 7.1. □

7.4. Une méthode fondée sur les produits sortants et entrants

Dans la section 3, nous avons présenté une caractérisation de la méthode du rapport des produits en nous basant sur la méthode du flot net. En utilisant une conversion semblable, nous pouvons, à partir de la méthode L/E, donner une caractérisation axiomatique de la méthode de rangement partiel suivante :

$$a \geq_{\Pi^{+/-}}(R)b \ \textit{ssi} \ [S_{\Pi^+}(a,R) \geq S_{\Pi^+}(b,R) \ \textit{et} \ S_{\Pi^-}(a,R) \geq S_{\Pi^-}(b,R)]$$

où $S_{\Pi^+}(a,b) = \Pi_{c \in A \setminus \{a\}} R(a,c)$ [produit sortant]

et $S_{\Pi^-}(a,b) = -\Pi_{c \in A \setminus \{a\}} R(c,a)$ [produit entrant]

Comme pour la méthode RP, nous faisons ici l'hypothèse suivante :

$$R(x,y)>0 \quad \forall x,y \in A, x \neq y.$$

Nous avons alors le résultat :

Théorème 7.4. Si une méthode de rangement partiel $\geq$ est non discriminatoire, monotone et indépendante des homothéties sur les cycles alternés, alors pour toute relation valuée R sur A, on a
$[a \geq_{\Pi+/-}(R)b \Rightarrow a \geq (R)b$ pour tout a,b appartenant à A].
En outre, si $\geq$ est strictement monotone, alors pour toute relation valuée R sur A, on a $[a >_{\Pi+/-}(R)b \Rightarrow a > (R)b$ pour tout a,b appartenant à A].

La conversion des lemmes 7.2. et 7.3. ne posent pas de problème. A noter cependant que, pour la première partie de la démonstration du théorème 7.4., il faut remplacer les moyennes arithmétiques de la démonstration du théorème 7.1. par des moyennes géométriques.

8. UNE METHODE A SEUIL

Dans cette section, nous ferons l'hypothèse que R est une relation probabiliste (R(a,b) + R(b,a) = 1). Introduisons un seuil $\lambda \in [0,1]$ et considérons la méthode $\geq_\lambda$ définie par :

$$a \geq_\lambda (R) b \text{ ssi } R(a,b) \geq \lambda,$$

ou encore en posant $R_\lambda = \geq_\lambda(R)$,

$$aR_\lambda b \text{ ssi } R(a,b) \geq \lambda.$$[9]

En notant $P_\lambda = P_\lambda(R)$, $I_\lambda = I_\lambda(R)$ et $J_\lambda = J_\lambda(R)$,
nous avons immédiatement, si $\lambda + \mu = 1$,

$$a\,P_\lambda b \quad \text{ssi } R(a,b) \geq \lambda \text{ et } R(a,b) > \mu,$$

$$a\,I_\lambda b \quad \text{ssi } \lambda \leq R(a,b) \leq \mu,$$

$$a\,J_\lambda b \quad \text{ssi } \mu < R(a,b) < \lambda.$$

En particulier, $I_\lambda = \varnothing$ si $\lambda > .5$ et $J_\lambda = \varnothing$ si $\lambda < .5$.

La proposition suivante précise certaines inclusions.

Proposition 8.1.

i) Pour tout seuil α appartenant à $[0,\lambda]$, on a $R_\lambda \subseteq R_\alpha$, $I_\lambda \subseteq I_\alpha$ et $J_\alpha \subseteq J_\lambda$.

ii) Si $\lambda > .5$ alors pour tout seuil α appartenant à $]\mu,\lambda]$, on a $P_\lambda \subseteq P_\alpha$.

iii) Si $\lambda < .5$ alors pour tout seuil α appartenant à $]\mu,1]$, on a $P_\alpha \subseteq P_\lambda$.

