# Sur les uninormes idempotentes discrètes

## LFA 2017

Jimmy Devillet

en collaboration avec Miguel Couceiro et Jean-Luc Marichal

Université du Luxembourg

# Résumé

Nous allons donner différentes caractérisations de la classe des uninormes idempotentes discrètes (axiomatique, algébrique et graphique).

Ces opérations sont importantes car elles généralisent les t-normes et t-conormes qui sont des connecteurs flous.

Mais nous allons aussi caractériser des classes d'opérations plus générales.

# Connexion et courbes de niveau

Soit $X$ un ensemble non vide et soit $F\colon X^2 \to X$

**Définition**

- Les points $(x, y), (u, v) \in X^2$ sont *$F$-connectés* si

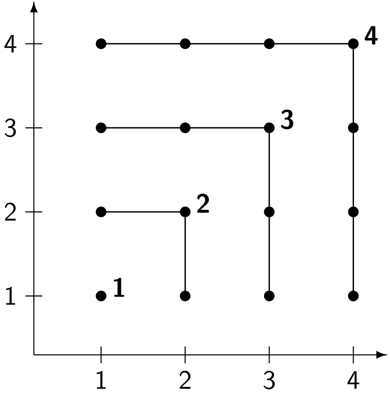
$$F(x, y) \ = \ F(u, v)$$

- Le point $(x, y) \in X^2$ est *$F$-isolé* s'il n'est $F$-connecté à aucun autre point de $X^2$

# Connexion et courbes de niveau

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $X_n = \{1, \ldots, n\}$ doté de $\leq$

**Exemple.** $F(x, y) = \max\{x, y\}$ sur $(X_4, \leq)$



# Conservativité et idempotence

**Définition**

$F\colon X^2 \to X$ est dit

- *conservatif* si
$$F(x, y) \in \{x, y\}$$
- *idempotent* si
$$F(x, x) = x$$

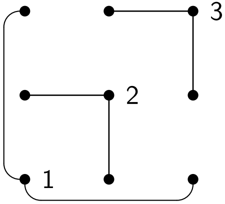
# Interprétation graphique de la conservativité

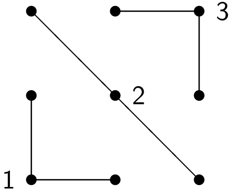
Soit $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$

**Proposition**

$F\colon X^2 \to X$ est conservatif ssi

- $F$ est idempotent
- tout point $(x,y) \notin \Delta_X$ est $F$-connecté à $(x,x)$ ou $(y,y)$



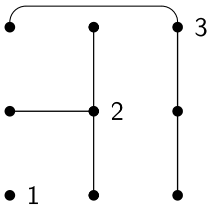
# Interprétation graphique de l'élément neutre

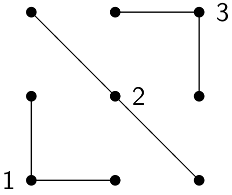
**Définition.** Un élément $e \in X$ est appelé un *élément neutre* pour $F\colon X^2 \to X$ si

$$F(x,e) \;=\; F(e,x) \;=\; x$$

**Proposition**

Supposons que $F\colon X^2 \to X$ soit conservatif et soit $e \in X$.
Alors $e$ est un élément neutre ssi $(e,e)$ est $F$-isolé



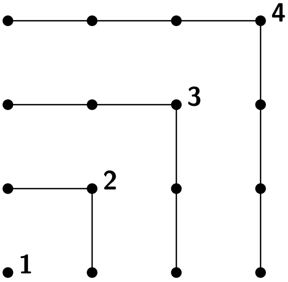
# Suite des degrés

Rappelons que $X_n = \{1, ..., n\}$

**Définition.** Soit $F\colon X_n^2 \to X_n$ et soit $z \in X_n$. Le *$F$-degré de $z$*, noté $\deg_F(z)$, est le nombre de points $(x, y) \neq (z, z)$ tels que $F(x, y) = F(z, z)$

**Définition.** Soit $F\colon X_n^2 \to X_n$. La *suite des degrés de $F$*, notée $\deg_F$, est la suite non décroissante à $n$ éléments des degrés $\deg_F(x)$, $x \in X_n$

# Suite des degrés




$$\mathbf{1} \quad < \quad \mathbf{2} \quad < \quad \mathbf{3} \quad < \quad \mathbf{4}$$

$$\deg_F = (0, 2, 4, 6)$$

# Une classe d'opérations associatives

Nous nous intéressons à la classe des $F\colon X^2 \to X$ qui sont

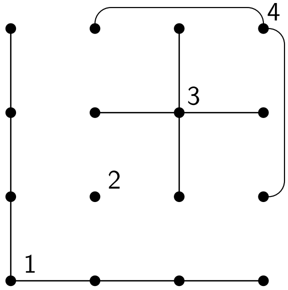
- associatifs
- conservatifs
- symétriques

**Remarque :** Si nous ajoutons l'existence d'un élément neutre ainsi que la non décroissance par rapport à un ordre total $\leq$ sur $X$ alors nous retrouvons la classe des uninormes idempotentes.

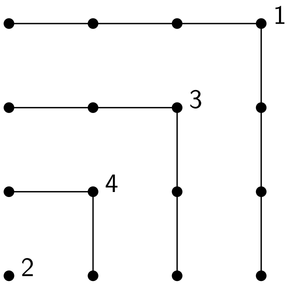
# Une première caractérisation

**Théorème** (Länger, 1980)

$F\colon X^2 \to X$ est associatif, conservatif et symétrique ssi il existe un ordre total $\leq$ sur $X$ tel que $F = \max_{\leq}$.




