

# **Mathématique physique 3**

Filière - Mathématiques

**Bachelier en Sciences et Ingénierie**

**Norbert Poncin**

**Université du Luxembourg**

# 1 Informations générales

**Titulaire** : Norbert Poncin

**Contact** : Toute question relative au cours peut être adressée par email à [norbert.poncin@uni.lu](mailto:norbert.poncin@uni.lu)

**Leçons par semestre** : 45

**Crédits ECTS** : 4

**Langue d'enseignement** : Français

**Type d'enseignement** : Cours magistral et travaux dirigés

**Conditions préalables** : Mathématique physique 1 et 2

**Évaluation** : Examen oral (ou écrit, si un nombre trop élevé d'étudiants empêche l'organisation pratique d'un oral)

**Niveau** : Semestre 3

**Compétences et contenu** :

Les cours de mathématique physique 1 - 4 se situent à la frontière entre les mathématiques et la physique théorique, ainsi qu'à celle entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. Un objectif est de présenter un enseignement cohérent des dynamiques classique, relativiste et quantique, en mettant l'accent sur les aspects mathématiques de ces théories. Le cours se propose entre autres d'appliquer l'outillage mathématique connu à des problèmes concrets et, inversement, d'étudier les concepts mathématiques nouveaux qui se dégagent de ces études.

Le cours de mathématique physique 3 s'inscrit dans le prolongement des cours de mathématique physique 1 et 2, consacrés à la mécanique des points et des solides, mais il est plus orienté vers les mathématiques que ses prédécesseurs.

1. Modélisation des systèmes continus, analyse tensorielle et équations aux dérivées partielles

La modélisation des fluides conduit à un bel exemple de modèle mathématique, basé sur deux notions fondamentales : les tenseurs et les équations aux dérivées partielles. Outre des compétences en mathématiques appliquées, ce chapitre permet de s'approprier des connaissances en analyse tensorielle, aussi bien du point de vue des mathématiques que de celui des applications, ainsi que dans le domaine de l'intégration des équations aux dérivées partielles.

## 2. Formalismes de Lagrange et de Hamilton, relations avec la géométrie moderne

Les formalismes lagrangien et hamiltonien sont des reformulations de la mécanique classique moyennant des équations différentes de celle de Newton. La nouvelle méthode, qui ne simplifie généralement pas la résolution des problèmes concrets, est conceptuellement plus profonde que l'approche newtonienne. L'étudiant acquerra les connaissances donnant accès à la mécanique quantique, la quantification mathématique, ... , voir cours de mathématique physique 4, et explorera un domaine qui est à la base de beaucoup de notions en géométrie différentielle - enseignées à partir du sixième semestre. Un autre objectif est d'ouvrir la voie vers des directions de recherche en géométrie moderne ; le chapitre mettra l'étudiant en contact avec les concepts de symétrie, de géométrie symplectique, géométrie de Poisson, réduction symplectique, systèmes intégrables ...

**Support** : Notes de cours

**Préparation des cours** : Il est recommandé aux étudiants de préparer les thèmes de chaque séance avant le cours y relatif, en lisant attentivement la partie correspondante des notes de cours.



# Chapitre 1

## Modélisation des systèmes continus, analyse tensorielle et équations aux dérivées partielles

### 1 Introduction

Le cours de mathématique physique se propose entre autres d'appliquer l'outillage mathématique connu à des problèmes concrets et, inversement, d'investiger les concepts mathématiques nouveaux qui se dégagent de ces études. Le premier chapitre part de la **modélisation** des fluides, i.e. de la conception d'un modèle des fluides – au niveau d'approximation de l'hypothèse des milieux continus – permettant de prévoir des mouvements de fluides dans des situations concrètes, par exemple celles se présentant en météorologie. Des problèmes de modélisation se posent dans presque toutes les sciences, en mathématiques appliquées, physique, chimie, sciences de la vie, économie, ... La modélisation des systèmes continus est basée sur deux notions fondamentales, les **équations aux dérivées partielles** et les tenseurs. Leur étude mathématique constitue le second objectif de ce premier chapitre.

### 2 Notations d'Euler et de Lagrange

Nous étudierons les mouvements des fluides (liquides et gaz), non moyennant une théorie microscopique basée sur la réalité moléculaire, mais à l'aide d'une théorie macroscopique, i.e. nous assimilerons les fluides à des répartitions continues de matière, à des **milieux ou systèmes continus**.

Soit donc un fluide en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathfrak{R}$  d'origine  $O$ . Nous définissons **la vitesse  $\vec{v}(M, t)$  et la densité  $\rho(M, t)$  du fluide** en un point géométrique  $M$  et à un instant  $t$  (on retiendra que les variables  $M$  et  $t$  sont indépendantes), comme étant la

vitesse  $\vec{v}_p(t)$  et la densité  $\rho_p(t)$  respectivement, à l'instant  $t$ , de l'élément  $p$  de fluide (petite goutte de fluide, particule de fluide, formée constamment des mêmes molécules; la densité de  $p$  est bien variable au cours du temps, le volume de  $p$  pouvant changer, vu la compressibilité du fluide) qui se trouve en  $M$  à l'instant  $t$ . Ainsi,

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_p(t) \text{ et } \rho(M, t) = \rho_p(t), \text{ où } \vec{r}_p(t) = \overrightarrow{OM}, \quad (1)$$

soit, si on choisit dans  $\mathfrak{R}$  un système d'axes cartésiens  $(O, \vec{e}_i)$ ,

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{v}_p(t) \text{ et } \rho(x_1, x_2, x_3, t) = \rho_p(t), \text{ où } x_i = r_{p,i}(t), \quad (2)$$

avec des notations évidentes.

Signalons que l'utilisation des champs  $\vec{v}(M, t)$  et  $\rho(M, t)$  caractérise **le point de vue d'Euler**, tandis que celle des grandeurs  $\vec{v}_p(t)$  et  $\rho_p(t)$  constitue **le point de vue de Lagrange**.

Exprimons l'accélération  $\vec{\gamma}_p(t)$  de  $p$  à l'instant  $t$  en fonction du champ  $\vec{v}(M, t)$ . On a

$$\gamma_{p,i}(t) = d_t v_{p,i}(t) = d_t (v_i(r_{p,1}(t), r_{p,2}(t), r_{p,3}(t), t)) = \partial_{x_j} v_i d_t r_{p,j} + \partial_t v_i = \partial_t v_i + v_{p,j} \partial_{x_j} v_i,$$

où les dérivées partielles sont évaluées sur  $(r_{p,1}(t), r_{p,2}(t), r_{p,3}(t), t)$ . Vu que

$$v_{p,j} = v_j(r_{p,1}(t), r_{p,2}(t), r_{p,3}(t), t),$$

il vient

$$\gamma_{p,i}(t) = \partial_t v_i + v_j \partial_{x_j} v_i = \left( \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) v_i,$$

avec un second membre calculé sur  $(r_{p,1}(t), r_{p,2}(t), r_{p,3}(t), t)$ .

**Définition 1.** Dans la suite, nous poserons

$$D_t := \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \quad (3)$$

et appellerons l'opérateur  $D_t$  **dérivée temporelle dans la direction du mouvement**.

D'où le lien entre les dérivées temporelles des grandeurs  $\vec{v}_p = \vec{v}_p(t)$  et  $\rho_p = \rho_p(t)$  de Lagrange et celles des grandeurs correspondantes  $\vec{v} = \vec{v}(M, t)$  et  $\rho = \rho(M, t)$  d'Euler:

**Proposition 1.** Avec les notations introduites ci-dessus, on a

$$\vec{\gamma}_p(t) = d_t \vec{v}_p = D_t \vec{v} \quad \text{et} \quad d_t \rho_p = D_t \rho. \quad (4)$$

La preuve de la seconde égalité (4) est semblable à celle de la première.

### 3 Equation locale de conservation de la masse

Dans cette section et les suivantes, nous établirons les équations qui gouvernent les mouvements de fluides. Considérons, dans un fluide en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathfrak{R}$ , un volume limité par une surface fermée et formé constamment par les mêmes molécules. Ce volume et cette surface se déformant au cours du temps suivant les mouvements de la matière considérée, nous les noterons  $V(t)$  et  $S(t)$  respectivement.

**Remarque 1.** *Le théorème de dérivation des intégrales étendues à des volumes variables, voir cours d'Analyse, s'écrit alors*

$$d_t \int_{V(t)} f(M,t) dV = \int_{V(t)} \partial_t(f(M,t)) dV + \int_{S(t)} f(M,t) \vec{v}(M,t) \cdot \vec{n}(M,t) dS, \quad (5)$$

où  $\vec{n}(M,t)$  est le vecteur unitaire normal extérieur à  $S(t)$  au point  $M$ . Dans ce cours, nous n'insisterons pas sur les conditions de validité de ce type de résultat. Vu le théorème de Gauss-Ostrogradski, voir cours de Mathématique physique 1 et 2, cette règle de dérivation s'écrit encore

$$d_t \int_{V(t)} f(M,t) dV = \int_{V(t)} \partial_t(f(M,t)) + \vec{\nabla} \cdot (f(M,t) \vec{v}(M,t)) dV. \quad (6)$$

En exprimant que la masse de  $V(t)$  est constante au cours du temps et en appliquant l'équation (6) à  $f = \rho$ , on obtient

$$0 = d_t \int_{V(t)} \rho(M,t) dV = \int_{V(t)} \partial_t(\rho(M,t)) + \vec{\nabla} \cdot (\rho(M,t) \vec{v}(M,t)) dV.$$

Comme  $V(t)$  est arbitraire, il s'ensuit que

$$\partial_t(\rho(M,t)) + \vec{\nabla} \cdot (\rho(M,t) \vec{v}(M,t)) = 0,$$

pour tout  $M$  et tout  $t$ . D'où la

**Proposition 2.** *Tout fluide (en mouvement par rapport à un référentiel) obéit à l'équation locale de conservation de la masse ou équation de continuité*

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (7)$$

ou encore

$$D_t \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (8)$$

où  $\rho = \rho(M,t)$  et  $\vec{v} = \vec{v}(M,t)$  désignent la densité et la vitesse.

## 4 Equation d'Euler

Appliquons désormais au volume  $V(t)$  considéré à la section précédente, la loi fondamentale de la Mécanique,  $d_t \vec{p} = \vec{F}_{\text{ext}}$ , qui stipule que, pour tout système matériel, la dérivée temporelle de l'impulsion est égale à la résultante des forces extérieures.

Vu l'équation (6), la  $i$ -ième composante de la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du système  $V(t)$  est égale à

$$d_t \int_{V(t)} \rho v_i dV = \int_{V(t)} \partial_t (\rho v_i) + \vec{\nabla} \cdot (\rho v_i \vec{v}) dV = \int_{V(t)} \rho D_t v_i dV, \quad (9)$$

où le dernier membre découle de l'application de l'équation locale de conservation de la masse.

Quant aux forces extérieures, elles se répartissent en deux classes: les forces extérieures de volume, i.e. les forces extérieures agissant sur chaque molécule de  $V(t)$ , et les forces extérieures de surface, i.e. les forces de contact que le fluide extérieur à  $V(t)$  exerce à travers  $S(t)$  sur les molécules de  $V(t)$  voisines de  $S(t)$ . Nous désignons par  $\vec{F}(M, t) dV$  la force extérieure de volume agissant à l'instant  $t$  sur les molécules contenues dans l'élément de volume  $dV$  entourant le point  $M$  de  $V(t)$  et par  $\vec{f}(M, t, \vec{n}) dS$  la force extérieure de surface agissant à l'instant  $t$  sur les molécules de  $V(t)$  voisines de l'élément de surface  $dS$  entourant le point  $M$  de  $S(t)$  et admettant  $\vec{n}$  comme vecteur unitaire normal extérieur en  $M$ . On remarquera que  $\vec{F}(M, t)$  et  $\vec{f}(M, t, \vec{n})$  sont des densités de force, la **densité volumique** et la **densité surfacique**.

Finalement, l'application à  $V(t)$  de l'équation de Newton donne

$$\int_{V(t)} \rho D_t v_i dV = \int_{V(t)} F_i(M, t) dV + \int_{S(t)} f_i(M, t, \vec{n}) dS. \quad (10)$$

En vue de procéder comme dans la preuve de l'équation locale de conservation de la masse, nous allons transformer le dernier terme de (10) en une intégrale de volume moyennant le théorème de Gauss-Ostrogradski, et supprimer toutes les intégrales volumiques par après. Il s'impose donc d'essayer de se convaincre que les composantes  $f_i(M, t, \vec{n})$  s'écrivent pour chaque  $i$  fixé sous la forme

$$f_i(M, t, \vec{n}) = T_{ij}(M, t) n_j \quad (11)$$

et d'examiner si les  $T_{ij}(M, t)$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , sont les composantes d'un tenseur du second ordre, fonction de  $M$  et de  $t$ , i.e. d'un champ de 2-tenseurs dépendant du temps  $t$ .

Pour ce faire, nous nous basons sur **l'argument du tétraèdre**, i.e. nous considérons, pour un point  $M$  et un instant  $t$  fixés, un système d'axes cartésiens  $(M, \vec{e}_i)$  d'origine  $M$  et construisons "sur ce repère" un tétraèdre infinitésimal de volume  $\delta V$ . Portons alors notre attention sur

les molécules de fluide qui se trouvent à l'instant  $t$  considéré dans le tétraèdre et appliquons l'équation (10) à ces molécules. Il vient

$$(\rho D_t v_i)(M, t) \delta V = F_i(M, t) \delta V + f_i(M, t, -\vec{e}_j) \delta S_j + f_i(M, t, \vec{n}) \delta S,$$

où  $\delta S_j$  est la face du tétraèdre admettant  $-\vec{e}_j$  comme vecteur unitaire normal extérieur et où  $\delta S$  désigne la face oblique du tétraèdre. En négligeant les infiniment petits d'ordre 3 par rapport à ceux d'ordre 2, nous trouvons

$$f_i(M, t, -\vec{e}_j) \delta S_j + f_i(M, t, \vec{n}) \delta S = 0.$$

Si l'on démontre ensuite que  $\delta S_j = n_j \delta S$  (ce qui est un exercice de géométrie élémentaire) et note que les forces  $\vec{f}(M, t, \vec{n}) dS$  et  $\vec{f}(M, t, -\vec{n}) dS$  exercées par le milieu extérieur sur le milieu intérieur et par le milieu intérieur sur le milieu extérieur, respectivement, sont opposées (ce qui résulte du principe de l'action et de la réaction), nous obtenons finalement

$$f_i(M, t, \vec{n}) = f_i(M, t, \vec{e}_j) n_j.$$

Si l'on pose alors

$$T_{ij}(M, t) = f_i(M, t, \vec{e}_j), \quad (12)$$

on a bien l'équation (11). En outre, les  $T_{ij}(M, t)$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , sont bien les composantes dans  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  d'un tenseur d'ordre 2 fonction de  $M$  et de  $t$ , notons-le  $\mathbf{T}(M, t)$ . De fait, si  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  est un autre système d'axes cartésiens et si  $A$  désigne la matrice de passage (orthogonale) du système non primé au système primé, on a  $\vec{e}_j = A_{js} \vec{e}'_s$  et donc

$$T_{ij}(M, t) = f_i(M, t, \vec{e}_j) = A_{js} f_i(M, t, \vec{e}'_s) = A_{ir} A_{js} f'_r(M, t, \vec{e}'_s) = A_{ir} A_{js} T'_{rs}(M, t).$$

On dit que  $\mathbf{T}(M, t)$  est **le tenseur des efforts intérieurs** ou **le tenseur des pressions et des tensions** au point  $M$  et à l'instant  $t$ .