Démonstration de la proposition 8.1.

i) Démontrons la première inclusion. On a $(a,b) \in R_\lambda \Leftrightarrow R(a,b) \geq \lambda (\geq \alpha) \Rightarrow (a,b) \in$

---

[9] Dans le cas d'un vote, si $\lambda = .8$ par exemple, nous dirons que a est classé avant b s'il est préféré à b pour 80% des électeurs. Le cas particulier $\lambda = .5$ correspond à la méthode de la majorité par paires de Condorcet (voir section 4).

R_α. Les deux autres inclusions découlent immédiatement de la première.

ii) On a $(a,b) \in P_\lambda = R_\lambda \Leftrightarrow R(a,b) \geq \lambda$. Or $\lambda \geq \alpha$ et $\lambda > 1-\alpha$. Par conséquent, $(a,b) \in P_\lambda$.

iii) Se démontre de la même façon que ii). □

En général, la méthode $\geq_\lambda$ ne fournit pas un préordre. Cependant, sous certaines conditions, la relation R_λ peut contenir un ordre total (relation binaire booléenne complète antisymétrique et transitive). Pour éclairer ce point, nous présentons les résultats suivants qui ont été introduits par Köhler en 1978.

Supposons que la relation R soit à valeurs dans l'ensemble des nombres rationnels[10]. Soit alors $D_N = [0, 1/N, 2/N,...,1]$ un découpage de $[0,1]$ en N parties égales ($N \in \mathbb{N}_o$) tel que

$\{R(x,y) : x, y \in A, x \neq y\} \subseteq \{0, 1/N, 2/N,...,1\}$.

Un tel découpage existe puisque A est fini[11].

Notons $\lambda_j = j/N$ et $\mu_j = 1-\lambda_j$ pour tout $j \in \{0,...,N\}$. Posons également $\delta = 1/N$.

Théorème 8.2. [$R_{\lambda j}$ contient un ordre total O] $\Leftrightarrow$ [$R_{\mu j+\partial}$ ne contient pas de circuit].

Démonstration du théorème 8.2.

Montrons d'abord que $(a,b) \in R_{\lambda_j} \Leftrightarrow (b,a) \notin R_{\mu_j+\delta}$.

On a $(a,b) \in R_{\lambda_j} \Leftrightarrow R(a,b) \geq \lambda_j \Leftrightarrow R(b,a) \leq \mu_j \Leftrightarrow R(b,a) < \mu_j + \delta \Leftrightarrow (b,a) \notin R_{\mu_j+\delta}$

[10] Ce sera toujours le cas si R(a,b) est interprété comme le pourcentage de votants déclarant que a est préféré ou indifférent à b.

[11] Il suffit de prendre pour N le dénominateur commun des valeurs de R écrites sous forme de fractions rationnelles irréductibles.

Montrons que la condition est nécessaire (⇒).

Soit a_1 classé premier dans O. On a alors

$$(a_1,c) \in O \subseteq R_{\lambda_j} \ \forall\ c \in A\backslash\{a_1\} \Rightarrow (c,a_1) \notin R_{\mu_j+\delta} \ \forall\ c \in A\backslash\{a_1\}.$$

Donc a_1 n'a pas de prédécesseur dans $R_{\mu_j+\delta}$.

Soit a_2 classé second dans O. On a alors

$$(a_2,c) \in O \subseteq R_{\lambda_j} \ \forall\ c \in A\backslash\{a_1,a_2\} \Rightarrow (c,a_2) \notin R_{\mu_j+\delta} \ \forall\ c \in A\backslash\{a_1,a_2\}.$$

Donc a_2 n'a pas de prédécesseur autre que a_1 dans $R_{\mu_j+\delta}$. En poursuivant le raisonnement,

$R_{\mu_j+\delta}$ est sans circuit.

Montrons que la condition est suffisante (⇐). Comme $R_{\mu_j+\delta}$. est sans circuit, il existe un ordre total O qui étend $R_{\mu_j+\delta}$. (O $\supseteq$ $R_{\mu_j+\delta}$)[12]. Dès lors, on a (a,b) $\in$ O ⇒ (b,a) $\notin$ $R_{\mu_j+\delta}$.

