Agrégation des valeurs médianes et fonctions compatibles pour la comparaison

Miguel COUCEIRO
LORIA
CNRS - Inria G. E. - U. Lorraine
miguel.couceiro@inria.fr

Jean-Luc MARICHAL
Mathematics Research Unit
University of Luxembourg
jean-luc.marichal@uni.lu

Bruno TEHEUX
Mathematics Research Unit
University of Luxembourg
bruno.teheux@uni.lu

Résumé :

Nous caractérisons les fonctions d'agrégation qui préservent la valeur médiane dans le cas où l'opération médiane est conservative. Nous commençons par rappeler les notions d'algèbre et de demi-treillis médian en les introduisant à partir de la notion de valeur médiane sur les réels. Nous obtenons également une double caractérisation des algèbres médianes conservatives en termes de sous-structures interdites et de représentations par des chaînes.

Mots-clés :

Fonctions d'agrégation. Valeur médiane. Algèbre médiane. Treillis distributifs.

Abstract:

We obtain a characterization of the aggregation functions which preserve the median operation, when this operation is conservative. We first recall the definitions of the notions of median algebras and semilattices by introducing them from the known example of the median operation over the reals. We also obtain a characterization of conservative median algebras in terms of forbidden substructures as well as representations by chains.

Keywords:

Aggregation functions. Median operation. Median algebras. Distributive lattices.

1 Introduction

L'*opération médiane* sur $\mathbb{R}$ est l'opération ternaire $\mathbf{m}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbf{m}(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \qquad (1)$$

où $\wedge$ et $\vee$ désignent respectivement les opérations *minimum* et *maximum* sur $\mathbb{R}$. De manière équivalente, $\mathbf{m}$ peut être définie comme l'opération symétrique qui vérifie $\mathbf{m}(x, y, z) = y$ si $x \leq y \leq z$. Cette dernière formulation justifie le choix du vocabulaire, puisque la valeur de l'opération médiane sur trois éléments distincts x, y, z de $\mathbb{R}$ est celui de ces éléments qui n'est pas une borne de l'enveloppe convexe de $\{x, y, z\}$. Pour tout $n > 0$, l'opération $\mathbf{m}$ est naturellement étendue en une opération $\mathbf{m}\colon \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^n$ composante à composante, c'est-à-dire en posant

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})_i = \mathbf{m}(x_i, y_i, z_i), \qquad (2)$$

pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ et tout $i \in [n]$.

Le premier objectif de cet article est de caractériser les fonctions $f\colon E^n \to \mathbb{R}$, où E est un intervalle non vide (borné ou non) de $\mathbb{R}$, qui respectent l'opération médiane, c'est-à-dire qui vérifient la condition

$$f(\mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) = \mathbf{m}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z})), \qquad (3)$$

pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E^n$. De telles fonctions peuvent être considérées comme des fonctions d'agrégation (au sens large) qui préservent la valeur médiane. Observons que la condition (3) constitue une relaxation de la condition d'être une fonction compatible avec la comparaison (voir par exemple [9]). Rappelons que $f\colon E^n \to \mathbb{R}$ est *compatible avec la comparaison* si

$$f(\mathbf{x}) \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \end{array} \right\} f(\mathbf{x}') \quad \Longrightarrow \quad f(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \end{array} \right\} f(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}')),$$

pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E^n$ et toute superposition $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ de bijections croissantes de E dans E. Dans le cas où E est un intervalle ouvert, ces fonctions ont été caractérisées comme suit.

Proposition 1 ([9])**.** *Supposons que E est ouvert. Une fonction $f\colon E^n \to \mathbb{R}$ est compatible avec la comparaison si et seulement s'il existe une fonction strictement monotone ou constante $g\colon E \to \mathbb{R}$ et $k \leq n$ tels que $f(\mathbf{x}) = g(x_k)$ pour tout $\mathbf{x} \in E^n$.*

Dans cet article, nous prouvons que cette caractérisation se généralise aux fonctions qui vérifient la condition (3) de la manière suivante.