La combinaison des équations (10) et (11), ainsi que du théorème de Gauss-Ostrogradski conduit enfin à la conclusion

$$\int_{V(t)} (\rho D_t v_i)(M, t) dV = \int_{V(t)} F_i(M, t) + \partial_{x_j} T_{ij}(M, t) dV.$$

Le volume  $V(t)$  étant arbitraire, on peut supprimer les intégrales, si bien que le passage à l'équation vectorielle correspondante fournit le

**Théorème 1.** *Tout fluide se meut (par rapport au référentiel considéré) conformément à l'équation d'Euler*

$$\rho D_t \vec{v} = \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}, \quad (13)$$

où la divergence  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}$  du tenseur  $\mathbf{T}$  est le vecteur défini par

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \partial_{x_j} T_{ij} \vec{e}_i.$$

## 5 Symétrie du tenseur des pressions et des tensions

Nous décryptons maintenant l'information véhiculée par l'équation du moment cinétique  $d_t \vec{\sigma}_O = \vec{\mathfrak{M}}_{\text{ext}}(O)$ , stipulant que la dérivée temporelle du moment cinétique d'un système matériel par rapport à un point fixe  $O$  est égale au moment en  $O$  des forces extérieures. L'application de ce théorème au volume  $V(t)$  donne

$$d_t \int_{V(t)} \rho \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} dV = \int_{V(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} dV + \int_{S(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} dS.$$

Si nous choisissons un système d'axes cartésiens d'origine  $O$ , nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} d_t \int_{V(t)} \rho \varepsilon_{ijk} x_i v_j dV &= \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_i F_j dV + \int_{S(t)} \varepsilon_{ijk} x_i f_j dS = \\ &= \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_i F_j dV + \int_{S(t)} \varepsilon_{ijk} x_i T_{j\ell} n_\ell dS, \end{aligned}$$

où les  $x_i$  sont les coordonnées de  $M$ . En transformant le premier membre à l'aide de l'équation (9) – qui est valable non seulement pour l'intégrand  $\rho v_i$ , mais pour tout intégrand du type  $\rho f$  – et en modifiant l'intégrale de surface de nouveau à l'aide du théorème de Gauss-Ostrogradski, on obtient

$$\int_{V(t)} \rho \varepsilon_{ijk} D_t(x_i v_j) dV = \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} (x_i F_j + \partial_{x_\ell}(x_i T_{j\ell})) dV.$$

Comme  $M$  et  $t$  sont des variables indépendantes, il vient

$$\int_{V(t)} \rho \varepsilon_{ijk} (v_\ell \delta_{i\ell} v_j + x_i D_t v_j) dV = \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} (x_i F_j + \delta_{i\ell} T_{j\ell} + x_i \partial_\ell T_{j\ell}) dV,$$

soit, compte tenu de l'équation d'Euler (13),

$$\int_{V(t)} \rho \varepsilon_{ijk} v_i v_j dV = \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} T_{ji} dV$$

ou encore

$$\int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} T_{ji} dV = 0,$$

le premier intégrand étant le produit de  $\rho$  par la  $k$ -ième composante de  $\vec{v} \wedge \vec{v}$ . Vu le caractère arbitraire de  $V(t)$ , l'intégrand est nul pour tout  $k$ , i.e.

$$T_{ij} = T_{ji}, \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (14)$$

**Proposition 3.** *Le tenseur des pressions et des tensions d'un fluide est symétrique.*

## 6 Fluide parfait

Les sections précédentes ont montré que, dans le modèle des milieux continus, le mouvement général d'un fluide est soumis à l'équation de continuité (7) et l'équation d'Euler (13) – qui contient le tenseur symétrique des efforts intérieurs. Ces équations forment un système de type  $4 \times 10$ , i.e. qui renferme 4 équations scalaires, mais 10 inconnues numériques, à savoir  $\rho$  (1 inconnue),  $\vec{v}$  (3 inconnues) et  $\mathbf{T}$  (6 inconnues), la densité volumique de force  $\vec{F}$  étant d'ordinaire connue. Nous remédierons à ce problème, en supposant que le fluide étudié vérifie certaines hypothèses, satisfaites du moins approximativement par bon nombre de fluides, qui entraînent, soit une diminution du nombre d'inconnues, soit une augmentation du nombre d'équations.

On appelle **fluide parfait**, un fluide dont on néglige la **viscosité**, i.e. le frottement interne. Tout comme la réaction d'une surface infiniment lisse est orthogonale à cette dernière, la densité surfacique de force est, en l'absence de frottement ou tension interne, normale à  $S(t)$  et plus précisément directement colinéaire à  $-\vec{n}$ . Étant dans ce cas due exclusivement à la pression, elle est évidemment donnée par

$$\vec{f}(M, t, \vec{n}) = -p(M, t)\vec{n},$$

où  $p(M, t)$  est la pression au point  $M$  à l'instant  $t$ . Il s'ensuit que  $T_{ij}(M, t) = f_i(M, t, \vec{e}_j) = -p(M, t)\delta_{ij}$ . On vérifie immédiatement qu'on a la

**Proposition 4.** *Dans un fluide parfait, le tenseur  $\mathbf{T}$  des pressions et tensions est donné par*

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{U}, \quad (15)$$

où  $\mathbf{U}$  désigne le tenseur unité, et la divergence  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}$  est égale à

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = -\vec{\nabla} p. \quad (16)$$

**Remarque 2.** *Ainsi, si le fluide considéré est parfait,  $\mathbf{T}$  ne renferme qu'une seule inconnue  $p$  et le système formé par l'équation de conservation de la masse (7) et l'équation d'Euler (13) est de type  $4 \times 5$ , les inconnues étant  $\rho$ ,  $\vec{v}$  et  $p$ .*

### 6.1 Liquide parfait

Dans la suite, le terme **liquide** désignera, sauf mention contraire, un liquide homogène et incompressible. La densité  $\rho$  peut alors être considérée comme une constante connue.

**Remarque 3.** *Dans le cas d'un liquide parfait, le système (7), (13) est de type  $4 \times 4$ , si bien que les 4 équations fournissent en principe les 4 inconnues  $\vec{v}$  et  $p$ .*

## 6.2 Gaz parfait

Dans le cas d'un gaz parfait, ne sachant pas diminuer le nombre d'inconnues du système (7), (13), nous ajoutons à ces équations une loi de transformation du gaz. Souvent on considère une **transformation adiabatique**, i.e. une transformation réversible du gaz considéré comme isolé thermiquement. La thermodynamique fournit l'entropie  $S = S(\rho, p)$  du gaz par unité de masse et enseigne que  $D_t S = 0$ , équation qui s'écrit

$$\partial_\rho S D_t \rho + \partial_p S D_t p = 0,$$

de sorte qu'on a la

**Proposition 5.** *Dans le cas d'une transformation adiabatique, la pression, la densité et la vitesse du gaz parfait considéré, sont liées par l'équation*

$$D_t p = c^2 D_t \rho, \quad (17)$$

où

$$c^2 = -\frac{\partial_\rho S}{\partial_p S} \quad (18)$$

est une fonction connue de  $\rho$  et de  $p$ .

La fonction  $c^2$  est bien positive, la dérivée partielle au numérateur (resp. dénominateur) étant strictement négative (resp. positive) – ce qui est clair, si l'on pense à la notion d'entropie comme une mesure du désordre ou considère l'exemple  $S = c_V \ln(p/\rho^\gamma)$ ,  $\gamma = c_p/c_V$ , où  $c_V$  et  $c_p$  sont des chaleurs spécifiques.

**Remarque 4.** *Le système (7), (13), (17) est un système de type  $5 \times 5$ , permettant (en principe) de déterminer les inconnues  $\rho$ ,  $p$  et  $\vec{v}$ .*

## 7 Compléments de calcul tensoriel

Considérons un champ de tenseurs  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(M)$  – d'ordre 2 pour fixer les idées. Dans tout système d'axes cartésiens, ce tenseur est caractérisé par ses composantes  $t_{jk} = t_{jk}(x)$ , où  $x$  désigne le triplet des coordonnées de  $M$ . Nous nous proposons de prouver que les dérivées  $(\partial_{x_i} t_{jk})(x)$  sont les composantes d'un champ de tenseurs d'ordre trois. Soient donc deux repères orthonormés  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ . Il découle de la loi ponctuelle que

$$x' = \tilde{A}(x - x_{O'}) = x'(x)$$

et de la loi tensorielle que

$$t_{jk}(x) = A_{jm} A_{kn} t'_{mn}(x'(x)),$$

où nous avons utilisé les notations habituelles et où les composantes de  $T$  dans les deux systèmes d'axes sont évidemment évaluées sur les coordonnées dans ces systèmes du même point  $M$ . On a donc

$$(\partial_{x_i} t_{jk})(x) = A_{jm} A_{kn} (\partial_{x'_\ell} t'_{mn})(x'(x)) \partial_{x_i} x'_\ell = A_{i\ell} A_{jm} A_{kn} \partial_{x'_\ell} t'_{mn}(x'(x)),$$

ce qui est bien la loi de transformation des composantes d'un champ de 3-tenseurs. Le précédent calcul restant manifestement valable pour un champ tensoriel  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(M)$  d'ordre arbitraire, on conclut que

**Proposition 6.** *La "dérivation" d'un champ tensoriel d'ordre  $n$  fournit un champ tensoriel d'ordre  $n + 1$ , appelé **champ tensoriel dérivé**.*

Les exemples suivants de champs de tenseurs dérivés prouvent que le gradient, la divergence et le rotationnel sont indépendants du ROND utilisé pour les calculer, résultat admis jusqu'ici, et font aussi apparaître, dans leur cadre naturel, le gradient d'un champ de vecteurs et la divergence et le rotationnel d'un champ de 2-tenseurs.

### Exemples.

1. Le champ dérivé d'un champ scalaire  $f = f(M)$  est le champ de vecteurs de composantes  $(\partial_{x_i} f)(x)$ , i.e. le gradient  $(\vec{\nabla} f)(M)$  du champ de scalaires  $f$ .
2. Le champ dérivé d'un champ vectoriel  $\vec{f} = \vec{f}(M)$  est le champ de 2-tenseurs de composantes  $(\partial_{x_i} f_j)(x)$ , noté  $(\vec{\nabla} \vec{f})(M)$  et appelé **gradient du champ de vecteurs  $\vec{f}$** .
3. La contraction du précédent champ dérivé de  $\vec{f}$  conduit au champ scalaire  $(\sum_i \partial_{x_i} f_i)(x)$ , qui n'est autre que la divergence  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{f})(M)$  de  $\vec{f}$ .
4. La multiplication tensorielle contractée du pseudo-tenseur de Levi-Civita et du champ dérivé de  $\vec{f}$  donne le champ pseudo-vectoriel de composantes  $\sum_{ij} \varepsilon_{ijk} (\partial_{x_i} f_j)(x)$ , i.e. le rotationnel  $(\vec{\nabla} \wedge \vec{f})(M)$  de  $\vec{f}$ .
5. La dérivation d'un champ de tenseurs d'ordre 2,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(M)$ , fournit le champ de 3-tenseurs de composantes  $(\partial_{x_i} t_{jk})(x)$  et la contraction sur  $i$  et  $k$  produit le champ de vecteurs de composantes  $(\partial_{x_i} t_{ji})(x)$ . Ce champ n'est autre que la **divergence à droite  $(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T})(M)$  du champ de 2-tenseurs  $\mathbf{T}$** , intervenant dans l'équation d'Euler. On définit également la **divergence à gauche et le rotationnel d'un champ de tenseurs du second ordre**, mais ces concepts ne seront pas utilisés dans ce cours.

## 8 Fluide visqueux, équations de Navier-Stokes

Dans le cas d'un fluide visqueux, le 2-tenseur symétrique  $\mathbf{T}$  des pressions et tensions doit évidemment être la somme du 2-tenseur symétrique des pressions  $-p\mathbf{U}$ , utilisé lorsque le fluide est parfait, et d'un 2-tenseur  $\mathbf{D}$ , nécessairement symétrique lui-aussi, rendant compte de la viscosité du fluide.

Il est clair que le phénomène de la viscosité est étroitement lié à la différence entre les vitesses  $\vec{v}(M, t)$  et  $\vec{v}(M + d\vec{M}, t)$  du fluide en deux points infiniment voisins. Le **tenseur  $\mathbf{D}$  de viscosité** dépend donc essentiellement des variations  $(\partial_{x_i} v_j)(x, t)$ , qui, vu la section précédente, sont bien les composantes d'un champ de 2-tenseurs (paramétré par le temps).

Dans la suite, nous considérons un **fluide newtonien**, i.e. un fluide dont le tenseur de viscosité dépend de manière affine des précédentes variations des composantes de la vitesse. De manière plus précise, on choisit l'“Ansatz”

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + D_{ij} = -p \delta_{ij} + A_{ij} + B_{ijrs} \partial_{x_s} v_r, \quad (19)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont deux tenseurs du deuxième ordre et du quatrième ordre respectivement, qui sont symétriques en  $i, j$  et sont - comme  $p$  - fonctions de la densité  $\rho(M, t)$  et de la température  $T(M, t)$ .