(sinon (b,a) $\in$ O et O ne serait pas un ordre total),

⇒ (a,b) $\in$ R_{λ_j} □

Théorème 8.3. Soit $\overline{\lambda}$, le plus grand λ_j tel que $R_{\lambda j}$ contienne un ordre total et $\underline{\mu}$ le plus petit μ_j tel que $R_{\mu j+\partial}$ soit sans circuit. Alors $\overline{\lambda} + \underline{\mu} = 1$.

[12] Il s'agit d'un résultat bien connu de la théorie des graphes : "La condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit sans circuit est qu'il puisse être mis en ordre".

Démonstration du théorème 8.3.

$\overline{\lambda}$ existe car R_0 contient tous les ordres totaux et $\underline{\mu}$ existe car $\boldsymbol{R}_{1+\delta}$ est vide donc sans circuit.

Cela étant, $1-\overline{\lambda}$ est le plus petit μ_j tel que $\boldsymbol{R}_{\mu_j+\delta}$ soit sans circuit. En effet, s'il y en avait encore un plus petit que lui, par exemple $1-\overline{\lambda}-\delta$, alors par le théorème 8.2., $\boldsymbol{R}_{\overline{\lambda}+\delta}$ contiendrait un ordre total, ce qui est contraire à la définition de $\overline{\lambda}$. □

> **Théorème 8.4.** $O \supseteq R_{\underline{\mu}+\partial} \Leftrightarrow O \subseteq R_{\overline{\lambda}}$

Démonstration du théorème 8.4.

La partie $\Rightarrow$ a déjà été démontrée (voir théorème 8.2., partie $\Leftarrow$).

Pour la partie $\Leftarrow$, nous procédons par l'absurde. Supposons

i) (a,b) $\notin$ O, c'est-à-dire (b,a) $\in O \subseteq R_{\overline{\lambda}}$, et donc $R(b,a) \geq \overline{\lambda}$,

ii) (a,b) $\in \boldsymbol{R}_{\underline{\mu}+\delta}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{R(a,b)} \geq \underline{\mu} + \delta$.

Au total, on a $\boldsymbol{R(a,b)} + \boldsymbol{R(a,b)} \geq \overline{\lambda} + \underline{\mu} + \delta = 1 + \delta$. □

Tout ordre total contenu dans $R_{\overline{\lambda}}$ (et qui contient donc $\boldsymbol{R}_{\underline{\mu}+\delta}$) est appelé *un ordre prudent.*

Examinons un exemple. Soient A = {a,b,c,d} et R une relation probabiliste donnée par la matrice

	a	b	c	d
a		.2	1	.8
b	.8		.4	.3
c	0	.6		.1
d	.2	.7	.9	

Il est évident que le découpage D_{10} = [0,.1,.2,...,1] convient le mieux[13]. On note alors que les relations $R_{1.1}$, R_1, $R_{.9}$ et $R_{.8}$ sont sans circuit et que $R_{.7}$ contient le circuit
($b \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow b$).
Nous avons donc $\underline{\mu} = .7$ et $\bar{\lambda} = .3$.

$$
R_{.7} : \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \end{array}} \end{array}
\qquad
R_{.3} : \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \end{array}} \end{array}
$$

En conséquence, la relation $R_{.3}$ contient un ordre prudent[14] : $b > a > d > c$.
Par simple curiosité, utilisons la méthode du flot net. Verdict : $a > d > b > c$.

[13] On aura avantage à choisir un découpage D_N pour lequel N est le plus petit possible.

[14] Ici l'ordre prudent est unique, mais ce n'est pas le cas en général.

9. RECHERCHES FUTURES

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, l'analyse faite ici n'est exhaustive ni du point de vue des procédures, ni du point de vue des propriétés. En effet, nous pouvons créer sans limite de nouvelles méthodes de rangement, ne serait-ce déjà que par des combinaisons convenables de méthodes existantes. Voici quelques procédures qu'il serait peut-être intéressant d'étudier. Donnons-les au moyen d'une fonction de score :

$S(a,R) = \min R(a,c) - \min R(c,a)$

$S(a,R) = \min (R(a,c) - R(c,a))$

$S(a,R) = \max R(a,c) - \max R(c,a)$

$S(a,R) = \max (R(a,c) - R(c,a))$

Du point de vue des propriétés, on pourrait en dégager de plus naturelles encore que celles dont nous disposons. En effet, des propriétés relatives, par exemple, à des transformations sur des circuits sont assez artificielles et avaient apparemment pour rôle de compléter un ensemble d'axiomes pour établir une caractérisation.

En vue d'élargir notre répertoire de propriétés, nous pouvons considérer celles qui suivent :

1. Axiomes de négation, de symétrie et de dualité

A partir d'une relation valuée R sur A, on peut définir :

- la relation complémentaire R^c par $R^c(a,b) = 1-R(a,b)$;
- la relation réciproque R^{-1} par $R^{-1}(a,b) = R(b,a)$;
- la relation duale R^d par $R^d(a,b) = 1-R(b,a)$.

En particulier, R est une relation probabiliste ssi $R^d = R$[15].

Une méthode de rangement $\geq$ vérifie *l'axiome de négation (resp. de symétrie, de dualité)* ssi

pour toute relation valuée R sur A et tout $a,b \in A$,

[15] En abrégé, on écrit $R^c = 1-R$ et $R^d = 1-R^{-1}$.
A noter que $(R^{-1})^{-1} = R$ et $(R^c)^{-1} = (R^{-1})^c = R^d$.

$$a \geq (R) b \Leftrightarrow b \geq (R^c) a \text{ (resp. } b \geq (R^{-1}) a,\ a \geq (R^d) b).$$

Il est clair que si une méthode de rangement $\geq$ vérifie deux de ces trois axiomes, alors elle vérifie le troisième.

2. Axiome d'homogénéité

Une méthode de rangement $\geq$ est dite *homogène* ssi pour toute relation valuée R sur A, tout a,b $\in$ A et tout t $\in$]0,1[:

$$a \geq (R) b \Leftrightarrow a \geq (tR) b$$

3. Axiome d'universalité

Une méthode de rangement $\geq$ est dite *universelle* si elle est définie pour toute relation valuée sur A. Cet axiome est incontournable et doit être vérifié en priorité au même titre que la neutralité qui, rappelons-le, interdit un traitement partial des actions permettant de privilégier ou d'handicaper certains éléments de A identifiés par leurs labels. La condition d'universalité est nécessaire si on veut pouvoir appliquer la méthode systématiquement, même dans le cas de préférences cycliques.

4. Indépendance par rapport aux actions non discriminantes

L'axiome *d'indépendance par rapport aux actions non discriminantes* consiste à demander que la position respective de a et b dans $\geq(R)$ ne dépende en aucune manière des actions tierces c $\in$ A\{a,b} qui se comparent de la même façon à a et à b. Nous pouvons le formaliser comme suit :

$[\forall B \subset A, (\forall b,b' \in B, \forall c \in A\backslash B, R(b,c) = R(b',c) \text{ et } R(c,b) = R(c,b'))$

$\Rightarrow \geq(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{B}) = \geq(\boldsymbol{R})/\boldsymbol{B}]$

où X/B représente la restriction d'une relation X au sous-ensemble B.

5. Respect des données

Le *support* d'une relation valuée R sur A est la relation booléenne Supp(R) sur A, définie par

$$a \ \mathrm{Supp}(R) b \ \text{ ssi } R(a,b) \neq 0.$$

Cela étant, l'axiome de *respect des données* consiste à demander que la méthode de rangement $\geq$ ne crée pas d'information inutile, lorsqu'il est possible d'obtenir un préordre qui respecte l'information contenue dans R. Plus précisément, si Supp(R) est un préordre, alors la méthode de rangement $\geq$ doit fournir un préordre $\geq(\boldsymbol{R})$ contenu dans Supp(R) :

$$[\mathrm{Supp}(R) \text{ est un préordre} \Rightarrow \geq(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathrm{Supp}(R)]$$

6. Respect de la relation de couverture

L'axiome de *respect de la relation de couverture* consiste à demander que, si d'après la relation R, une action a se comporte systématiquement au moins aussi bien qu'une action b vis-à-vis de toute action tierce c $\in$ A\{a,b}, alors a doit être placé au moins aussi bien que b dans le classement final. Formellement, considérons la relation de couverture sur A notée C_A définie par :

$\forall a, b \in A, a \, C_A \, b \Leftrightarrow [\forall c \in A, R(c,b) \geq R(c,a) \text{ et } R(a,c) \geq R(b,c)]$

La condition de respect de la couverture s'écrit alors :

$\forall a,b \in A, a \, C_A \, b \Rightarrow [\forall c \in A, (c \geq(\boldsymbol{R}) \ b \Rightarrow c \geq(\boldsymbol{R}) \ a) \text{ et } (a \geq(\boldsymbol{R}) \ c \Rightarrow b \geq(\boldsymbol{R}) \ c)]$

7. Indépendance par rapport aux extrêmes

Cet axiome consiste à demander que lorsqu'on applique la méthode $\geq$ à une relation R, et que l'on supprime l'ensemble des actions qui figurent en tête dans $\geq(R)$, on obtienne le même résultat qu'en supprimant directement ces éléments avant d'appliquer $\geq$. Vérifier cet axiome permet par exemple de se prémunir d'un désistement des candidats en tête de classement.

Formellement, nous pouvons écrire la condition suivante :

$\forall B \subset A$, [$\forall b \in B, \forall a \in A \backslash B$, non a>(R)b] ou

[$\forall b \in B, \forall a \in A \backslash B$, non b>(R)a] $\Rightarrow$ [$\geq(R/(A\backslash B)) = \geq(R)/(A\backslash B)$]

Cette condition peut être éventuellement renforcée si on impose qu'elle soit également vérifiée lorsque seulement une partie de la classe de tête se désiste.

Cette condition ne doit pas être confondue avec la condition d'indépendance par rapport aux actions non discriminantes. En effet, s'il est vrai que les actions de B se comparent de la même façon vis-à-vis des actions de A\B, c'est ici au sens de la relation $\geq(R)$ et non pas de la relation R.

Pour terminer, nous présentons ici un tableau synthétique recensant différentes méthodes de rangement ainsi que leur comportement vis-à-vis de certains axiomes. Nous pouvons ainsi mieux déceler d'éventuelles relations de dominance entre les procédures analysées.

Commençons par numéroter quelques axiomes que nous connaissons déjà :

A.1.	Neutralité
A.2.	Non discrimination
A.3.1.	Monotonie
A.3.2.	Stricte monotonie
A.3.3	Monotonie sur les lignes

A.3.4. Monotonie sur les colonnes

A.4. Ordinalité

A.5. Continuité

A.6.1. Egalitarisme sur les lignes

A.6.2. Egalitarisme sur les colonnes

A.7.1. Définition sur les flux sortants

A.7.2. Définition sur les flux entrants

A.7.3. Définition sur les flux

A.8.1. L-Renversement faible des préférences

A.8.2. E-Renversement faible des préférences

A.8.3. L-Renversement strict des préférences

A.8.4. E-Renversement strict des préférences

A.9.1. Indépendance vis-à-vis des translations sur les circuits

A.9.2. Indépendance vis-à-vis des homothéties sur les circuits

A.9.3. Indépendance vis-à-vis des L-translations sur une paire d'actions

A.9.4. Indépendance vis-à-vis des E-translations sur une paire d'actions

A.9.5. Indépendance vis-à-vis des L-homothéties sur une paire d'actions

A.9.6. Indépendance vis-à-vis des E-homothéties sur une paire d'actions

A.10.1. Négation

A.10.2. Symétrie

A.10.3. Dualité

A.11. Homogénéité

A.12. Universalité

Procédons de même pour quelques méthodes de rangement :

M.1.1. Flux sortant (L)

M.1.2. Flux entrant (E)

M.1.3. Flot Net (NF)

M.2.1. Produit sortant (Π^+)

M.2.2. Produit entrant (Π^-)

M.2.3. Rapport des produits (RP)

M.3.1. Minimum sortant (min)

M.3.2. Minimum entrant (min,-)

M.4.1. Maximum sortant (max)

M.4.2. Maximum entrant (max,-)

M.5. Minimum lexicographique (ml)

M.6. Indifférence (I)

M.7. Copeland (CP)

Le tableau ci-dessous indique les propriétés satisfaites par les procédures de rangement ("N" signifie que la propriété n'est pas satisfaite; l'absence de "N" signifie que la propriété est satisfaite). Les démonstrations et contre-exemples sont connus ou faciles à établir.

	Méthodes												
	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	2.3.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	5.	6.	7.
A.1.													
A.2.													
A.3.1.													
A.3.2.	N	N		N	N		N	N	N	N	N	N	N
A.3.3.		N			N			N		N		N	N
A.3.4.	N			N			N		N		N	N	N
A.4.	N	N	N	N	N	N							
A.5.											N		N
A.6.1.		N	N		N	N		N	N	N			N
A.6.2.	N		N	N		N	N		N	N	N		N
A.7.1.		N	N		N	N		N		N			N
A.7.2.	N		N	N		N	N		N		N		N
A.7.3.													
A.8.1.	N	N	N		N			N	N	N	N		N
A.8.2.	N	N	N	N	N	N	N	N	N		N		N
A.8.3.	N	N	N		N			N	N	N		N	N
A.8.4.	N	N	N	N	N	N	N	N	N		N	N	N
A.9.1.	N	N		N	N	N	N	N	N	N	N		N
A.9.2.	N	N	N	N	N		N	N	N	N	N		N
A.9.3.		N	N	N	N	N		N		N			N
A.9.4.	N		N	N	N	N	N		N		N		N
A.9.5.	N	N	N		N	N		N		N			N
A.9.6.	N	N	N	N		N	N		N		N		N
A.10.1.				N	N	N	N	N	N	N	N		
A.10.2.	N	N		N	N		N	N	N	N	N		
A.10.3.	N	N		N	N	N	N	N	N	N	N		
A.11.													
A.12.													

REFERENCES

1. BARRETT C.R, P.K. PATTANAIK and M. SALLES (1990), On choosing rationally when preferences are fuzzy, Fuzzy Sets and Systems, 34, 197-212;

2. BOUYSSOU D. and PERNY P. (1990), Ranking methods for valued preference relations : a characterization of a method based on leaving and entering flows, Cahier du LAMSADE 101, Université de Paris Dauphine;

3. BOUYSSOU D. (1991), Ranking methods based on valued preference relations : a characterization of the net flow method, forthcoming in European Journal of Operational Research;

4. BOUYSSOU D. (1992), A note on the "min in favor" ranking method for valued preference relations, submitted;

5. FODOR J.C. and ROUBENS M. (1991), Aggregation and scoring procedures in multicriteria decision making methods, To be published in Proceedings of IFSA'91, Brussels;

6. FODOR J.C. and ROUBENS M. (1991), Aggregation, Scoring and Choice Procedures in MCDM Problems, Book in preparation;

7. PERNY P. (1992). Modélisation, agrégation et exploitation de préférences floues dans une problématique de rangement, Thèse pour l'obtention du titre de Docteur en Méthodes Scientifiques de Gestion, Université de Paris Dauphine;

8. PIRLOT M. (1991), Une caractérisation de la procédure max min, Document de Travail, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique;

9. ROUBENS M. (1990), Méthodes mathématiques en économie et en gestion, Notes de cours pour la 1ère Licence en Sciences Mathématiques, Université de Liège, Belgique;

10. VINCKE Ph. (1989), L'aide multicritère à la décision, Editions de l'Université de Bruxelles et Editions Ellipses;

11. VINCKE Ph. (1991), Exploitation d'une relation non valuée dans une problématique de rangement complet, Cahier du LAMSADE 62, Université de Paris Dauphine.