$1 < 2 < 3 < 4$




$2 \prec 4 \prec 3 \prec 1$

# Une deuxième caractérisation

**Théorème**

Soit $F\colon X^2 \to X$. Si $X = X_n$, alors les conditions suivantes sont équivalentes

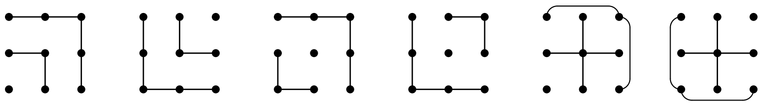
(i) $F$ est associatif, conservatif et symétrique

(ii) $F = \max_{\leq}$ pour un ordre total $\leq$ sur $X_n$

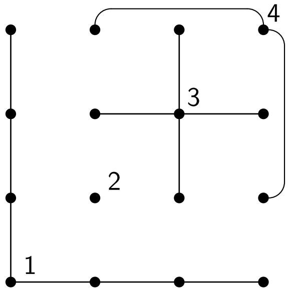
(iii) $F$ est conservatif et $\deg_F = (0, 2, 4, \ldots, 2n-2)$

Il y a exactement $n!$ opérations $F\colon X_n^2 \to X_n$ satisfaisant une des conditions (i)–(iii). De plus, l'ordre total $\leq$ considéré dans (ii) est déterminé par la condition : $x \preceq y$ ssi $\deg_F(x) \leq \deg_F(y)$.

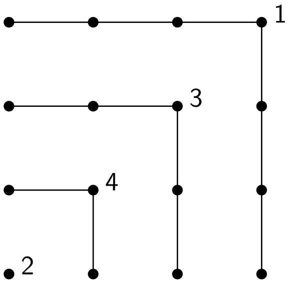
## Opérations sur $X_3$



# Le cas non décroissant




$$1 < 2 < 3 < 4$$




$$2 \prec 4 \prec 3 \prec 1$$

# Ordres totaux unimodaux

**Définition**.(Black, 1948) Soient $\leq, \preceq$ des ordres totaux sur $X$. L'ordre total $\preceq$ est dit *unimodal par rapport à* $\leq$ si pour tout $a, b, c \in X$ tels que $a < b < c$ nous avons $b \prec a$ ou $b \prec c$

**Exemple**. L'ordre total $\preceq$ sur

$$X_4 = \{1 < 2 < 3 < 4\}$$

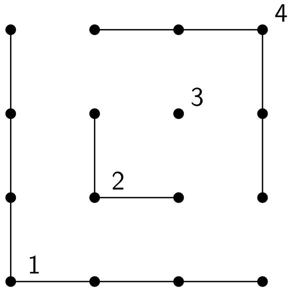
défini par

$$3 \prec 2 \prec 4 \prec 1$$

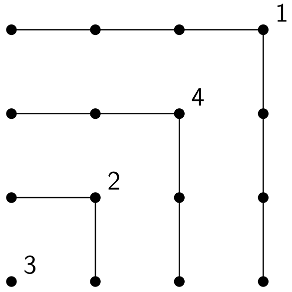
est unimodal par rapport à $\leq$

**Remarque :** Il y a exactement $2^{n-1}$ ordres totaux unimodaux sur $(X_n, \leq)$.

# Ordres totaux unimodaux




$1 < 2 < 3 < 4$




$3 \prec 2 \prec 4 \prec 1$

# Une troisième caractérisation

**Théorème**

Soit $\leq$ un ordre total sur $X$ et soit $F\colon X^2 \to X$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $F$ est associatif, conservatif, symétrique et non décroissant

(ii) $F = \max_{\preceq}$ pour un ordre total $\preceq$ sur $X$ qui est unimodal par rapport à $\leq$

# Une quatrième caractérisation

**Théorème**

Soit $\leq$ un ordre total sur $X$ et soit $F\colon X^2 \to X$. Si $(X, \leq) = (X_n, \leq)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $F$ est associatif, conservatif, symétrique et non décroissant

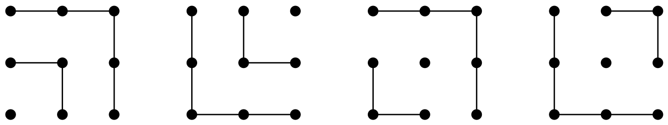
(ii) $F = \max_{\preceq}$ pour un ordre total $\preceq$ sur $X_n$ qui est unimodal par rapport à $\leq$

(iii) $F$ est conservatif, non décroissant et $\deg_F = (0, 2, 4, \ldots, 2n-2)$

(iv) $F$ est associatif, idempotent, symétrique, non décroissant et a un élément neutre.

Il y a exactement $2^{n-1}$ opérations $F\colon X_n^2 \to X_n$ satisfaisant une des conditions (i)–(iv).

# Opérations sur $X_3$



## Références


D. Black. On the rationale of group decision-making. *J Polit Economy*, 56(1) :23–34, 1948

D. Ciucci and D. Dubois. A map of dependencies among three-valued logics. *Information Sciences*, 250 :162–177, 2013.

M. Couceiro, J. Devillet, and J.-L. Marichal. Characterizations of idempotent discrete uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*. In press. https ://doi.org/10.1016/j.fss.2017.06.013

M. Couceiro, J. Devillet, and J.-L. Marichal. Quasitrivial semigroups : characterizations and enumerations. Submitted for publication. arXiv :1709.09162.

B. De Baets, J. Fodor, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. Idempotent uninorms on finite ordinal scales. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17(1) :1–14, 2009.

J. Lawry and D. Dubois. A Bipolar Framework for Combining Beliefs about Vague Propositions. Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2012), Rome, Italy, June 10-14, 2012. In : G. Brewka, T. Eiter, S. McIlraith (eds.), AAAI Press, 2012.

H. Länger. The free algebra in the variety generated by quasi-trivial semigroups. *Semigroup forum*, 20 :151–156, 1980.