Le tenseur  $\mathbf{A}$  est nécessairement nul. En effet, la viscosité ne se manifestant pas, si le fluide se meut comme un solide, le tenseur de viscosité  $\mathbf{D}$  est nul, lorsque le champ des vitesses du fluide vérifie la loi fondamentale de la cinématique des solides

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}(O, t) + \vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{OM},$$

i.e.

$$v_r = v_r(O) + \varepsilon_{abr} \omega_a x_b,$$

où les  $v_i(O)$  et les  $\omega_i$  sont arbitraires. La substitution dans  $D_{ij}$ , voir équation (19), donne alors

$$D_{ij} = A_{ij} + B_{ijrs} \varepsilon_{asr} \omega_a = 0, \forall i, j,$$

quels que soient les  $\omega_i$ . Il s'ensuit que les coefficients de ces polynômes du premier degré en les  $\omega_i$  sont nuls, ce qui implique que  $A_{ij} = 0$  et que  $\mathbf{B}$  est symétrique non seulement en  $i, j$ , mais aussi en  $r, s$ .

Nous limitons notre étude à présent à un **fluide isotrope**, i.e. dont les propriétés physiques, notamment la viscosité, sont indépendantes de la direction considérée. Ceci implique que le tenseur  $\mathbf{B}$ , qui caractérise la viscosité, a des composantes indépendantes (des directions) des axes cartésiens choisis. On sait qu'un tenseur ayant les mêmes composantes dans chaque base

est appelé **tenseur isotrope** et que par exemple les symboles de Kronecker  $\delta_{ij}$  sont les composantes d'un 2-tenseur isotrope. En fait, le 4-tenseur isotrope le plus général est simplement une combinaison linéaire de produits de symboles de Kronecker :

$$B_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu \delta_{ir} \delta_{js} + \nu \delta_{is} \delta_{jr},$$

où  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  sont des scalaires quelconques, ici fonctions de la masse volumique et de la température. La symétrie de  $\mathbf{B}$  en  $i, j$  se traduit visiblement par  $(\mu - \nu) \delta_{ir} \delta_{js} = (\mu - \nu) \delta_{is} \delta_{jr}$ , donc par  $\mu = \nu$ . Il en est de même de la symétrie par rapport à  $r, s$ . D'où

$$B_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}).$$

En combinant ce résultat et l'annulation de  $\mathbf{A}$  avec l'"Ansatz" (19), on trouve finalement que le tenseur des efforts intérieurs d'un fluide newtonien isotrope est donné par

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \partial_{x_r} v_r \delta_{ij} + \mu (\partial_{x_j} v_i + \partial_{x_i} v_j), \quad (20)$$

où  $p$  est la pression du fluide et où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des coefficients caractérisant la viscosité. Ces **coefficients de viscosité** sont déterminés expérimentalement. D'où le

**Théorème 2.** *Dans tout fluide newtonien et isotrope, le tenseur des pressions et des tensions s'écrit*

$$\mathbf{T} = \left( -p + \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \mathbf{U} + \mu \left( \nabla \vec{v} + \widetilde{\nabla \vec{v}} \right). \quad (21)$$

Étant donné que dans le cas d'un liquide la masse volumique  $\rho$  est une constante connue, on a également la proposition suivante :

**Proposition 7.** *Les mouvements d'un liquide newtonien isotrope sont gouvernés par les équations fondamentales (8) et (13), qui s'écrivent*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \rho D_t \vec{v} = \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T}, \quad (22)$$

avec

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{U} + \mu \left( \nabla \vec{v} + \widetilde{\nabla \vec{v}} \right), \quad (23)$$

et forment un système  $4 \times 4$ . Si le coefficient de viscosité  $\mu$  est constant, la divergence de  $\mathbf{T}$  prend la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v}, \quad (24)$$

où  $\Delta = \sum_i \partial_{x_i}^2$  désigne le laplacien.

**Remarque 5.** *Les équations fondamentales des mouvements des fluides portent le nom d'équations de Navier-Stokes ; certains auteurs réservent cette appellation à l'équation d'Euler. Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles (EDP) ; l'équation d'Euler, par exemple, est une EDP non linéaire du second ordre. Les EDP apparaissent dans de nombreux domaines des Sciences et constituent un domaine de recherches intenses. Nous reviendrons à ce type d'équations.*

## 9 Travaux dirigés

1. Ecrire l'équation de mouvement de l'air par rapport à la Terre, en tenant compte de la rotation autour de l'axe des pôles et en considérant l'air comme un gaz parfait. En vue d'étudier les cyclones (Tiefdruckgebiete) et les anticyclones (Hochdruckgebiete), on considérera les mouvements comme horizontaux et permanents et on écrira les projections de l'équation d'Euler sur les axes horizontaux, au niveau du sol – on travaillera dans le système d'axes habituel attaché à un point  $O$  de la surface terrestre :  $\vec{e}_1$  vers l'Est,  $\vec{e}_2$  vers le Nord et  $\vec{e}_3$  vers le Zénith. Examiner – au niveau du sol – un mouvement circulaire à symétrie circulaire autour d'un centre fixe. Réécrire les précédentes projections en coordonnées polaires. Interpréter.

*Observation* : Le passage en coordonnées polaires requiert le [théorème de changement de variables dans un opérateur de dérivation](#).

2. Soit une couche de liquide parfait, de hauteur  $h$ , illimitée horizontalement et en équilibre. On s'intéresse aux petits mouvements au voisinage de cet état d'équilibre. [Linéariser les EDP de continuité et d'Euler](#). Déterminer et linéariser les [conditions aux limites](#) en  $z = -h$  et en  $z = 0$ , en admettant qu'une particule de liquide se trouvant à la surface libre à l'équilibre, reste indéfiniment à la surface libre. Etudier le cas particulier d'une onde sinusoïdale se propageant le long de l'axe des  $x$ .

## 10 Travaux à domicile

1. Montrer qu'il découle de l'équation d'Euler (par rapport à la Terre considérée comme inertielle) que la pression dans un liquide parfait, en équilibre dans le champ de pesanteur, est donnée par la [formule fondamentale de l'hydrostatique](#)  $p = p_0 + \rho gh$ , où  $p_0$  est la pression atmosphérique à la surface libre et  $h$  la profondeur à laquelle la pression est mesurée.
2. Ce problème étudie les [écoulements permanents](#), i.e. les écoulements tels que  $\partial_t = 0$ , et les [écoulements irrotationnels ou non-tourbillonnaires](#), caractérisés par  $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$ .

Considérons donc un liquide parfait en mouvement permanent, avec  $\vec{F} = -\rho \vec{\nabla} \varphi$ . Par exemple, si les forces de volume se réduisent aux seules forces de pesanteur et si  $\vec{e}_3$  est vertical ascendant,  $\varphi = gx_3$ .

- a. Utiliser la formule

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}a^2 - \vec{a} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}),$$

établie au cours ‘Mathématique physique 2’, pour montrer que les précédentes hypothèses permettent d’écrire l’équation d’Euler sous la forme simplifiée

$$\vec{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla} \left( \varphi - \frac{p}{\rho} \right).$$

b. Prouver que pour un régime irrotationnel, on obtient l’équation de Bernoulli

$$\frac{v^2}{2} + \varphi - \frac{p}{\rho} = E,$$

où  $E$  est une constante.

c. Dans le cas tourbillonnaire, multiplier l’équation d’Euler simplifiée scalairement par  $\vec{v}$ , afin de montrer que le membre de gauche de l’équation de Bernoulli est constant **le long de toute ligne de courant**. Cette constante varie a priori d’une ligne d’écoulement à l’autre, alors qu’au point précédent, la constante  $E$  est indépendante de la ligne considérée.

3. Soit un gaz parfait homogène, en équilibre par rapport à un référentiel inertiel. On suppose qu’il n’existe aucune force de volume et que le gaz est illimité dans toutes les directions. Finalement, la densité et la pression sont liées par une loi adiabatique. On étudiera de nouveau les mouvements infinitésimaux au voisinage de l’état d’équilibre. **Linéariser le système d’équations aux dérivées partielles**. Montrer que l’accroissement infinitésimal  $\delta p$ , de la pression à partir de sa valeur constante  $p_0$  à l’équilibre, vérifie l’équation de d’Alembert, de propagation des ondes ou des cordes vibrantes

$$\square \delta p = \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \delta p = 0,$$

où

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$$

est le **d’Alembertien**. Examiner le cas particulier d’une onde sinusoïdale plane.

4. Observons, dans un référentiel inertiel muni d’un système d’axes, un liquide newtonien isotrope de viscosité  $\mu$  constante, s’écoulant entre deux plans parallèles  $z = 0$  et  $z = h$  ( $h > 0$ ). Le régime est supposé permanent, la force de volume est supposée nulle et le champ des vitesses est supposé être du type  $\vec{v}(M) = v(z)\vec{e}_1$ . Dédurre de l’équation d’Euler que la pression  $p = p(M)$  dépend uniquement de  $x$  et que

$$d_x p = \mu d_z^2 v = k,$$

$k$  étant une constante quelconque.

- (i) Etudier le cas  $k = 0$ , en prenant comme conditions aux limites “la couche  $z = 0$  est fixe” et “la couche  $z = h$  est animée d’une vitesse constante  $V$ ”.
- (ii) Examiner le cas  $k \neq 0$ , en supposant les deux couches fixes.

*Observation :* On séparera les variables  $x$  et  $z$  dans l’EDP d’Euler.

## 11 Appendice 1: Informations sur quelques techniques d’intégration d’équations aux dérivées partielles

Les méthodes de résolution d’EDP, de systèmes de telles équations, ou encore de problèmes aux limites, forment un très vaste domaine de recherche ; certains procédés utilisés ci-dessous dans des cas particuliers ou décrits de manière succincte en des termes généraux, pourraient faire l’objet d’un cours entier.

### 11.1 Généralités relatives aux équations aux dérivées partielles

Nous venons de constater que la modélisation de **systèmes complexes** génère (souvent) des EDP. Cette section contient quelques informations élémentaires sur ce type d’équations.

Rappelons que dans une équation différentielle ordinaire (EDO), l’inconnue  $y = y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$  est une fonction éventuellement vectorielle d’une variable  $t \in \mathbb{R}$ , si bien qu’une **EDO d’ordre  $p \in \mathbb{N}^*$**  est une relation entre cette variable  $t$ , la fonction inconnue  $y$  (ou les fonctions inconnues  $y$ , si l’on pense à  $y$  comme un  $m$ -uplet  $(y_1, \dots, y_m)$  de fonctions) et ses (ou leurs) dérivées

$$d_t^k y \text{ d’ordre } k \leq p.$$

Dans une équation aux dérivées partielles (EDP) par contre, l’inconnue  $y = y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x))$  est une fonction éventuellement vectorielle de plusieurs variables  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , si bien qu’une **EDP d’ordre  $p \in \mathbb{N}^*$**  est une équation renfermant les variables  $x$ , les fonctions inconnues  $y$ , ainsi que leurs dérivées partielles

$$\partial_x^\alpha y := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} y \text{ d’ordre } |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq p.$$

La résolution des EDP est un domaine plus compliqué que l’intégration des EDO. Par exemple, l’EDO  $d_t y = 0$ , posée dans l’intervalle  $]0, +\infty[$ , admet la solution générale  $y(t) = C$ ,  $C$  **constante arbitraire** pouvant être obtenue moyennant une **condition initiale**  $y(0) = y_0$  donnée. L’examen de l’EDP  $\partial_{x_1} y = 0$  (resp.  $\partial_{x_1}^2 y = 0$ ), posée dans le demi-espace  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$ , montre que sa solution générale  $y = C(\hat{x}_1, x_2, \dots, x_n)$  (resp.

$y = C_1(\widehat{x}_1, x_2, \dots, x_n)x_1 + C_2(\widehat{x}_1, x_2, \dots, x_n)$ , où la variable surmontée d'un accent circonflexe est omise, dépend d'une **fonction arbitraire** (resp. de deux fonctions arbitraires). Ces fonctions sont connues si les données du problème contiennent une **condition aux limites** (resp. des conditions aux limites) ou à la frontière  $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$  du domaine  $\Omega$ , i.e. si le problème contient l'information  $y(0, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n)$  (resp.  $y(0, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n)$  et  $(\partial_{x_1}y)(0, x_2, \dots, x_n) = h(x_2, \dots, x_n)$ ). Des conditions aux limites portant sur la fonction inconnue  $y$  (resp. sur la dérivée normale de la fonction inconnue  $y$ ) sont appelées **conditions de Dirichlet** (resp. **conditions de Neumann**). Si l'on impose, sur l'hypersurface  $\partial\Omega$  limitant la région  $\Omega$  de l'espace dans laquelle une EDP – disons d'ordre  $p$  – est considérée, les valeurs des solutions et de leurs dérivées normales jusqu'à l'ordre  $p - 1$ , on parle de **conditions aux limites de Cauchy**. Le problème formé par l'EDP et les conditions aux limites est un **problème aux limites** de Dirichlet, de Neumann ou de Cauchy, selon le type de conditions à la frontière considérées.

Tout comme nous venons de classifier les conditions au bord, on peut classifier les EDP elles-mêmes, et ceci selon différents critères. Outre la différenciation suivant l'**ordre** des EDP, on peut distinguer entre EDP linéaires et nonlinéaires. Une EDP est **linéaire**, lorsque qu'elle s'écrit sous la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq p} L_\alpha(x) \partial_x^\alpha y = f(x),$$

où les coefficients  $L_\alpha = L_\alpha(x)$  et le second membre  $f = f(x)$  sont des fonctions données. Les travaux dirigés et à domicile ci-dessus ont montré que les EDP linéaires apparaissent souvent comme approximations d'équations nonlinéaires. La propriété fondamentale des EDP linéaires et homogènes ( $f = 0$ ) stipule que

**Proposition 8.** *L'ensemble des solutions d'une EDP linéaire et homogène est un espace vectoriel, i.e. une combinaison linéaire ou superposition de solutions est encore une solution.*

Une **EDP linéaire du second ordre à deux variables**  $x = (x_1, x_2)$  est du type

$$a(x)\partial_{x_1}^2 y + b(x)\partial_{x_1}\partial_{x_2} y + c(x)\partial_{x_2}^2 y + \text{termes d'ordre inférieur} = f(x).$$

Tout comme une conique  $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \text{termes d'ordre inférieur} = 0$  est une ellipse (resp. parabole, hyperbole), si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  (resp.  $= 0, > 0$ ), une EDP linéaire du second ordre à deux variables  $x = (x_1, x_2)$  est **elliptique** (resp. **parabolique, hyperbolique**) en un point  $x$ , si  $\Delta(x) < 0$  (resp.  $= 0, > 0$ ). Les généralisations de ces notions à des EDP plus générales conduisent à des classes d'EDP pour lesquelles on étudie des propriétés des solutions et des méthodes de résolution.

Avant de passer brièvement en revue des techniques d'intégration, nous donnons quelques exemples d'EDP bien connues.

- L'équation de Laplace à deux variables  $(x_1, x_2)$ ,

$$\Delta y := \partial_{x_1}^2 y + \partial_{x_2}^2 y = 0,$$

où  $\Delta$  désigne le Laplacien (et non comme ci-dessus le discriminant), est le prototype d'une équation elliptique. Ses solutions sont appelées **fonctions harmoniques**.

- L'équation de propagation des ondes à deux variables  $(x, t)$ ,

$$\partial_x^2 y - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 y = 0,$$

où  $c$  est une constante, est hyperbolique.

- L'équation de propagation de la chaleur à deux variables  $(x, t)$ ,

$$\partial_x^2 y - \frac{1}{c^2} \partial_t y = 0,$$

est une EDP parabolique.

D'autres EDP célèbres que nous étudions ou étudierons dans ce cours sont

- l'équation de Navier-Stokes,

$$\rho D_t \vec{v} = \vec{F} - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v},$$

voir ci-dessus,

- l'équation de Schrödinger,

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$$

(où  $\hbar$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$ ,  $\psi = \psi(t, x_1, x_2, x_3)$  désigne la fonction d'onde,  $m$  la masse de la particule étudiée et  $V = V(x_1, x_2, x_3)$  son énergie potentielle), qui constitue la base de la Mécanique quantique, ainsi que

- l'équation de Hamilton-Jacobi,

$$\partial_t y + H(t, q, \partial_q y) = 0$$

(où  $H = H(t, q, p)$  est le Hamiltonien), la contrepartie de l'équation de Schrödinger en Mécanique classique.

## 11.2 Linéarisation, changement de variables, séparation des variables

**Remarque 6.** Les travaux dirigés et travaux à domicile ci-dessus ont notamment conduit aux observations suivantes :

- On peut facilement linéariser les EDP dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements.
- Le passage à des variables adaptées à la symétrie du problème facilite la résolution des EDP.
- Pour certaines EDP d'inconnue  $y = y(x_1, \dots, x_n)$ , la recherche de solutions de la forme

$$y(x_1, \dots, x_n) = \sum_i y_i(x_i)$$

ou

$$y(x_1, \dots, x_n) = \prod_i y_i(x_i),$$

dans lesquelles chaque fonction  $y_i = y_i(x_i)$  ne dépend que d'une seule variable, ramène l'EDP examinée à un nombre fini d'EDO.

## 11.3 Superposition, séries de Fourier

**Remarque 7.** Rappelons que la superposition ou encore la combinaison linéaire de solutions d'une EDP linéaire et homogène fournit une nouvelle solution plus générale.

L'idée de superposition est fondamentale dans la théorie des **séries de Fourier** appliquée notamment dans des intégrations d'EDP.

Étudiant l'équation de la chaleur, Fourier se proposait de voir une source de chaleur générale et compliquée comme superposition d'ondes sinusoïdales :

**Définition 2.** Une **série trigonométrique** est une superposition des fonctions  $\cos nx$  et  $\sin nx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , i.e. une série du type

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (25)$$

où  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ .

Si une série trigonométrique converge, sa somme  $f(x)$  est visiblement une fonction périodique de période  $2\pi$ . Inversement, on peut se demander sous quelles conditions une fonction

$f(x)$  de période  $2\pi$  est la limite d'une série trigonométrique, i.e. sous quelles conditions  $f(x)$  se décompose en une "combinaison linéaire"

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi], \quad (26)$$

de fonctions trigonométriques simples.

Procédons par **analyse et synthèse**, i.e. supposons qu'il existe une série vérifiant l'équation (26) et persuadons-nous que ses coefficients prennent alors nécessairement certaines valeurs à déterminer, puis essayons de montrer que la série ainsi obtenue converge bien vers  $f(x)$ .

En intégrant terme par terme, nous supposons que c'est possible, on trouve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \pi a_0,$$

i.e.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Afin de déterminer le coefficient  $a_k$  (resp.  $b_k$ ),  $k \geq 1$ , on multiplie les deux membres de l'équation (26) par  $\cos kx$  (resp.  $\sin kx$ ), on intègre de nouveau terme par terme de  $-\pi$  à  $\pi$ , et on calcule les intégrales des produits de fonctions trigonométriques par linéarisation via les formules trigonométriques usuelles. On constate alors que toutes les intégrales au second membre sont nulles, sauf celle qui multiplie  $a_k$  (resp.  $b_k$ ), qui, comme on le voit de suite en linéarisant également  $\cos^2 kx$  (resp.  $\sin^2 kx$ ), vaut  $\pi$ , si bien que

**Remarque 8.** Les **coefficients de Fourier** de la **série de Fourier** d'une fonction  $f(x)$ , qui est intégrable sur  $[-\pi, \pi]$  et  $2\pi$ -périodique, sont donnés par

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k \geq 0, \quad \text{et} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \geq 1. \quad (27)$$

Il s'agit à présent de voir sous quelles conditions sur  $f(x)$ , la série de Fourier de cette fonction converge et a pour limite  $f(x)$ . Par exemple, on peut prouver que si la fonction  $2\pi$ -périodique  $f(x)$  est monotone par morceaux et bornée sur  $[-\pi, \pi]$ , sa série de Fourier converge en tout point ; la limite  $\ell(x)$  de cette série coïncide avec la valeur  $f(x)$  de la fonction étudiée aux points  $x$  de continuité de cette fonction et est égale à la moyenne  $\frac{1}{2} (\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^+} f(y))$  aux points  $x$  de discontinuité.

Il est possible d'établir d'autres critères de reconstruction de la fonction  $f(x)$  à partir des "ondes sinusoïdales simples", d'utiliser des formulations différentes et de développer de nombreuses généralisations des précédents résultats relatifs aux séries de Fourier, qui sont détaillés dans la branche des mathématiques appelée **analyse harmonique**.

## Travail dirigé

Nous nous proposons d'appliquer les techniques préalablement décrites à la [résolution du problème de Cauchy défini par l'équation de propagation des ondes](#)

$$\partial_x^2 y = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 y, \quad (28)$$

posée dans l'ouvert  $\Omega := ]0, \ell[ \times ]0, +\infty[$ , et par les conditions au bord

$$y(0, t) = 0, \quad (29)$$

$$y(\ell, t) = 0, \quad (30)$$

$$y(x, 0) = g(x), \quad (31)$$

$$(\partial_t y)(x, 0) = h(x), \quad (32)$$

où  $g$  et  $h$  désignent des fonctions données.

Séparons les variables  $x$  et  $t$  et cherchons une solution de la forme  $y(x, t) = \xi(x)\tau(t)$ . Il vient alors

$$\xi'' + k\xi = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\tau} + kc^2\tau = 0,$$

où  $k$  est une constante que nous prenons strictement positive dans la suite (il semble naturel a priori, et on peut vérifier par calcul, que pour  $k$  négatif – situation débouchant sur l'équation antiharmonique – on n'obtient pas de solution satisfaisante du problème aux limites de la propagation des ondes). Cela implique que

$$y(x, t) = \left( A \cos \sqrt{k}x + B \sin \sqrt{k}x \right) \left( C \cos c\sqrt{k}t + D \sin c\sqrt{k}t \right),$$

où les constantes d'intégration  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  et  $k > 0$  sont à déterminer moyennant les conditions aux bords. Les conditions (29) et (30) donnent  $A = 0$  et  $B \sin \sqrt{k}\ell = 0$ , sinon  $\tau$  et  $y$  s'annuleraient identiquement. Le même argument fournit les valeurs possibles  $\frac{n\pi}{\ell}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , de  $\sqrt{k} > 0$  et entraîne que

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right) \left( C_n \cos \frac{nc\pi}{\ell} t + D_n \sin \frac{nc\pi}{\ell} t \right),$$

où nous avons incorporé la constante  $B$  dans les constantes  $C_n$  et  $D_n$  et où nous avons superposé les solutions simples obtenues du problème aux limites linéaire homogène (28), (29), (30), afin d'écrire une solution plus générale ; nous ne nous attarderons pas ici sur les questions de convergence qui se posent.

Calculons pour terminer  $C_n$  et  $D_n$  grâce aux conditions (31) et (32). La première s'écrit

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Si  $g$  se décompose en série de Fourier dans  $[0, \ell]$ , le calcul du coefficient de Fourier  $C_n$  fournit

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

La seconde contrainte donne

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \frac{nc\pi}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

si bien que

$$D_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^{\ell} h(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

## Travail à domicile

Résoudre le problème de Dirichlet défini par l'équation de Laplace

$$\partial_{x_1}^2 y + \partial_{x_2}^2 y = 0,$$

dans le disque ouvert  $\Omega$  centré à l'origine et ayant pour rayon  $R$ , et par la condition à la limite

$$y|_{\partial\Omega} = g,$$

où  $g$  est donné.

*Réponse* : La symétrie du problème suggère un passage des coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2)$  aux coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Il découle de la formule de changement de variables dans un opérateur de dérivation que l'équation de Laplace se transforme en

$$r^2 \partial_r^2 y + r \partial_r y + \partial_\theta^2 y = 0.$$

La recherche d'une solution à variables séparées du type  $y(r, \theta) = \rho(r)\tau(\theta)$  conduit aux EDO

$$\tau'' + k\tau = 0 \quad \text{et} \quad r^2 \rho'' + r\rho' - k\rho = 0,$$

où  $k > 0$  (la solution doit être  $2\pi$ -périodique en  $\theta$ , car  $(r, \theta)$  et  $(r, \theta + 2\pi)$  correspondent au même point de  $\Omega$ ). La seconde de ces équations est une EDO linéaire homogène du second ordre, mais à coefficients variables ! Son ensemble de solutions étant un espace vectoriel

de dimension 2, on cherche deux solutions indépendantes simples du type  $r^p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . Il est facile de vérifier qu'une telle exponentielle est solution si et seulement si  $p = \pm\sqrt{k}$ . D'où la solution générale cherchée et les fonctions

$$y_k(r, \theta) = (A_k \cos \sqrt{k}\theta + B_k \sin \sqrt{k}\theta)(C_k r^{\sqrt{k}} + D_k r^{-\sqrt{k}}).$$

La nécessité d'examiner si les  $y_k$  obtenus sont bien des solutions conduit aux remarques suivantes:

1. Une solution devant être  $2\pi$ -périodique en  $\theta$ , la constante  $\sqrt{k}$  doit prendre une des valeurs  $n \in \{1, 2, \dots\}$ .

2. Une solution devant être deux fois continuellement dérivable dans  $\Omega$  et en particulier définie à l'origine, il faut que  $D_k = 0$  ou mieux  $D_n = 0$ .

En incorporant la constante  $C_n$  dans  $A_n$  et  $B_n$  et en superposant les solutions  $y_n$  de l'EDP linéaire homogène étudiée, on obtient la solution

$$y(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n.$$

Le premier terme du second membre a été ajouté parce que l'idée de série de Fourier a conduit à l'observation qu'une constante, disons  $A_0/2$ , est également solution (nous l'aurions trouvée, si nous avions examiné de plus près le cas limite  $k = 0$ ). Enfin, la condition au bord donne

$$g(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n R^n \cos n\theta + B_n R^n \sin n\theta,$$

si bien que

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Ici encore, nous n'insistons pas sur les problèmes d'analyse qui se posent.

## 11.4 Courbes caractéristiques

Commençons par l'exemple de l'équation des ondes d'ordre 1,  $\partial_x y = \frac{1}{c} \partial_t y$ , ou même

$$a \partial_x y + \partial_t y = 0, \tag{33}$$

où  $a$  est une constante non nulle connue. Cette équation est supposée posée dans le demi-plan  $\Omega := \{(x, t) : t > 0\}$ , la condition à la limite étant

$$y(x, 0) = g(x), \tag{34}$$

$g$  donné. L'idée est de partitionner  $\overline{\Omega}$  par des demi-droites obliques, appelées droites caractéristiques, le long desquelles la solution  $y$  est constante. La condition limite fournit alors  $y$  sur chaque caractéristique et donc partout dans  $\overline{\Omega}$ .

Soit  $(x(s), t(s))$  l'équation paramétrique d'une droite caractéristique. Désirant que la valeur  $y(x(s), t(s))$  soit constante par rapport à  $s$ , nous considérons la dérivée

$$d_s(y(x(s), t(s))) = (\partial_x y)(x(s), t(s))d_s x + (\partial_t y)(x(s), t(s))d_s t.$$

En comparant avec l'EDP

$$a(\partial_x y)(x(s), t(s)) + (\partial_t y)(x(s), t(s)) = 0,$$

valable notamment pour  $(x, t) = (x(s), t(s))$ , on observe que si l'on choisit la caractéristique  $(x(s), t(s))$  de manière que

$$d_s x = a \quad \text{et} \quad d_s t = 1, \quad (35)$$

on a bien  $y(x(s), t(s)) = C$ ,  $C$  constante. La résolution du système d'EDO (35) mène à  $x = as + x_0$  et  $t = s + t_0$ . Le choix  $t_0 = 0$  donne  $x = at + x_0$ . En faisant varier  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$  et en prenant  $t \geq 0$ , on trouve bien une famille de demi-droites partitionnant  $\overline{\Omega}$ . De plus, on a  $y(at + x_0, t) = y(x(s), t(s)) = C = y(x_0, 0) = g(x_0)$ , en vertu de la condition limite. En écrivant ce résultat avec les variables  $x$  et  $t$ , on obtient enfin

$$y(x, t) = g(x - at).$$

Plus généralement, examinons le cas d'une EDP linéaire du premier ordre

$$\sum_i L_i(x) \partial_{x_i} y + L_0(x) y(x) = f(x) \quad (36)$$

posée dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . De manière plus précise,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $y = y(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ , et les coefficients  $L_j$  et le second membre  $f$  sont donnés. Cherchons des **courbes caractéristiques**  $x(s)$ , en procédant comme ci-dessus, mais sans espérer que la solution  $y$  soit nécessairement constante le long de ces courbes. En dérivant  $y(x(s))$ , on trouve

$$d_s(y(x(s))) = \sum_i (\partial_{x_i} y)(x(s)) d_s x_i \quad (37)$$

et, en comparant avec l'EDP

$$\sum_i L_i(x(s)) (\partial_{x_i} y)(x(s)) + L_0(x(s)) y(x(s)) = f(x(s)) \quad (38)$$

écrite le long de  $x(s)$ , on est amené à poser

$$d_s x_i = L_i(x(s)), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (39)$$

si bien que la combinaison des équations (37) et (38) permet d'écrire l'EDP le long de la caractéristique  $x(s)$  sous la forme

$$d_s(y(x(s))) + L_0(x(s))y(x(s)) = f(x(s)) \quad \text{ou simplement} \quad d_s y + L_0(x(s))y(s) = f(x(s)). \quad (40)$$

Le système (39), (40) est alors un système de  $n + 1$  EDO en les  $n + 1$  inconnues  $x(s), y(s)$ . Sa résolution fournit, compte tenu des données à la limite négligées ici, les courbes caractéristiques  $x(s)$  et la solution  $y(s) = y(x(s))$  de l'EDP initiale le long de ces caractéristiques. Si les caractéristiques forment une partition, on connaît la solution  $y$  partout.

**Remarque 9.** La *méthode des caractéristiques* ramène l'intégration d'une EDP à celle d'un système d'EDO d'ordre 1, qui fournit les caractéristiques et la solution le long de ces caractéristiques. La technique peut être étendue à des EDP quelconques du premier ordre et même à certaines EDP d'ordre supérieur.

## Travaux à domicile

1. Montrer que la résolution, à l'aide de la méthode des caractéristiques, du problème aux limites  $x\partial_x y + \partial_t y = 0$ ,  $y(x, 0) = g(x)$ , posé dans le demi-plan  $\{(x, t) : t > 0\}$ , fournit la solution  $y(x, t) = g(xe^{-t})$ .
2. Appliquer la méthode des caractéristiques au problème aux limites posé dans le demi-plan  $\{(x, t) : t > 0\}$ , formé par l'EDP nonlinéaire du premier ordre de Burger  $y\partial_x y + \partial_t y = 0$  et la condition limite  $y(x, 0) = g(x)$ . Prouver qu'on obtient les caractéristiques  $x = g(x_0)t + x_0$  et une solution  $y$  vérifiant l'égalité  $y(x(t), t) = g(x_0)$  ou encore l'équation implicite  $y(x, t) = g(x - yt)$ . On remarquera que les caractéristiques  $x(t)$  sont des "droites" n'ayant plus nécessairement le même coefficient directeur et pouvant donc se couper. Au point d'intersection des caractéristiques associées à deux réels  $x_0$  et  $x_1$ , la solution  $y$  a donc deux valeurs  $g(x_0)$  et  $g(x_1)$  : l'intégration des EDP génère des solutions qui ne sont pas de "vraies fonctions".

## 11.5 Distributions

Nous venons de constater que l'intégration des EDP suggère une [généralisation de la notion de fonction](#). De plus, [la modélisation moyennant des EDP n'est pas toujours satisfaisante](#), car dans bon nombre de situations la nature fournit des solutions  $y$ , qui sont bien trop irrégulières pour pouvoir vérifier les EDP intervenant dans le modèle.

Afin de diminuer le rôle des irrégularités des fonctions, Laurent Schwartz a proposé de ne plus s'intéresser aux valeurs  $f(x)$  des fonctions  $f$  en chaque point  $x$ , mais de considérer plutôt des moyennes des valeurs de  $f$  au voisinage de chaque point. Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  désigne un

ouvert et si  $D(\Omega)$  est l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^\infty$  et a support compact dans  $\Omega$ , il étudie des “moyennes pondérées” du type

$$I_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx, \quad (41)$$

où la **fonction test**  $\phi$  varie dans  $D(\Omega)$ . Si  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  est une fonction localement intégrable dans  $\Omega$ , l'intégrale  $I_f(\phi)$  existe, si bien qu'on obtient une forme

$$I_f : D(\Omega) \ni \phi \rightarrow I_f(\phi) \in \mathbb{R},$$

qui est linéaire et même continue, à condition de donner à ce concept le sens approprié, problème sur lequel nous n'insisterons pas ici.

**Définition 3.** Soit un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . On appelle **distribution** dans  $\Omega$ , toute forme linéaire continue sur  $D(\Omega)$ . L'espace vectoriel des distributions dans  $\Omega$  est noté  $D'(\Omega)$ .

Si  $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  et si  $I_f = I_g$ , alors  $f = g$  presque partout dans  $\Omega$ . Il s'ensuit qu'on peut “remplacer” une fonction  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  par la distribution correspondante  $I_f \in D'(\Omega)$ .

Le concept de distribution généralise la notion de fonction :

1. La “**fonction de Dirac**”  $\delta$ , qui prend la “valeur”  $+\infty$  en  $0 \in \mathbb{R}$ , est nulle partout ailleurs dans  $\mathbb{R}$  et vérifie  $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$ , n'est évidemment pas une vraie fonction. Néanmoins, si pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\Delta_n(x) = \frac{n}{2}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < \frac{1}{n}$ , et  $\Delta_n(x) = 0$ , pour  $|x| \geq \frac{1}{n}$ , on sait prouver que, pour tout  $\phi \in D(\mathbb{R})$ , on a

$$“I_{\delta}(\phi) = ” \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \Delta_n(x)\phi(x)dx = \phi(0) =: \delta_0(\phi),$$

où  $\delta_0$  est une distribution. Cette **distribution de Dirac** est visiblement le pendant mathématique correct de la “fonction de Dirac” utilisée en Physique.

2. Si  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , on a, pour tout  $\phi \in D(\Omega)$  et tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$“I_{\partial_{x_i} f}(\phi) = \int_{\Omega} \partial_{x_i} f \phi(x) dx = ” \int_{\Omega} f(x)(-\partial_{x_i} \phi) dx = I_f(-\partial_{x_i} \phi) =: (\partial_{x_i} I_f)(\phi), \quad (42)$$

où  $\partial_{x_i} I_f$  est une distribution, qui donne un sens correct, dans le cadre des distributions, à la dérivée  $\partial_{x_i} f$  qui n'existe pas nécessairement.

Considérons à présent un problème aux limites général posé dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  à frontière “régulière” :

$$Ly = f \quad \text{et} \quad By|_{\partial\Omega} = g, \quad (43)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions données et où

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} L_\alpha \partial_x^\alpha \quad \text{et} \quad B = \sum_{|\alpha| \leq k-1} B_\alpha \partial_x^\alpha$$

sont deux opérateurs de dérivation donnés, que nous avons supposés linéaires et à coefficients constants pour simplifier.

La Physique pouvant fournir des solutions  $y$  du phénomène modélisé qui ne sont pas de classe  $C^k$  et ne peuvent donc pas être solutions du problème aux limites ci-dessus, nous réécrivons ce problème de manière que plus aucune dérivée n'agit sur  $y$ . Pour cela nous multiplions l'équation  $Ly = f$  par une fonction arbitraire  $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ , intégrons sur  $\Omega$  et procédons "par parties" :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \cdot \phi \, dx &= \int_{\Omega} Ly \cdot \phi \, dx = \sum_{|\alpha| \leq k} L_\alpha \int_{\Omega} \partial_x^\alpha y \cdot \phi \, dx \\ &= \int_{\Omega} y \cdot \sum_{|\alpha| \leq k} L_\alpha (-\partial_x)^\alpha \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} Ay \cdot \mathcal{A} \phi \, ds = \int_{\Omega} y \cdot \tilde{L} \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} Ay \cdot \mathcal{A} \phi \, ds, \end{aligned} \quad (44)$$

où l'opérateur de dérivation  $\tilde{L}$  porte le nom de **transposé** de l'opérateur  $L$ , où  $A$  et  $\mathcal{A}$  sont à leur tour des opérateurs de dérivation et où l'intégrale de surface est due au fait que  $\phi$  n'est plus, comme ci-dessus, à support compact dans  $\Omega$ . En effet, la formule de Gauss-Ostrogradski admet le cas particulier

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} w \, dx = \int_{\partial\Omega} w n_i \, ds,$$

dont l'application à  $w = uv$  mène à la **formule de transposition élémentaire**

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} u \cdot (-\partial_{x_i}) v \, dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, ds, \quad (45)$$

qui fournit, par applications successives, la formule de transposition (44). Rappelons que  $\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire extérieur à  $\partial\Omega$  et que les précédents résultats ne sont valables que sous des conditions de régularité sur l'ouvert  $\Omega$  et les fonctions impliquées.

Dans la plupart des problèmes aux limites qu'on rencontre dans les applications, l'intégrand du terme de surface admet une décomposition du type

$$Ay \cdot \mathcal{A} \phi = By \cdot \mathcal{B} \phi + Cy \cdot \mathcal{C} \phi, \quad (46)$$

où  $B$  est l'"opérateur frontière", voir équation (43), et où  $\mathcal{B}$ ,  $C$  et  $\mathcal{C}$  sont évidemment aussi des opérateurs de dérivation. Dans ce cas, toute solution  $y$  du **problème classique** (43) vérifie l'équation

$$\int_{\Omega} y \cdot \tilde{L} \phi \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \phi \, dx - \int_{\partial\Omega} g \cdot \mathcal{B} \phi \, ds, \quad (47)$$

pour tout  $\phi$  dans

$$V := \{\phi \in D(\mathbb{R}^n) : \mathcal{C} \phi|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (48)$$

Comme annoncé, dans le **problème généralisé** (47) l'inconnue  $y$  n'est sollicitée par aucune dérivée, si bien que ce problème peut admettre des solutions  $y$  qui sont seulement de classe  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ .

Le second membre de l'équation (47) est évidemment une distribution  $F$  – générée par l'“excitation volumique”  $f$  et l'“excitation surfacique”  $g$  imposées au milieu physique occupant la région  $\Omega$  – et, en comparant avec l'équation (42), on constate que le premier membre de (47) n'est autre que la “dérivée”  $LI_y$  de la distribution inconnue  $X = I_y$  par l'opérateur  $L$ . Dans les cours avancés, on étudie les problèmes généralisés

$$(LX)(\phi) = F(\phi), \forall \phi \in V,$$

où  $F$  est une distribution donnée et  $X$  une distribution cherchée.

## 11.6 \*Éléments finis, espaces de Sobolev\*

Il est conseillé de réserver cette sous-section pour une seconde lecture. La méthode des éléments finis (MEF) est un procédé de résolution numérique des EDP, basé sur les espaces de Sobolev. L'idée sous-jacente à ces espaces est encore celle de fonction ou dérivée généralisée. L'espace  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  est remplacé par l'espace fonctionnel  $L^2(\Omega)$  des fonctions de carré (du module) intégrable sur  $\Omega$ , qui est un espace de Hilbert – généralisation en dimension infinie des espaces euclidiens – pour le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g} dx$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'espace de Sobolev  $H^k(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions de  $L^2(\Omega)$ , dont les dérivées partielles d'ordre  $\leq k$ , au sens généralisé des distributions, appartiennent à  $L^2(\Omega)$ . De manière plus précise, il s'agit de l'espace des fonctions  $f \in L^2(\Omega)$ , dont les dérivées  $\partial_x^\alpha I_f$  au sens des distributions sont du type  $I_{g^\alpha}$ , où les fonctions  $g^\alpha$  appartiennent à  $L^2(\Omega)$ , et cela pour tout  $\alpha : |\alpha| \leq k$ . Les fonctions  $g^\alpha \in L^2(\Omega)$  sont appelées **dérivées généralisées** de  $f \in L^2(\Omega)$  et notées  $g^\alpha = \underline{\partial}_x^\alpha f$ . Donc

$$H^k(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : \underline{\partial}_x^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq k\}. \quad (49)$$

L'espace  $H^k(\Omega)$  est à son tour un espace de Hilbert. Il est naturel d'étudier ses relations avec l'espace  $C^k(\bar{\Omega})$  des fonctions de classe  $C^k$  sur  $\Omega$  qui admettent avec leurs dérivées d'ordre  $\leq k$  des limites sur  $\partial\Omega$ . On vérifie en particulier que  $C^k(\bar{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$  et que pour  $f \in C^k(\bar{\Omega})$  les dérivées ordinaires  $\partial_x^\alpha f$ ,  $|\alpha| \leq k$ , coïncident avec les dérivées généralisées correspondantes  $\underline{\partial}_x^\alpha f$ .

Considérons encore un problème aux limites classique général

$$L_2 k y = f, \quad B_{2k-1} y|_{\partial\Omega} = g, \quad \mathcal{C}_{k-1} y|_{\partial\Omega} = h, \quad (50)$$

où

$$L = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq k} L_{\alpha\beta} \partial_x^\alpha \partial_x^\beta$$

est un opérateur linéaire à coefficients constants d'ordre  $2k$ , où  $B$  et  $\mathcal{C}$  sont des opérateurs de dérivation d'ordre  $2k - 1$  et  $k - 1$  respectivement, et où les excitations  $f, g, h$  aux seconds membres sont supposées connues.

La MEF est subdivisée en 2 étapes.

### Étape 1

Considérons une solution  $y \in C^{2k}(\bar{\Omega})$  du problème classique, multiplions les deux membres de l'équation en volume par une fonction test  $v \in H^k(\Omega)$ , intégrons sur  $\Omega$  et transférons, moyennant la formule de transposition élémentaire étendue aux fonctions de  $H^1(\Omega)$  et à leurs dérivées généralisées, autant de dérivées que possible sur  $v$ . Il vient alors

$$\int_{\Omega} f \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq k} L_{\alpha\beta} \partial_x^{\beta} y \cdot (-\partial_x)^{\alpha} v \, dx + \int_{\partial\Omega} \underline{B}_{2k-1} y \cdot \underline{\mathcal{B}}_{k-1} v + \underline{C}_{2k-1} y \cdot \underline{\mathcal{C}}_{k-1} v \, ds,$$

où nous avons encore supposé que l'intégrand du terme de surface admet une décomposition renfermant les opérateurs intervenant dans les conditions aux limites. Ainsi, la solution  $y$  du problème classique vérifie

$$\forall v \in H := \{H^k(\Omega) : \underline{\mathcal{C}}_{k-1} v|_{\partial\Omega} = 0\} :$$

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq k} L_{\alpha\beta} \partial_x^{\beta} y \cdot (-\partial_x)^{\alpha} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx - \int_{\partial\Omega} g \cdot \underline{\mathcal{B}}_{k-1} v \, ds. \quad (51)$$

Supposons avoir trouvé un élément  $w$  dans  $H^k(\Omega)$  tel que  $\underline{\mathcal{C}}_{k-1} w|_{\partial\Omega} = h$ . La solution classique  $y$  est alors un élément de  $w + H$ , qui vérifie la condition généralisée (51). On observera que dans ce problème généralisé, la condition aux limites d'ordre  $\leq k - 1$  est encodée dans l'espace  $H$ , alors que la condition aux limites d'ordre  $\leq 2k - 1$  est encryptée dans la forme linéaire  $c(v)$  définie par le second membre de (51). Si l'on désigne par  $a(y, v)$  la forme bilinéaire donnée par le premier membre de (51), le problème généralisé revient à chercher une fonction  $y \in w + H$ , telle que  $a(y, v) = c(v)$ , pour tout  $v \in H$ , ou encore, si l'on pose  $y = w + u$  et  $b(v) = c(v) - a(w, v)$ , à chercher

$$u \in H : a(u, v) = b(v), \forall v \in H. \quad (52)$$

Si nous supposons que la forme  $a$  est elliptique – n'insistons pas —, le dernier problème admet une unique solution en vertu du théorème de Lax-Milgram :

**Théorème 3.** *Si  $H$  est un espace de Hilbert,  $a$  une forme bilinéaire continue et elliptique sur  $H$  et  $b$  une forme linéaire continue sur  $H$ , il existe un seul  $u \in H$ , tel que  $a(u, v) = b(v), \forall v \in H$ .*

Observons que cette solution du problème généralisé est une fonction  $u \in H^k(\Omega)$ , alors qu'une solution du problème classique doit être une fonction beaucoup plus régulière  $y \in C^{2k}(\bar{\Omega})$ .

## Étape 2

On remplace le problème généralisé (52) dans l'espace de dimension infinie  $H$  par ses analogues qui consistent à chercher

$$u_n \in H_n : a(u_n, v) = b(v), \forall v \in H_n \quad (53)$$

dans des sous-espaces  $H_n$  de  $H$  de dimension finie, tels que les solutions  $u_n$  des **problèmes discrétisés** (53) convergent vers la solution  $u$  du problème généralisé. D'autre part, dans une telle approche numérique, il est avantageux de savoir déterminer, pour un niveau d'approximation souhaité, le seuil  $n$  à partir duquel ce niveau est atteint.

Afin de calculer l'approximation  $u_n$  de  $u$ , il s'agit donc de construire d'abord des sous-espaces  $H_n$  convenables et, explicitement, des bases  $(e_1, \dots, e_d)$  de ces  $H_n$  - afin de simplifier nous avons omis l'indice  $n$ . Nous invitons le lecteur à s'informer sur les constructions de ces **espaces et bases de type élément fini**, que nous ne décrirons pas ici. Si l'on pose ensuite  $u_n = u_n^i e_i$ , le problème discrétisé (53) prend la forme

$$\begin{pmatrix} a(e_1, e_1) & \dots & a(e_d, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(e_1, e_d) & \dots & a(e_d, e_d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(e_1) \\ \vdots \\ b(e_d) \end{pmatrix}, \quad (54)$$

où la **matrice de rigidité**  $R = (a(e_j, e_i))_{ij}$  et le second membre sont connus. Il découle de l'ellipticité de  $a$  que  $R$  est inversible, de sorte que le calcul explicite de  $u_n$  est ramené à cette inversion. Néanmoins, la dimension  $d$  de  $H_n$  pouvant être très élevée, l'intégration du problème discrétisé, même moyennant un ordinateur puissant, peut être longue. Voilà pourquoi on choisit une base, telle que beaucoup d'entrées de  $R$  soient nulles. La forme de  $a$ , voir équation (51), permet de constater qu'il s'agit de choisir les  $e_i$  de manière que leurs supports soient disjoints pour des  $i$  et  $j$  non voisins.

## 12 Appendice 2: Analyse tensorielle intrinsèque dans un espace non euclidien

Jusqu'ici, nous avons traité les tenseurs essentiellement comme uplets de composantes qui se transforment selon la loi tensorielle lors d'un changement de base orthonormée dans l'espace euclidien tridimensionnel. Le concept de tenseur n'apparaît cependant pas seulement en Dynamique des solides et des milieux continus, mais est fondamental dans de nombreux domaines des Mathématiques et de la Physique, par exemple en **Géométrie différentielle** et en **Relativité générale**. Ces nouveaux champs d'application requièrent une approche plus moderne. Ci-dessous, nous présentons des éléments de calcul tensoriel, en choisissant (partiellement) une **approche intrinsèque**, i.e. indépendante de la notion de base, et en travaillant

dans un espace vectoriel réel de dimension finie **non nécessairement euclidien**, ce qui entraîne l'apparition d'**indices contravariants** (en exposant) and d'**indices covariants** (en indice).

## 12.1 Contravariance, covariance

Désignons par  $V$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ .

Nous avons déjà souvent mentionné que la matrice de transition  $A$  (resp.  $A'$ ) d'une base  $(e_i)$  (resp.  $(e'_i)$ ) de  $V$  à une autre base  $(e'_i)$  (resp.  $(e_i)$ ) de  $V$  est définie par

$$e'_j = A^i_j e_i \text{ (resp. } e_j = A'^i_j e'_i), \quad (55)$$

où la convention de sommation d'Einstein a été utilisée. On construit donc la **matrice de passage en décomposant les vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base et en choisissant les uplets de composantes ainsi obtenus comme colonnes de cette matrice**. Les matrices  $A$  et  $A'$  encodant des changements de base inverses, on a évidemment  $A' = A^{-1}$ . Par contre, l'espace  $V$  n'étant pas nécessairement muni d'un produit scalaire, la notion de base orthonormée est dépourvue de sens et les matrices de passage ne sont plus orthogonales, i.e. on n'a plus nécessairement  $A^{-1} = \tilde{A}$ .

En décomposant un vecteur  $v \in V$  dans la base  $(e'_i)$  (resp.  $(e_i)$ ) et en passant ensuite à la base  $(e_i)$  (resp.  $(e'_i)$ ) moyennant l'équation (55), on trouve la loi de transformation

$$v^i = A^i_j v'^j \text{ (resp. } v'^i = A'^i_j v^j) \quad (56)$$

des composantes d'un vecteur au cours d'un changement de base. Il est bien connu que la **loi vectorielle exprime les composantes dans l'ancienne base en fonction de celles dans la nouvelle base**.

La comparaison de la seconde (resp. première) équation (55) et de la première (resp. seconde) équation (56) permet de constater que les composantes se transforment contrairement aux vecteurs de base : on parle de composantes **contravariantes** et on écrit les indices en **exposant**. Les vecteurs de base eux-mêmes sont évidemment **covariants** ; on utilise la notation en **indice**. Observons que les **sommations portent toujours sur un indice répété dans un même membre, dont l'un est contra- et l'autre covariant, qu'un même indice libre est toujours du même type dans les deux membres, soit deux fois contra-, soit deux fois covariant, et remarquons que, si l'on exprime les anciens objets en fonction des nouveaux, un objet contravariant génère au second membre un élément de la matrice de passage et un objet covariant un élément de la matrice de passage inverse**.

## 12.2 Dual d'un espace vectoriel

**Définition 4.** On appelle **espace dual** d'un espace vectoriel réel  $V$ , l'espace vectoriel  $V^* := \mathcal{L}_1(V, \mathbb{R})$  des formes linéaires sur  $V$ .

Si  $V$  est de dimension finie  $n$ , toute base  $(e_i)$  de  $V$  induit une base  $(\varepsilon^i)$  de  $V^*$ , appelée base duale de la base  $(e_i)$ . Les  $\varepsilon^i \in V^* = \mathcal{L}_1(V, \mathbb{R})$  sont complètement définis par leurs valeurs sur les vecteurs de base  $e_j$ .

**Définition 5.** On appelle *base duale* d'une base  $(e_i)$  de  $V$ , la base  $(\varepsilon^i)$  de  $V^*$  définie par

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j, \quad (57)$$

où  $\delta^i_j$  est le symbole de Kronecker.

Les éléments  $\varepsilon^i$  de  $V^*$  ainsi définis forment bien une base. De fait, d'un côté, les  $\varepsilon^i$  constituent une famille génératrice de  $V^*$ , car, quels que soient  $\alpha \in V^*$  et  $x = x^i e_i \in V$ , on a

$$\alpha(x) = x^i \alpha(e_i) = \alpha_i \varepsilon^i(x) = (\alpha_i \varepsilon^i)(x),$$

où nous avons posé

$$\alpha_i = \alpha(e_i) \quad (58)$$

et où nous avons utilisé l'égalité

$$\varepsilon^i(x) = x^j \varepsilon^i(e_j) = x^i. \quad (59)$$

D'un autre côté, cette famille est libre, car  $\lambda_i \varepsilon^i = 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , implique  $\lambda_i \varepsilon^i(e_j) = 0$ , i.e.  $\lambda_j = 0$ .

**Remarque 10.** Il résulte de ce qui précède que l'espace dual de  $V$  a la même dimension que  $V$ .

Il est naturel de demander si  $(V^*)^* \simeq V$ , tout comme  $\tilde{M} = M$ ,  $M \in \text{gl}(n, \mathbb{R})$ , ou  $\bar{z} = z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Afin de trouver la réponse à cette question, notons que l'application

$$b : V \times V^* \ni (x, \alpha) \rightarrow \alpha(x) \in \mathbb{R}$$

est bilinéaire et induit une application linéaire

$$\hat{b} : V \ni x \rightarrow b(x, -) \in \mathcal{L}_1(V^*, \mathbb{R}) = (V^*)^*.$$

Il suffit à présent de prouver que  $\hat{b}$  est bijectif. Comme  $\dim V = \dim(V^*)^*$ , il découle du théorème du rang démontré en algèbre linéaire que

$$\dim \ker \hat{b} + \dim \text{im } \hat{b} = \dim(V^*)^*,$$

si bien que l'injectivité de  $\hat{b}$  entraîne sa surjectivité. Or,  $\hat{b}$  est visiblement injectif, car  $b(x, -) = 0$  implique en particulier que  $b(x, \varepsilon^i) = \varepsilon^i(x) = x^i = 0$ , de sorte que  $x = 0$ .

On notera que la dimension finie de  $V$  joue ici un rôle essentiel :

**Proposition 9.** *Un espace vectoriel  $V$  de dimension finie est isomorphe à son **bidual**  $(V^*)^*$  (et tel n'est pas le cas pour un espace vectoriel de dimension infinie).*

Dans la suite, nous identifierons systématiquement  $V$  et  $(V^*)^*$  par cet isomorphisme. Ceci signifie qu'un élément quelconque  $x \in V$  sera identifié à l'élément  $b(x, -)$ , de sorte que, pour tout  $\alpha \in V^*$ ,

$$x(\alpha) \simeq \alpha(x). \quad (60)$$

Les équations (58) et (59) montrent alors que

$$x^i = \varepsilon^i(x) \quad \text{et} \quad \alpha_i = e_i(\alpha), \quad (61)$$

i.e. qu'on obtient les composantes de  $x$  et de  $\alpha$  en agissant par le vecteur de base approprié. Il s'avérera que cette observation est générale.

### 12.3 Tenseurs contravariants et covariants

Étant donné que lors d'un changement de base, les composantes d'un vecteur

$$v \in V = \mathcal{L}_1(V^*, \mathbb{R}) \quad (62)$$

se transforment de manière contravariante, i.e. conformément à la loi

$$v^i = A^i_a v'^a, \quad (63)$$

avec des notations évidentes, les éléments de  $V$  sont appelés vecteurs ou **1-tenseurs contravariants**.

Considérons désormais un vecteur

$$\alpha \in V^* = \mathcal{L}_1(V, \mathbb{R}) \quad (64)$$

et cherchons la loi de transformation de ses composantes  $\alpha_i$  dans la base duale  $(\varepsilon^i)$  de la base  $(e_i)$  de  $V$ . Si l'on désigne par  $\alpha'_i$  les composantes de  $\alpha$  dans la base duale  $(\varepsilon'^i)$  associée à une deuxième base  $(e'_i)$  de  $V$ , on a

$$\alpha_i = e_i(\alpha) = \alpha(e_i) = A'^a_i \alpha'_a = A'^a_i \alpha'_a. \quad (65)$$

Les composantes de  $\alpha$  se transformant ainsi comme les vecteurs de base, les éléments de  $V^*$  sont appelés vecteurs ou **1-tenseurs covariants**.

Remarquons que dans un espace euclidien, si on se limite à des changements de base orthonormée, la distinction entre vecteurs contravariants et vecteurs covariants est redondante. De fait, la matrice de passage  $A$  étant alors toujours orthogonale, on a

$$A'^a_i = \tilde{A}^a_i = A^i_a,$$

de sorte que (65) se réduit à (63).

L'intérêt des précédentes considérations réside dans les généralisations suivantes.

Prenons d'abord un élément

$$T \in V \otimes V^* := \mathcal{L}_2(V^* \times V, \mathbb{R}) \quad (66)$$

de l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur  $V^* \times V$ , qui est de dimension  $n^2$ , où  $n = \dim V$ . Il est naturel de dire que  $V \otimes V^*$  est l'espace des **2-tenseurs une fois contra- et une fois covariants** et d'augurer que la loi de transformation des composantes de  $T$  sera

$$T^i_j = A^i_a A'^b_j T'^a_b. \quad (67)$$

Avant de pouvoir vérifier cette conjecture, nous devons construire la base de l'espace  $V \otimes V^*$  induite par une base  $(e_i)$  de  $V$ . En effet, cette dernière induit la base  $(\varepsilon^i)$  de  $V^*$  et également une base  $(e_i \otimes \varepsilon^j)$  de  $V \otimes V^* = \mathcal{L}_2(V^* \times V, \mathbb{R})$ . La définition des "produits tensoriels"  $e_i \otimes \varepsilon^j$  sur les couples  $(\alpha, x) \in V^* \times V$  est canonique :

$$(e_i \otimes \varepsilon^j)(\alpha, x) := e_i(\alpha) \varepsilon^j(x) = \alpha_i x^j. \quad (68)$$

Les  $n^2$  formes bilinéaires ainsi définies constituent bien une famille génératrice de  $V \otimes V^*$ . De fait, pour tout  $T \in V \otimes V^*$ , on a

$$T(\alpha, x) = \alpha_i x^j T(\varepsilon^i, e_j) = T^i_j (e_i \otimes \varepsilon^j)(\alpha, x) = (T^i_j e_i \otimes \varepsilon^j)(\alpha, x).$$

Il suffit à présent d'évoquer le fait que la dimension de l'espace  $V \otimes V^*$  est  $n^2$ . Observons enfin que **les composantes**

$$T^i_j = T(\varepsilon^i, e_j) \quad (69)$$

de  $T \in V \otimes V^*$  dans la base  $(e_i \otimes \varepsilon^j)$  sont encore obtenues en agissant par  $T$  sur les vecteurs de base adéquats.

Nous sommes à présent capables de démontrer la loi de transformation des composantes de  $T$ . Rappelons qu'au passage de la base  $(e_i)$  à la base  $(e'_i)$  est associé le passage de la base duale  $(\varepsilon^i)$  à la base duale  $(\varepsilon'^i)$  et le passage de la base  $(e_i \otimes \varepsilon^j)$  à la base  $(e'_i \otimes \varepsilon'^j)$ . Il est logique de penser que les vecteurs des bases duales vérifient

$$\varepsilon^i = A^i_j \varepsilon'^j. \quad (70)$$

Afin de prouver l'égalité de ces deux formes linéaires, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur les vecteurs de base  $e_a$ . Or,

$$A^i_j \varepsilon'^j(e_a) = A^i_j A'^b_a \varepsilon'^j(e'_b) = A^i_j A'^j_a = \delta^i_a,$$

ce qui est exactement la valeur de  $\varepsilon^i$  sur  $e_a$ . Ceci établit la loi de transformation (70) des vecteurs de base duaux et confirme la loi de transformation conjecturée des  $T^i_j$  :

$$T^i_j = T(\varepsilon^i, e_j) = A^i_a A^{lb}_j T(\varepsilon^{la}, e'_b) = A^i_a A^{lb}_j T^{la}_b. \quad (71)$$

De manière plus générale, on donne la

**Définition 6.** Si  $V$  désigne un espace vectoriel réel de dimension  $n$ , l'espace vectoriel réel de dimension  $n^{p+q}$

$$\otimes_q^p V := \overbrace{V \otimes \dots \otimes V}^p \otimes \overbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}^q := \mathcal{L}_{p+q}(\overbrace{V^* \times \dots \times V^*}^p \times \overbrace{V \times \dots \times V}^q, \mathbb{R}), \quad (72)$$

$p, q \in \mathbb{N}$ , est l'espace des *tenseurs sur  $V$ , d'ordre  $p+q$ ,  $p$  fois contra- et  $q$  fois covariants* ou encore l'espace des *tenseurs de type  $(p, q)$  sur  $V$* . En particulier, on a  $\otimes_0^1 V = V$  et  $\otimes_1^0 V = V^*$ , et par convention  $\otimes_0^0 V = \mathbb{R}$ .

La généralisation des résultats relatifs aux tenseurs de type  $(1, 1)$  fournit la

**Proposition 10.** Soit un espace vectoriel réel  $V$  de dimension  $n$ . Désignons par  $(e_i)$  une base de  $V$  et par  $(\varepsilon^i)$  sa base duale dans  $V^*$ . Les produits tensoriels

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_q}, \quad i_a, j_b \in \{1, \dots, n\}, \quad (73)$$

définis par extension naturelle de l'équation (68), forment une base de  $\otimes_q^p V$ . Les composantes

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) \quad (74)$$

de  $T \in \otimes_q^p V$  se transforment lors d'un changement de base selon la *loi tensorielle de type  $(p, q)$*  :

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A^{i_1}_{a_1} \dots A^{i_p}_{a_p} A^{b_1}_{j_1} \dots A^{b_q}_{j_q} T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}. \quad (75)$$

Il est bien connu que si l'on dispose dans chaque système d'axes d'un  $n$ -uplet de réels  $x^i$  et si ces paquets de réels se transforment conformément à la loi vectorielle (56), ils définissent un (seul) vecteur. De manière plus générale, si une grandeur mécanique, physique ou autre est caractérisée dans chaque base de  $V$  par un  $n^{p+q}$ -uplet de réels  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  qui satisfont à la loi tensorielle (75), ces uplets sont les composantes d'un tenseur  $p$  fois contra- et  $q$  fois covariant de  $V$ , et la grandeur considérée est décrite intrinsèquement par ce tenseur : c'est la généralisation au cas d'un espace noneuclidien de dimension quelconque, de l'approche que nous avons utilisée dans l'espace euclidien tridimensionnel.

**Remarque 11.** Signalons que dans les cours avancés on définit l'espace  $\otimes_q^p V$  comme solution d'un "problème universel". On prouve ensuite que l'espace ainsi défini est canoniquement isomorphe à l'espace

$$\mathcal{L}_{p+q}(V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V, \mathbb{R}),$$

qui en constitue donc un modèle. Il est clair qu'une telle présentation sort du cadre de ce cours.

Les espaces  $\otimes_q^p V$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , étant pour l'addition "+" des formes multilinéaires et la multiplication "." de ces formes par les réels, des espaces vectoriels réels de dimension  $n^{p+q}$ , leur **somme directe**

$$\otimes V := \bigoplus_{p, q \in \mathbb{N}} \otimes_q^p V$$

est à son tour un espace vectoriel réel, qui est cependant de dimension infinie. Il existe sur  $\otimes V$  également une *multiplication interne*, qui étend le produit tensoriel (68) associant aux tenseurs  $e_i \in \otimes_0^1 V$  et  $\varepsilon^j \in \otimes_1^0 V$  le tenseur  $e_i \otimes \varepsilon^j \in \otimes_1^1 V$ . De fait, on a la

**Proposition 11.** Le *produit tensoriel de deux tenseurs*  $T \in \otimes_q^p V$  et  $U \in \otimes_s^r V$  est le tenseur  $T \otimes U \in \otimes_{q+s}^{p+r} V$  défini par

$$(T \otimes U)(\alpha^1, \dots, \alpha^{p+r}, x_1, \dots, x_{q+s}) = T(\alpha^1, \dots, \alpha^p, x_1, \dots, x_q) U(\alpha^{p+1}, \dots, \alpha^{p+r}, x_{q+1}, \dots, x_{q+s}). \quad (76)$$

Ce produit " $\otimes$ " munit l'espace vectoriel  $(\otimes V, +, \cdot)$  d'une structure d'*algèbre associative unitaire non commutative*.

L'associativité et la noncommutativité sont des conséquences immédiates de la définition. L'élément unité est  $1 \in \mathbb{R} = \otimes_0^0 V$ , car si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $\lambda \otimes T = \lambda T$ .

**Remarque 12.** Nous venons de définir le produit tensoriel  $V \otimes V^*$  des espaces vectoriels  $V$  et  $V^*$ , ainsi que le produit tensoriel  $T \otimes U$  des tenseurs  $T$  et  $U$ . On définit de même le *produit tensoriel d'espaces vectoriels réels de dimension finie*  $V_1, \dots, V_p$  en posant

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_p = \mathcal{L}_p(V_1^* \times \dots \times V_p^*, \mathbb{R}).$$

Le *produit tensoriel de tenseurs*  $v_i \in V_i$  est également défini suivant les mêmes lignes que ci-dessus :

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_p)(\alpha^1, \dots, \alpha^p) = \prod_i v_i(\alpha^i),$$

où  $\alpha^i \in V_i^*$ .

## Travail dirigé

Quels que soient les espaces vectoriels  $V_1, \dots, V_p, W$ , on a

$$\mathcal{L}_p(V_1 \times \dots \times V_p, W) \simeq \mathcal{L}_1(V_1 \otimes \dots \otimes V_p, W), \quad (77)$$

i.e. l'espace vectoriel des applications multilinéaires sur le produit cartésien  $V_1 \times \dots \times V_p$  est isomorphe à l'espace vectoriel des applications linéaires sur le produit tensoriel correspondant  $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ .

- Démontrer ce résultat.
- Prouver que pour toute application multilinéaire  $L \in \mathcal{L}_p(V_1 \times \dots \times V_p, W)$  sur le produit cartésien, il existe une unique application linéaire  $\ell \in \mathcal{L}_1(V_1 \otimes \dots \otimes V_p, W)$  sur le produit tensoriel, telle que

$$\ell(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = L(v_1, \dots, v_p), \forall v_i \in V_i.$$

Cette **propriété fondamentale du produit tensoriel** est souvent utilisée s'il s'agit de définir une application dont l'espace de départ est un produit tensoriel. De fait, chaque tenseur  $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_p$  se décompose en une somme finie  $T = \sum v_1 \otimes \dots \otimes v_p$  de **tenseurs décomposables**, mais cette décomposition n'est pas unique.

## Travaux à domicile

1. Soient des espaces vectoriels réels de dimension finie  $V$  et  $W$ . Établir les isomorphismes suivants, qui sont souvent utiles :

$$V^* \otimes W \simeq \mathcal{L}_1(V, W) \text{ and } (\otimes_q^p V)^* \simeq \otimes_q^p V^*.$$

Le premier est une conséquence immédiate de la définition du produit tensoriel et d'une propriété bien connue d'**algèbre multilinéaire**. Le second est un cas particulier de l'isomorphisme (77).

2. Montrer que la définition intrinsèque du produit tensoriel de deux tenseurs donnée ci-dessus, coïncide avec la définition du produit de deux tenseurs en coordonnées.
3. Revenir aux tenseurs dans l'espace euclidien tridimensionnel et aux changements de base orthonormée. Prouver qu'il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des 2-tenseurs antisymétriques et l'ensemble des pseudo-vecteurs.

*Suggestion* : Un 2-tenseur antisymétrique  $T_{ij}$  n'ayant que trois **composantes effectives**  $v_1 = T_{23}$ ,  $v_2 = T_{31}$  et  $v_3 = T_{12}$ , on a

$$v_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_{jk}. \quad (78)$$

On en déduit immédiatement que les  $v_i$  sont les composantes d'un pseudo-vecteur. Associer de manière analogue un 2-tenseur antisymétrique à tout pseudo-vecteur et prouver que l'application ainsi définie est la réciproque de l'application (78).

# Chapitre 2

## Formalismes de Lagrange et de Hamilton, relations avec la géométrie

### 1 Introduction

Les formalismes lagrangien et hamiltonien sont des reformulations de la Mécanique classique des systèmes moyennant des équations différentes de celle de Newton. Les nouvelles équations, appelées équations de Lagrange et de Hamilton, ne simplifient généralement pas la résolution des problèmes concrets, mais sont conceptuellement plus profondes. Combinés aux formulations variationnelles de la Mécanique classique et à l'équation de Hamilton-Jacobi, qui seront brièvement étudiées au cours du quatrième semestre, les formalismes de Lagrange et de Hamilton permettront notamment de découvrir la **Mécanique quantique**, i.e. la théorie qui se substitue à la Mécanique classique lorsque les dimensions du système dynamique étudié sont de l'ordre de celle des atomes. Finalement, ces formalismes - qui constituent la **Mécanique analytique** - sont à l'origine de nombreux développements récents en Géométrie moderne et en Physique théorique, dont certains seront décrits dans la suite.

### 2 Formalisme de Lagrange

La formulation newtonienne de la dynamique convient particulièrement bien, lorsque le système étudié n'est soumis à aucune liaison. Dans le cas contraire, il apparaît des forces de liaisons généralement incomplètement connues. D'autre part, des relations de liaisons relient les coordonnées, qui ne sont plus indépendantes. Par exemple, dans le cas du pendule simple, l'équation de Newton s'écrit  $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N}$  et les coordonnées  $(x, y)$  de  $\vec{r}$  sont liées par la relation  $x^2 + y^2 = R^2$ , avec des notations évidentes. Dans chaque situation de ce type, il s'agit alors évidemment d'éliminer la (les) coordonnée(s) superflue(s) et la (les) force(s) de

liaison(s) de l'équation de Newton. [La méthode de Lagrange a l'avantage de conduire à des équations générales ne contenant ni de paramètre superflu, ni de force de liaison.](#)

## 2.1 Liaisons holonomes, coordonnées généralisées

Dans la suite, nous supposons le système soumis uniquement à des **liaisons holonomes** (condition C1). Une liaison est dite holonome, lorsqu'elle se traduit par un nombre fini d'égalités dépendant uniquement du temps et des positions, mais non des vitesses des particules du système.

La description de la configuration d'un système de  $N$  particules requiert en général la spécification de  $3N$  coordonnées. [Il s'impose de choisir des coordonnées permettant d'exprimer les liaisons le plus facilement possible.](#) Dans le cas du pendule simple par exemple, il est naturel d'utiliser les coordonnées polaires plutôt que les coordonnées cartésiennes. En effet, la liaison se traduit par  $r = R$  en coordonnées polaires, mais par  $x^2 + y^2 = R^2$  en coordonnées cartésiennes. Ces équations de liaison simples permettent alors d'évincer les paramètres superflus. En effet, dans l'exemple du pendule, il suffit de remplacer  $r$  par  $R$  partout où cette coordonnée apparaît. Les coordonnées restantes - en nombre égal au nombre  $n$  de degrés de liberté - sont appelées **coordonnées généralisées ou lagrangiennes** et sont désignées par  $q_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ . Dans notre exemple, l'angle polaire  $\theta$  est l'unique coordonnée généralisée.

La remarque suivante sera utile dans la suite.

**Remarque 1.** *Il découle du caractère holonome des liaisons que les coordonnées généralisées - grandeurs indépendantes  $q_\alpha$ , en nombre égal au nombre de degrés de liberté du système - sont telles que, à tout instant, tout choix des  $q_\alpha$  fournisse une configuration du système qui est compatible avec les liaisons existantes.*

## 2.2 Principe de d'Alembert, équations de Lagrange

Étant donné un système matériel  $P_1, \dots, P_N$  et un instant  $t$ , on appelle **déplacement virtuel** du système à l'instant considéré, des déplacements imaginés  $\delta\vec{r}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , des particules  $P_i$  du système, qui sont infinitésimaux et compatibles avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant  $t$ . Dans le cas d'une particule  $P$  unique, astreinte à se mouvoir sur une courbe lisse et mobile  $C$ , le déplacement réel de  $P$  au cours d'un intervalle de temps  $[t, t + dt]$  est donné par la différentielle  $d\vec{r}$  du vecteur position, qui relie les positions  $\vec{r}(t)$  sur  $C(t)$  et  $\vec{r}(t + dt)$  sur  $C(t + dt)$ . Un déplacement virtuel à l'instant  $t$  par contre est une construction mentale et correspond à un vecteur  $\delta\vec{r}$  qui joint deux points infiniment proches de  $C(t)$ . On notera que la force de liaison, ici la réaction normale exercée par  $C$  sur  $P$ , effectue un certain travail réel dans le déplacement réel  $d\vec{r}$ , mais que son travail virtuel dans le déplacement virtuel  $\delta\vec{r}$  est nul,  $\delta\vec{r}$  pouvant être considéré comme tangent à  $C(t)$ .

Afin d'éliminer les forces de liaisons, on décompose la résultante  $\vec{F}_i$  des forces s'exerçant sur  $P_i$  sous la forme

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{F}_i^\ell,$$

où  $\vec{F}_i^\ell$  est la résultante des forces de liaisons agissant sur la particule  $P_i$  et où  $\vec{F}_i^a$  est la résultante des (autres) forces appliquées à cette particule. Considérons à présent un déplacement virtuel quelconque  $\delta\vec{r}_i$  à partir de la configuration du système à l'instant  $t$ , multiplions l'équation de Newton  $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$  scalairement par  $\delta\vec{r}_i$  et sommons sur  $i$  :

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^\ell \cdot \delta\vec{r}_i. \quad (1)$$

Nous nous limiterons aux systèmes pour lesquels le **travail virtuel total des forces de liaisons** est nul, i.e.  $\sum_i \vec{F}_i^\ell \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ , quel que soit le déplacement virtuel considéré (condition C2). Cette relation est connue sous le nom de **principe de d'Alembert**. Remarquons que la condition du travail virtuel nul est notamment satisfaite par les forces internes d'un solide, les réactions à des pivots fixes, les réactions des courbes ou surfaces parfaitement lisses ou parfaitement rugueuses. Compte tenu de cette hypothèse, l'équation (1) s'écrit

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i. \quad (2)$$

La remarque 1 implique que les

$$\delta\vec{r}_i := \vec{r}_i(t, q + \delta q) - \vec{r}_i(t, q) = \sum_\alpha \partial_{q_\alpha} \vec{r}_i \delta q_\alpha \quad (3)$$

constituent un déplacement virtuel du système à l'instant  $t$ , *quels que soient les accroissements infinitésimaux*  $\delta q := (\delta q_1, \dots, \delta q_n)$ .

La transformation du premier membre de l'équation (2) est basée sur trois observations.

- Quel que soit un vecteur  $\vec{u}$  dépendant de manière différentiable d'une variable, on a

$$\vec{u} \cdot \partial \vec{u} = \frac{1}{2} (\partial \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \partial \vec{u}) = \frac{1}{2} \partial (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{1}{2} \partial (u^2),$$

où  $\partial$  désigne la dérivée par rapport à cette variable.

- On vérifie facilement que

$$d_t \partial_{q_\alpha} \vec{r}_i = \partial_{q_\alpha} d_t \vec{r}_i, \quad (4)$$

i.e. que la dérivée temporelle totale et la dérivée partielle par rapport à une coordonnée généralisée commutent lorsqu'elles agissent sur un vecteur  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q)$ .

- Comme

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \partial_t \vec{r}_i + \sum_{\beta} \partial_{q_{\beta}} \vec{r}_i \dot{q}_{\beta} = \vec{v}_i(t, q, \dot{q}),$$

il est clair que

$$\partial_{\dot{q}_{\alpha}} \dot{\vec{r}}_i = \partial_{q_{\alpha}} \vec{r}_i, \quad (5)$$

résultat que l'on traduit en affirmant qu'on peut simplifier par le point.

Cela étant, la suivante transformation du premier membre de l'équation (2) est naturelle, car on remarque rapidement qu'il pourrait s'avérer que le résultat s'exprime moyennant des dérivées de l'énergie cinétique totale  $E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$  du système dynamique étudié :

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{\alpha} \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \partial_{q_{\alpha}} \vec{r}_i \delta q_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_i m_i (d_t (\vec{v}_i \cdot \partial_{q_{\alpha}} \vec{r}_i) - \vec{v}_i \cdot d_t \partial_{q_{\alpha}} \vec{r}_i) \delta q_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_i m_i (d_t (\vec{v}_i \cdot \partial_{\dot{q}_{\alpha}} \vec{r}_i) - \vec{v}_i \cdot \partial_{q_{\alpha}} d_t \vec{r}_i) \delta q_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_i m_i (d_t (\vec{v}_i \cdot \partial_{\dot{q}_{\alpha}} \vec{v}_i) - \vec{v}_i \cdot \partial_{q_{\alpha}} \vec{v}_i) \delta q_{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_i m_i (d_t \partial_{\dot{q}_{\alpha}} v_i^2 - \partial_{q_{\alpha}} v_i^2) \delta q_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} (d_t \partial_{\dot{q}_{\alpha}} E_c - \partial_{q_{\alpha}} E_c) \delta q_{\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Vu que le second membre prend la forme

$$\sum_i \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha} \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \partial_{q_{\alpha}} \vec{r}_i \delta q_{\alpha} \quad (7)$$

et que les  $\delta q_{\alpha}$  sont des infiniments petits *arbitraires*, l'équation (2) - conséquence immédiate de l'équation de Newton - s'écrit finalement

$$d_t \partial_{\dot{q}_{\alpha}} E_c - \partial_{q_{\alpha}} E_c = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \partial_{q_{\alpha}} \vec{r}_i, \quad \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (8)$$

ou encore

$$\mathcal{L}_{\alpha} E_c = Q_{\alpha}, \quad \alpha \in \{1, \dots, n\}, \quad (9)$$

si nous introduisons les **opérateurs de Lagrange**

$$\mathcal{L}_{\alpha} = d_t \partial_{\dot{q}_{\alpha}} - \partial_{q_{\alpha}} \quad (10)$$

et les **forces généralisées**

$$Q_{\alpha} = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \partial_{q_{\alpha}} \vec{r}_i. \quad (11)$$

Les équations (8) ou (9) sont les **équations de Lagrange** (Joseph-Louis Lagrange, mathématicien et astronome italien, 1736-1813). Comme les configurations  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q)$ , l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i(t, q, \dot{q}))^2$  et les forces appliquées  $\vec{F}_i^a = \vec{F}_i^a(t, \vec{r}(t, q), \vec{v}(t, q, \dot{q}))$  sont connues en fonction de  $(t, q, \dot{q})$ , les **équations de Lagrange forment un système de  $n$  équations différentielles du second ordre  $\mathcal{R}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0$  en les  $n$  coordonnées généralisées  $q$ . Ce**

système permet en principe de déterminer les  $n$  fonctions  $q = q(t)$ , i.e. les mouvements du système dynamique. On notera qu'il ne renferme que les paramètres indépendants  $q$  et ne contient aucune force de liaison.

Si les forces appliquées dérivent toutes d'un même potentiel, les forces généralisées et les équations de Lagrange se simplifient. De fait, s'il existe un potentiel  $V = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ , dépendant comme d'habitude des positions des particules, tel que  $\vec{F}_i^a = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V, i \in \{1, \dots, N\}$ , où  $\vec{\nabla}_{\vec{r}_i}$  désigne l'opérateur nabla par rapport aux coordonnées de  $\vec{r}_i$ , les forces généralisées s'écrivent

$$Q_\alpha = -\sum_i \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V \cdot \partial_{q_\alpha} \vec{r}_i = -\partial_{q_\alpha} V. \quad (12)$$

Il s'ensuit que les équations de Lagrange prennent la forme

$$d_t \partial_{\dot{q}_\alpha} E_c - \partial_{q_\alpha} (E_c - V) = 0$$

ou encore, si nous introduisons le **Lagrangien**

$$L = E_c - V, \quad (13)$$

différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$d_t \partial_{\dot{q}_\alpha} L - \partial_{q_\alpha} L = 0, \quad \alpha \in \{1, \dots, n\}, \quad (14)$$

car  $V = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = V(t, q)$  ne dépend pas de  $\dot{q}$ .

Les développements précédents montrent que les équations de Lagrange peuvent encore être écrites sous la forme (14), s'il existe une fonction **potentiel généralisé**  $U(t, q, \dot{q})$  vérifiant les conditions

$$Q_\alpha = d_t \partial_{\dot{q}_\alpha} U - \partial_{q_\alpha} U, \quad (15)$$

qui généralisent (12). D'où le

**Théorème 1.** *Considérons un système dynamique  $P_1, \dots, P_N$  soumis à des liaisons holonomes et telles que le travail virtuel total des forces de liaisons  $\vec{F}_1^\ell, \dots, \vec{F}_N^\ell$  soit nul. Désignons par  $q$  des coordonnées généralisées de ce système. Si les forces appliquées  $\vec{F}_1^a, \dots, \vec{F}_N^a$  dérivent d'un potentiel généralisé  $U = U(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) = U(t, q, \dot{q})$ , en ce sens que les forces généralisées sont données par  $Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot \partial_{q_\alpha} \vec{r}_i = d_t \partial_{\dot{q}_\alpha} U - \partial_{q_\alpha} U$ , les équations de Lagrange, qui gouvernent les mouvements du système étudié, s'écrivent sous la **forme canonique***

$$d_t \partial_{\dot{q}_\alpha} L - \partial_{q_\alpha} L = 0, \quad (16)$$

où

$$L = E_c - U$$

est le Lagrangien du système mécanique.

### 2.3 Électromagnétisme, extensions de la méthode de Lagrange

Voici un exemple d'une force dérivant d'un potentiel généralisé.

Soit une particule  $P$  de masse  $m$  et de charge  $q$ , se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . On sait que  $P$  est soumis à la **force de Lorentz**

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

et que le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B}) = (\vec{E}(t, P), \vec{B}(t, P))$  obéit aux **équations de Maxwell**, système de quatre EDP, qui, dans le vide, en l'absence de charges et de courant, s'écrivent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}, \quad (17)$$

où  $c$  désigne la célérité de la lumière dans le vide. Rappelons aussi que, sous certaines conditions topologiques sur lesquelles nous n'insisterons pas ici, **un champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire (resp. vectoriel) si et seulement si il est irrotationnel (resp. indivergentiel)**. Il découle alors de la deuxième et de la troisième équations de Maxwell que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A}, \quad (18)$$

i.e. que le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  dérive d'un potentiel scalaire  $\Phi = \Phi(t, P) = \Phi(t, \vec{r})$  et d'un potentiel vectoriel  $\vec{A} = \vec{A}(t, P) = \vec{A}(t, \vec{r})$ . Le potentiel électromagnétique  $(\Phi, \vec{A})$  n'est évidemment pas univoquement défini. On vérifie facilement que deux potentiels  $(\Phi, \vec{A})$  et  $(\Phi', \vec{A}')$  sont liés par des relations du type

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \quad \text{et} \quad \Phi' = \Phi - \partial_t \psi, \quad (19)$$

où  $\psi = \psi(t, \vec{r})$  est une fonction du temps et de la position. La transformation  $(\Phi, \vec{A}) \rightarrow (\Phi', \vec{A}')$  est un exemple d'une **transformation de jauge**.

## Travaux dirigés

1. Montrer que si l'on choisit les trois coordonnées cartésiennes  $x_i$  d'une particule  $P$ , qui n'est soumise à aucune liaison, comme coordonnées généralisées  $q_i$ , les forces généralisées  $Q_i$  coïncident avec les composantes  $F_i$  de la résultante  $\vec{F}$  des forces agissant sur  $P$ .
2. Considérer la particule chargée  $P$  de charge  $q$  et de masse  $m$  décrite ci-dessus, choisir les coordonnées cartésiennes  $x$  comme coordonnées généralisées et prouver que la force de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  dérive du potentiel généralisé

$$U = q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) = U(t, x, \dot{x}),$$

i.e. que

$$F_i = d_t \partial_{\dot{x}_i} U - \partial_{x_i} U.$$

Finalement, le Lagrangien s'écrit dans ce cas

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}).$$

## Travaux à domicile

1. Etablir l'équation  $R\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$  du pendule simple - notations évidentes - en utilisant

- l'équation de Newton,
- le théorème du moment cinétique,
- l'intégrale première de l'énergie,
- l'équation de Lagrange.

2. On considère la machine d'Atwood (poulie idéale [masse et frottements de rotation négligeables] avec fil idéal [parfaitement souple, inextensible et de masse négligeable] portant à chacune de ses extrémités une masse  $m_1$  et  $m_2$  respectivement). Rappelons que les hypothèses sur la poulie et le fil impliquent que la tension dans le fil est la même en chaque point. On demande d'écrire et de résoudre l'équation de Lagrange.

*Réponses* : Si  $\ell$  est la longueur du fil et  $R$  le rayon de la poulie, la liaison s'écrit  $x_{m_1} + x_{m_2} = \ell - \pi R$ , où les coordonnées de  $m_1$  et  $m_2$  sont lues sur un axe vertical dont l'origine est située au niveau du centre de la poulie et qui est dirigé vers le bas; la liaison est holonome; le travail virtuel est nul; si l'on écrit  $x$  au lieu de  $x_{m_1}$ , le Lagrangien est donné par

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + g(m_1 x + m_2(\ell - \pi R - x));$$

la résolution de l'équation de Lagrange fournit

$$x = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{g}{2} t^2 + C_1 t + C_2.$$

3. Une particule chargée de charge  $q$  et de masse  $m$  se déplace dans un champ purement magnétique  $\vec{B}$ , uniforme et stationnaire. Vérifier que dans ce cas on peut prendre  $\Phi = 0$  et  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$ . