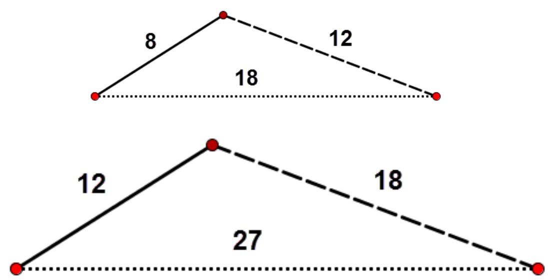
Driehoeken met onderling 5 gelijke zijden en hoeken

Antonella Perucca en Luc Van den Broeck

Om congruentie van driehoeken te hebben zijn drie voorwaarden vaak voldoende, bijvoorbeeld in het geval ZZZ of ZHZ of HZH (maar niet in het geval HHH). Twee driehoeken die onderling vijf hoeken of zijden gemeen hebben, kunnen per uitzondering gelijkvormige zijn zonder congruent te zijn. Dit is het geval bij de zogenaamde 5-con driehoeken. Ze hebben onderling drie hoeken en twee zijden gemeen. Hierover gaat deze korte bijdrage, die leerkrachten uit een vierde jaar aso en tso zou kunnen inspireren tot een interessante onderzoeksvraag.

Bekijk even de onderstaande driehoeken: de eerste heeft zijden 8, 12 en 18 en de tweede heeft zijden 12, 18 en 27. De zijden 12 en 18 zijn gemeenschappelijk. Bovendien merk je dat de tweede driehoek anderhalve keer zo groot is als de eerste. De twee driehoeken zijn gelijkvormig en hebben dus onderling gelijke hoeken. Let wel op. De hoek tussen de zijden met lengte 12 en 18 is de ene keer stomp en de andere keer scherp. Het zijn dus *niet de overeenkomstige hoeken* die gelijk zijn. Maar dat doet niets af aan de gelijkvormigheid. In de onderstaande figuur zie je een eerste voorbeeld van twee 5-con driehoeken.



Figuur 1 twee 5-con driehoeken

Algemene 5-con driehoeken

Neem een driehoek met zijden 1, λ en λ^2 en een andere driehoek met zijden λ, λ^2 en λ^3. Deze twee driehoeken hebben twee gemeenschappelijke zijden, nl. λ en λ^2. De lengten van de zijden bewijzen ook dat de twee driehoeken gelijkvormig zijn met vergrotingsfactor λ. De drie hoeken van de ene driehoek zijn dus gelijk aan de drie hoeken van de andere driehoek.

De vergrotingsfactor λ mag echter niet willekeurig gekozen worden. Als λ gelijk is aan 1 dan zijn de beide driehoeken congruent en dat is niet de bedoeling. Ze moeten gelijkvormig zijn zonder congruent te zijn. De factor λ is dus verschillend van nul. Zonder verlies van de algemeenheid kiezen we λ strikt groter dan 1. Immers indien de factor λ kleiner is dan 1 kunnen we overgaan op de inverse $\frac{1}{\lambda}$ van deze factor.

De gelijkvormigheidsfactor ondergaat ook een beperking door de driehoeksongelijkheid. Elke zijde van de driehoek is kleiner dan de som van de overige twee. Passen we dit toe op de langste zijde dan vinden we dat

$$\lambda^2 < \lambda + 1$$

waaruit we afleiden dat

$$\lambda^2 - \lambda - 1 < 0$$

of dat

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \lambda < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Samengevat geeft dit de volgende beperking

$$1 < \lambda < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

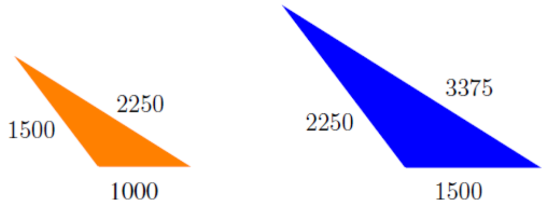
De driehoeken die hierboven beschreven werden, zijn niet de enige 5-con driehoeken. Als de kortste van de zes zijden niet gelijk is aan 1 maar aan r dan vinden we voor de zijden van de eerste driehoek r, $r \cdot \lambda$ en $r \cdot \lambda^2$ en voor de zijden van de tweede driehoek $r \cdot \lambda$, $r \cdot \lambda^2$ en $r \cdot \lambda^3$.

Typisch voor deze driehoeken is dat ze noch gelijkbenig noch gelijkzijdig kunnen zijn. Een andere merkwaardigheid: het meetkundige gemiddelde van de kortste en van de langste zijde van elke driehoek is gelijk aan de overblijvende zijde.

Stellen we $r = 1000$ en $\lambda = 1{,}1$ dan zijn de bijbehorende 5-con driehoeken scherphoekig.

Figuur 2 Scherphoekige 5-con driehoeken

Nemen we $r = 1000$ en $\lambda = 1{,}5$ dan zijn ze stomphoekig.



Figuur 3 Stomphoekige 5-con driehoeken

Bestaan er ook rechthoekige?

Het antwoord op deze vraag is positief. Door te eisen dat een 5-con driehoek rechthoekig is, wordt de waarde van λ nog meer beperkt want als we de stelling van Pythagoras toepassen op de zijden r, $r \cdot \lambda$ en $r \cdot \lambda^2$ vinden we dat

$$1 + \lambda^2 = \lambda^4.$$

De enige waarde groter dan 1 die hieraan voldoet is

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1{,}2720\ldots$$

Deze vergrotingsfactor is gelijk aan de wortel van het getal van de gulden snede.

Hiermee ligt de vorm van een rechthoekige 5-con driehoek helemaal vast. Je kunt narekenen dat de scherpste hoek van deze driehoek gelijk is aan 38°10’22” en dat de andere scherpe hoek gelijk is aan 51°49’38”.

Uitdieping voor de lezer

Voor de lezer, en eventueel voor de leerling, die nog wat verder wil doordenken over het onderwerp van de 5-con driehoeken, stellen we nog twee bijkomende vragen.

Bestaan er rechthoekige 5-con driehoeken met gehele zijden? Kan je dit ook aantonen?

Toon aan dat het harmonische gemiddelde van twee willekeurige getallen, het meetkundig gemiddelde en het rekenkundige gemiddelde van deze getallen een rechthoekige driehoek vormen als en slechts als deze driehoek een 5-con driehoek is.

Veel succes met het oplossen van deze vragen.

Over de auteur

Antonella Perucca is professor aan de universiteit van Luxemburg. Ze doet onderzoek in getaltheorie en in algebraïsche groepen en is geïnteresseerd in didactische onderwerpen binnen de wiskunde op middelbareschoolniveau. Ze maakt ook deel uit van het wiskundeteam dat beloftevolle leerlingen uit het secundair onderwijs voorbereidt op de internationale wiskunde olympiade.

Onlangs voegde Antonella aan Wikipedia een pagina toe waarin ze de belangrijkste informatie rond de 5-con driehoeken samenbracht (https://en.wikipedia.org/wiki/5-Con_triangles).

Bronnen

Pawley, Richard G. (1967). *5-Con triangles*. The Mathematics Teacher. National Council of Teachers of Mathematics. 60 (5, May 1967): 438--443. Retrieved 6 March 2017.

Jones, Robert T.; Peterson, Bruce B. (1974). *Almost Congruent Triangles*. Mathematics Magazine. Mathematical Association of America. 47 (4, Sep. 1974): 180--189. Retrieved 6 March 2017.

School Mathematics Study Group. (1960). *Mathematics for high school--Geometry. Student's text*. Geometry. 2. New Haven: Yale University Press. p. 382.

Thebault, Victor; Pinzka, C. F. (1955). *E1162*. The American Mathematical Monthly. Mathematical Association of America. 62, Dec. 1955 (10): 729--730. Retrieved 6 March 2017.