Proposition 2. *Supposons que E est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction $f\colon E^n \to \mathbb{R}$ satisfait la condition* (3) *si et seulement s'il existe une fonction monotone $g\colon E \to \mathbb{R}$ et $k \leq n$ tels que $f(\mathbf{x}) = g(x_k)$ pour tout $\mathbf{x} \in E^n$.*

Ainsi, c'est essentiellement la condition de stricte monotonie de la Proposition 1 qui a été relâchée pour obtenir la Proposition 2. En particulier, les fonctions $f\colon E \to E$ qui préservent la valeur médiane sont exactement les fonctions monotones.

Remarquons que l'expression (1) peut être utilisée dans des structures plus générales que $\mathbb{R}$ pour définir une notion de valeur médiane. Ainsi, si $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ est un treillis distributif, alors l'expression (1) est un terme sur

$\mathbf{L}$ qui est couramment appelé *terme médian de* $\mathbf{L}$, que nous notons $\mathbf{m}_{\mathbf{L}}$. Cette observation a amené certains auteurs à abstraire la notion de valeur médiane d'une notion d'ordre sous-jacente [4, 8]. Cette approche a donné lieu à l'introduction de la classe des algèbres médianes. Une *algèbre médiane* est une structure $\mathbf{A} = \langle A, \mathbf{m}\rangle$ où $\mathbf{m}\colon A^3 \to A$ est une opération ternaire sur A qui satisfait les équations suivantes :

$$\mathbf{m}(x,x,y) = x,$$
$$\mathbf{m}(x,y,z) = \mathbf{m}(y,x,z) = \mathbf{m}(y,z,x),$$
$$\mathbf{m}(\mathbf{m}(x,y,z),t,u) = \mathbf{m}(x,\mathbf{m}(y,t,u),\mathbf{m}(z,t,u)).$$

Il s'agit d'un choix raisonnable d'équations pour définir de manière abstraite la notion de valeur médiane, puisque ces équations sont satisfaites par l'opération médiane sur n'importe quelle chaîne $\mathbf{L}$. Comme justification supplémentaire du choix de cette base équationnelle, rappelons le résultat suivant.

Proposition 3 ([3]). *Soit* $\mathbf{m}$ *une opération ternaire sur un ensemble non vide* A*. L'algèbre* $\mathbf{A} = \langle A, \mathbf{m}\rangle$ *est une algèbre médiane si et seulement s'il existe un treillis distributif* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ *tel que* $A \subseteq L$ *et* $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\mathbf{L}}|_A$.

En d'autres mots, la Proposition 3 stipule que toute algèbre médiane est une sous-algèbre médiane d'un treillis distributif.

C'est dans le cadre général des algèbres médianes que nous obtenons les résultats de cet article. Ainsi, le problème auquel nous nous intéressons est la caractérisation des fonctions $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ entre deux algèbres médianes $\mathbf{A} = \langle A, \mathbf{m}_{\mathbf{A}}\rangle$ et $\mathbf{B} = \langle B, \mathbf{m}_{\mathbf{B}}\rangle$ qui vérifient la condition

$$f(\mathbf{m}_{\mathbf{A}}(x,y,z)) = \mathbf{m}_{\mathbf{B}}(f(x), f(y), f(z)), \qquad (4)$$

pour tous $x, y, z \in A$. On dit d'une telle fonction qu'elle *préserve la valeur médiane*.

Les résultats que nous obtenons ne concernent pas toute la classe des algèbres médianes, mais la sous-classe des algèbres médianes *conservatives*, c'est-à-dire des algèbres médianes $\mathbf{A} = \langle A, \mathbf{m}\rangle$ qui vérifient la condition

$$\mathbf{m}(x,y,z) \in \{x,y,z\},$$

pour tous $x, y, z \in A$. Comme observé dans [10, §11], cette sous-classe contient les algèbres médianes issues de chaînes, mais pas seulement puisque le terme médian de l'algèbre de Boole à quatre éléments est conservatif.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous rappelons les liens qui existent entre la notion d'ensemble ordonné et celle d'algèbre médiane. Nous caractérisons également les algèbres médianes conservatives. Dans la section 3, nous caractérisons les fonctions $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{B}$ qui préservent la valeur médiane, où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des algèbres médianes conservatives. Nous omettons les preuves, qui dépassent le cadre de cet article. Le lecteur intéressé pourra les consulter dans [5].

Nous renvoyons le lecteur à [4, 8] pour les premières apparitions de la notion d'algèbre médiane, et à [2] pour un article de synthèse à ce sujet. Dans cet article, nous adoptons également les notations suivantes. Pour tout entier strictement positif n, on note $[n]$ l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. Les algèbres sont notées par des lettres majuscules en gras $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ et leur univers par des lettres majuscules $A, B, \dots$ Nous supposons que le lecteur est familier avec les rudiments de la théorie de l'ordre et nous le renvoyons à [6, 7] pour une introduction sur ce sujet.

2 Caractérisation des algèbres médianes conservatives

Bien que la définition de la notion d'algèbre médiane se fasse de manière indépendante à toute notion d'ordre, il est remarquable que de nombreux ordres partiels sur A puissent être définis à partir d'une algèbre médiane $\mathbf{A} = \langle A, \mathbf{m}\rangle$. En effet, pour tout $a \in A$, la relation $\leq_a$ définie sur A par

$$x \leq_a y \qquad \text{si} \qquad \mathbf{m}(a,x,y) = x$$

est une relation d'ordre partielle. En fait, la structure $\langle A, \leq_a\rangle$ est un $\wedge$-demi-treillis qui admet a comme *minimum* et où l'opération $\wedge$ est définie par

$$x \wedge y = \mathbf{m}(a,x,y).$$

Les $\wedge$-demi-treillis $\langle A, \leq_a\rangle$ qui sont obtenus à partir d'une algèbre médiane $\langle A, \mathbf{m}\rangle$ par cette construction sont appelés *demi-treillis médians* et sont caractérisés de la manière suivante.

Proposition 4 ([11]). *Un* $\wedge$*-demi-treillis* $\mathbf{A} = \langle A, \leq\rangle$ *est un demi-treillis median si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) tout triplet d'élements qui admettent deux à deux une borne supérieure admet une borne supérieure,

(ii) pour tout $x \in A$*, la restriction de* $\leq$ *à* $\{y \in A \mid y \leq x\}$ *définit une structure de treillis distributif borné.*

La Proposition 4 permet ainsi de définir une opération $\mathbf{m}_{\leq}$ par l'expression (1) pour tout demi-treillis médian $\langle A, \leq\rangle$. On peut montrer qu'alors $\langle A, \mathbf{m}_{\leq}\rangle$ est une algèbre médiane. Ainsi, on peut considérer que la notion de demi-treillis médian est la structure ordonnée la plus générale dans laquelle une opération médiane peut être définie. Il s'ensuit que les problèmes d'agrégation posés dans des structures ordonnées et impliquant la notion de valeur médiane peuvent être posés dans la classe des demi-treillis médians, qui est plus générale que celle des treillis distributifs.

On peut également prouver [1, Lemma 3 (6)] que si a est un élément d'une algèbre médiane $\langle A, \mathbf{m}\rangle$ alors

$$\mathbf{m}_{\leq_a} = \mathbf{m},$$

ce qui prouve que $\mathbf{A}$ peut être défini à partir de $\langle A, \leq_a\rangle$ pour tout $a \in A$. Comme le montre le résultat suivant, la relation $\leq_a$ peut en fait encoder beaucoup plus d'informations sur la structure de l'algèbre $\mathbf{A} = \langle A, \mathbf{m}\rangle$ que la seule connaissance de $\mathbf{m}$.

Proposition 5 ([8, 10])**.** *Soit $\mathbf{A} = \langle A, \mathbf{m}\rangle$ une algèbre médiane.*

(1) S'il existe $a, a' \in A$ tels que $\mathbf{m}(a, x, a') = x$ pour tout $x \in A$, alors $\langle A, \leq_a\rangle$ est un ordre de treillis distributif borné par a et a', et $\mathbf{m}$ en est son terme médian.

(2) Si pour tout $a \in A$ il existe $a' \in A$ tel que $\mathbf{m}(a, x, a') = x$ pour tout $x \in A$, alors $\langle A, \leq_a\rangle$ est un ordre booléen pour tout $a \in A$, et $\mathbf{m}$ en est son terme médian.

Comme nous allons voir, les ordres $\leq_a$ associés aux éléments $a \in A$ d'une algèbre médiane $\mathbf{A}$ permettent également de caractériser le caractère conservatif de ces algèbres. Nous qualifions de *conservatif* tout $\wedge$-demi-treillis median dont l'opération médiane associée par (1) définit une algèbre médiane conservative. Selon la Proposition 4, il existe trois raisons de nature différente pour qu'un $\wedge$-demi-treillis ne soit pas médian conservatif. Cela arrive tout d'abord si le demi-treillis contient un élément x tel que $\{y \mid y \leq x\}$ n'est pas un treillis distributif, comme dans la figure 1(a) qui représente le treillis borné N_5 qui n'est pas distributif. Cela arrive également si le demi-treillis contient trois éléments b, c, d qui n'admettent pas de borne supérieure alors qu'ils sont deux à deux bornés supérieurement, comme dans la figure 1(e). Finalement, il peut s'agir d'un demi-treillis médian, mais qui n'est pas conservatif, comme dans les figures 1(c)–1(d) qui représentent des demi-treillis qui contiennent une copie de $\mathbf{A}_2$. Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Lemme 6. *Les ensembles partiellement ordonnés $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_5$ représentés dans la figure 1 ne sont pas des demi-treillis médians conservatifs.*

Ce résultat technique nous amène à la première caractérisation des algèbres médianes conservatives. Ce résultat s'énonce en termes de sous-structures interdites.

Théorème 7. *Pour toute algèbre médiane $\mathbf{A}$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathbf{A}$ est une algèbre médiane conservative.

(ii) $\mathbf{A}$ ne contient pas l'algèbre médiane $\mathbf{A}_2$ de la figure 1(b) en tant que sous-algèbre.

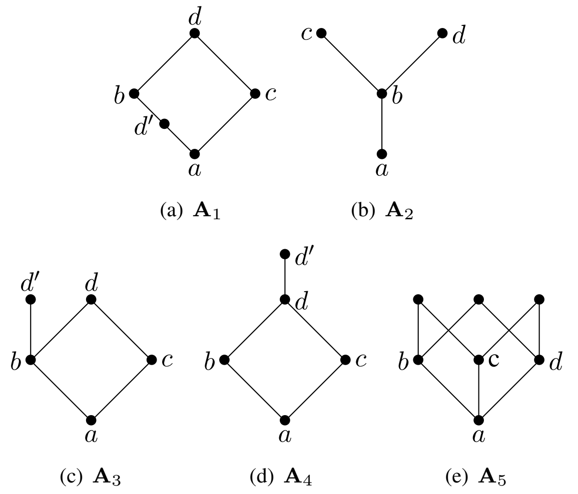
(iii) Pour tout $a \in A$, le demi-treillis $\langle A, \leq_a\rangle$ ne contient pas de copie de l'ensemble partiellement ordonné représenté dans la figure 1(b).

Démonstration. Remarquons que tout demi-treillis médian de cardinalité inférieure ou égale à 4 est conservatif, sauf le demi-treillis représenté dans la figure 1(b). On peut donc supposer que $|A| \geq 5$.

(ii) $\iff$ (iii) : C'est une conséquence directe de la définition de $\leq_a$.

(i) $\implies$ (iii) : C'est une conséquence du Lemme 6.

(iii) $\implies$ (i) : Supposons que $\mathbf{A}$ n'est pas conservatif, c'est-à-dire qu'il existe $a, b, c, d \in A$ tels que $d := \mathbf{m}(a, b, c) \notin \{a, b, c\}$. Clairement, a, b et c doivent être des éléments distincts de A. Comme de plus $c <_c d$, on obtient que $\langle\{a, b, c, d\}, \leq_c\rangle$ est une copie de $\mathbf{A}_2$ dans $\langle A, \leq_c\rangle$. $\square$



(a) $\mathbf{A}_1$ (b) $\mathbf{A}_2$ (c) $\mathbf{A}_3$ (d) $\mathbf{A}_4$ (e) $\mathbf{A}_5$

Figure 1 – Exemples de demi-treillis qui ne sont pas médians conservatifs.

Nous obtenons une autre caractérisation des algèbres et demi-treillis médians conservatifs en terme de représentations par des chaînes. Ce résultat découle du lemme suivant. Si $\mathbf{C}_0 = \langle C_0, \leq_0, c_0\rangle$ et $\mathbf{C}_1 = \langle C_1, \leq_1, c_1\rangle$ sont deux chaînes bornées inférieurement par c_0 et c_1 respectivement, on note $\mathbf{C}_0 \bot \mathbf{C}_1$ l'ensemble ordonné obtenu en identifiant c_0 avec c_1 dans l'union disjointe de $\mathbf{C}_0$ et $\mathbf{C}_1$.

Lemme 8. *Pour toute algèbre médiane $\mathbf{A}$ telle que $|A| \geq 5$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathbf{A}$ est une algèbre médiane conservative.

(ii) Il existe $a \in A$ et des chaînes bornées inférieurement $\mathbf{C}_0$ et $\mathbf{C}_1$ telles que $\langle A, \leq_a\rangle$ est isomorphe à $\mathbf{C}_0 \bot \mathbf{C}_1$.

(iii) Pour tout $a \in A$, il existe des chaines bornées inférieurement $\mathbf{C}_0$ et $\mathbf{C}_1$ telles que $\langle A, \leq_a\rangle$ est isomorphe à $\mathbf{C}_0 \bot \mathbf{C}_1$.

Démonstration. (i) $\implies$ (iii) : Soit $a \in A$. D'abord, supposons que pour tous $b, c \in A \setminus \{a\}$ on a $\mathbf{m}(b, c, a) \neq a$. Comme $\mathbf{A}$ est conservatif, il vient $b \leq_a c$ ou $c \leq_a b$

pour tous $b, c \in A$. Il s'ensuit que $\leq_a$ est un ordre total avec borne inférieure a, et nous pouvons choisir $\mathbf{C}_1 = \langle A, \leq_a, a \rangle$ et $\mathbf{C}_2 = \langle \{a\}, \leq_a, a \rangle$.

Supposons maintenant qu'il existe des éléments $b, c \in A \setminus \{a\}$ tels que $\mathbf{m}(b, c, a) = a$, c'est-à-dire, $b \wedge c = a$. Montrons alors que pour tout $a \in A$,

$$d \neq a \implies \big(\mathbf{m}(b, d, a) \neq a \text{ ou } \mathbf{m}(c, d, a) \neq a\big). \quad (5)$$

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $d \neq a$ tel que $\mathbf{m}(b, d, a) = a$ et $\mathbf{m}(c, d, a) = a$. On peut montrer facilement (voir [5, Lemma 2]) que

$$\mathbf{m}(b, c, d) = \mathbf{m}\big(\mathbf{m}\big(\mathbf{m}(b, c, d), b, a\big), \mathbf{m}\big(\mathbf{m}(b, c, d), d, a\big), \mathbf{m}\big(\mathbf{m}(b, c, d), c, a\big)\big). \quad (6)$$

Supposons que $\mathbf{m}(b, c, d) = b$. Alors l'équation (6) est équivalente à

$$b = \mathbf{m}(b, \mathbf{m}(b, d, a), \mathbf{m}(b, c, a)) = a,$$

ce qui est impossible. Par symétrie, on obtient la même contradiction si $\mathbf{m}(b, c, d) \in \{c, d\}$.

Prouvons ensuite que pour tout $a \in A$,

$$d \neq a \implies \big(\mathbf{m}(b, d, a) = a \text{ ou } \mathbf{m}(c, d, a) = a\big). \quad (7)$$

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $d \neq a$ tel que $\mathbf{m}(b, d, a) \neq a$ et $\mathbf{m}(c, d, a) \neq a$. Comme $\mathbf{m}(b, c, a) = a$, on obtient $d \notin \{b, c\}$.

Si $\mathbf{m}(b, d, a) = d$ et $\mathbf{m}(c, d, a) = c$, alors $c \leq_a d \leq_a b$ ce qui contredit $b \wedge c = a$. De même, si $\mathbf{m}(b, d, a) = d$ et $\mathbf{m}(c, d, a) = d$, alors $d \leq_a b$ et $d \leq_a c$ ce qui contredit également $b \wedge c = a$. Le cas $\mathbf{m}(b, d, a) = b$ et $\mathbf{m}(c, d, a) = d$ nous mène à une contradiction similaire.

On a donc obtenu $\mathbf{m}(b, d, a) = b$ et $\mathbf{m}(c, d, a) = c$, et le $\leq_a$-demi-treillis médian défini à partir de la sous-algèbre $\mathbf{B} = \{a, b, c, d\}$ de $\mathbf{A}$ est le demi-treillis median associé à l'algèbre de Boole à quatre éléments. Choisissons $d' \in A \setminus \{a, b, c, d\}$. Par (5) et par symétrie, on peut supposer que $\mathbf{m}(b, d', a) \in \{b, d'\}$. Supposons d'abord que $\mathbf{m}(b, d', a) = d'$. Alors $\langle \{a, b, c, d, d'\}, \leq_a \rangle$ est le treillis N_5 (figure 1(a)) qui n'est pas un demi-treillis médian. Supposons ensuite que $\mathbf{m}(b, d', a) = b$. Dans ce cas, la restriction de $\leq_a$ à $\{a, b, c, d, d'\}$ est représenté par la figure 1(c) ou 1(d), ce qui est en contradiction avec la Proposition 6, et nous avons prouvé (7).

Posons alors $C_0 = \{d \in A \mid (b, d, a) \neq a\}$, $C_1 = \{d \in A \mid (c, d, a) \neq a\}$ ainsi que $\mathbf{C}_0 = \langle C_0, \leq_a, a \rangle$ et $\mathbf{C}_1 = \langle C_1, \leq_a, a \rangle$. D'après les équations (5) et (7), le demi-treillis median $\langle \mathbf{A}, \leq_a \rangle$ est isomorphe à $\mathbf{C}_0 \perp \mathbf{C}_1$.

(iii) $\implies$ (ii) : Trivial.

(ii) $\implies$ (i) : Soient $b, c, d \in \mathbf{C}_0 \perp \mathbf{C}_1$. Si $b, c, d \in C_i$ pour un $i \in \{0, 1\}$ alors $\mathbf{m}(b, c, d) \in \{b, c, d\}$. Sinon, si $b, c \in C_i$ et $d \notin C_i$, alors $\mathbf{m}(b, c, d) \in \{b, c\}$. □

Théorème 9. *Soit une algèbre médiane $\mathbf{A} = \langle A, \mathbf{m} \rangle$ avec $|A| \geq 5$. Alors $\mathbf{A}$ est conservatif si et seulement s'il existe un ordre total $\leq$ sur A tel que $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\leq}$.*

En particulier, si $\mathbf{A}$ est une algèbre médiane conservative dont l'opération médiane n'est pas celle associée à un ordre total, alors $\mathbf{A}$ est l'algèbre de Boole à quatre éléments.

Démonstration. Nous savons déjà que si $\leq$ est un ordre total sur A, alors $\langle A, \mathbf{m}_{\leq} \rangle$ est conservatif. Supposons maintenant que $\mathbf{A} = \langle A, \mathbf{m} \rangle$ est une algèbre médiane conservative avec $|A| \geq 5$. Considérons l'univers de l'ensemble partiellement ordonné $\mathbf{C}_0 \perp \mathbf{C}_1$ de la condition (ii) du Lemme 8 que l'on équipe avec la relation $\leq$ définie par $x \leq y$ si $x \in C_1$ et $y \in C_0$, ou $x, y \in C_0$ et $x \leq_0 y$, ou $x, y \in C_1$ et $y \leq_1 x$. Il s'agit clairement d'un ordre total et $\mathbf{m}_{\leq} = \mathbf{m}$.

Pour la seconde assertion, on note que la seule algèbre médiane conservative avec au plus quatre éléments dont l'opération médiane n'est pas celle d'un ordre total est l'algèbre de Boole à quatre éléments. □

3 Fonctions qui préservent les valeurs médianes entre algèbres médianes conservatives

Le Théorème 9 stipule que toute algèbre médiane conservative qui a au moins cinq éléments peut être représentée par une chaîne. On peut montrer que cette chaîne est unique [5], à isomorphisme ou isomorphisme dual près. Ce ordre est appelé l'*ordre de chaîne de* $\mathbf{A}$.

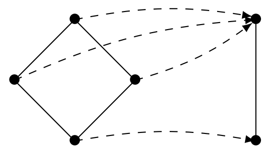
Nous caractérisons maintenant les fonctions $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ qui préservent la valeur médiane, où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux algèbres médianes conservatives. Rappelons qu'une fonction entre deux ensembles partiellement ordonnés est qualifiée de *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Proposition 10. *Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux algèbres médianes conservatives avec au moins cinq éléments. Une fonction $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ préserve la valeur médiane si et seulement si elle est monotone par rapport aux ordres de chaînes de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.*

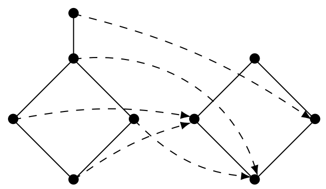
En particulier, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 11. *Une fonction $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ entre deux chaînes $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ préserve la valeur médiane si et seulement si elle est monotone.*

Notons que le Corollaire 11 n'est valide que pour les chaînes. Dans la figure 2(a), nous donnons en effet un exemple de fonction monotone qui ne préserve pas la valeur médiane, et dans la figure 2(b), nous donnons un



(a) Une fonction monotone qui ne préserve pas la valeur médiane.



(b) Une fonction qui préserve la valeur médiane sans être monotone.

Figure 2 – La monotonie n'est pas toujours équivalente à préservation de la valeur médiane.

exemple de fonction qui préserve la valeur médiane sans être monotone.

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des algèbres médianes, si $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ préserve la valeur médiane et si $\mathbf{A}$ est conservatif, alors $f(\mathbf{A})$ est également conservatif. On obtient donc le corollaire suivant.

Corollaire 12. *Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux algèbres médianes et $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Si $\mathbf{A}$ est conservatif et si $|A|, |f(A)| \geq 5$, alors f préserve la valeur médiane si et seulement si $f(\mathbf{A})$ est une algèbre médiane conservative et f est monotone par rapport aux ordres de chaînes de $\mathbf{A}$ et $f(\mathbf{A})$.*

Les résultats précédents peuvent être étendus aux produits d'algèbres médianes conservatives, ce qui permet d'obtenir la Proposition 2. Pour cela, introduisons les notations suivantes. Si $f_i\colon A_i \to A'_i$ $(i \in [n])$ est une famille de fonctions, on définit la fonction $(f_1, \ldots, f_n)\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to A'_1 \times \cdots \times A'_n$ par

$$(f_1, \ldots, f_n)(x_1, \ldots, x_n) := (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)).$$

La proposition suivante énonce que les fonctions qui préservent la valeur médiane entre des produits de chaînes se décomposent composante à composante.

Proposition 13. *Soient $\mathbf{A} = \mathbf{C}_1 \times \cdots \times \mathbf{C}_k$ et $\mathbf{B} = \mathbf{D}_1 \times \cdots \times \mathbf{D}_n$ deux produits de chaînes. Une fonction $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ préserve la valeur médiane si et seulement si il existe $\sigma\colon [n] \to [k]$ et des fonctions monotones $f_i\colon \mathbf{C}_{\sigma(i)} \to \mathbf{D}_i$ pour tous $i \in [n]$ tels que $f = (f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(n)})$.*

En particulier, si $\mathbf{A}$ est une chaîne, la Proposition 13 nous permet de caractériser les fonctions d'agrégation $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ qui préservent la valeur médiane. Plus généralement, on obtient le corollaire suivant. Si $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ et $k \in [n]$, on désigne par π_k la projection de A sur A_k.

Corollaire 14. *Soient $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ et $\mathbf{D}$ des chaînes. Une fonction $f\colon \mathbf{C}_1 \times \cdots \times \mathbf{C}_n \to \mathbf{D}$ préserve la valeur médiane si et seulement s'il existe $k \in [n]$ et une fonction monotone $g\colon \mathbf{C}_k \to \mathbf{D}$ telle que $f = g \circ \pi_k$.*

Ainsi, sous les hypothèses du Corollaire 14, la condition de préserver la valeur médiane est très forte puisqu'elle implique le caractère « dictatorial » de f. Notons que la Proposition 2 est une conséquence directe du Corollaire 14.

4 Conclusions

Dans cet article, nous avons caractérisé les algèbres médianes conservatives qui ont au moins cinq éléments en terme de sous-structure interdite et nous en avons donné des représentations par des chaînes. Nous avons également caractérisé les fonctions qui préservent la valeur médiane entre les produits finis de ces algèbres. Cette caractérisation est une généralisation des résultats connus pour les fonctions compatibles avec la comparaison.

Dans le futur, nous tenterons d'obtenir ce type de caractérisation pour d'autres classes d'algèbres médianes.

Références

[1] S. P. Avann. Metric ternary distributive semilattices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12 :407–414, 1961.

[2] H. J. Bandelt and J. Hedlíková. Median algebras. *Discrete mathematics*, 45 :1–30, 1983.

[3] H. J. Bandelt. Discrete ordered sets whose covering graphs are median. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 91(1) :6–8, 1984.

[4] G. Birkhoff and S. A. Kiss. A ternary operation in distributive lattices. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53 :749–752, 1947.

[5] M. Couceiro, J.-L. Marichal and B. Teheux, Conservative Median Algebras, `arXiv:1405.0935`.

[6] B. A. Davey and H. A. Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, New York, second edition, 2002.

[7] G. Grätzer. *General lattice theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 1998. New appendices by the author with B. A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H. A. Priestley, H. Rose, E. T. Schmidt, S. E. Schmidt, F. Wehrung and R. Wille.

[8] A. A. Grau. Ternary Boolean algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (May 1944) :567–572, 1947.

[9] J. L. Marichal and R. Mesiar. Meaningful aggregation functions mapping ordinal scales into an ordinal scale : A state of the art. *Aequationes Mathematicae*, 77 (3) : 207–236, 2009.

[10] M. Sholander. Trees, lattices, order, and betweenness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(3) :369–381, 1952.

[11] M. Sholander. Medians, lattices, and trees. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(5) :808–812, 1954.

Remerciements

Ce projet a été soutenu par le projet de recherche interne F1R-MTH-PUL-15MRO3 de l'Université de Luxembourg.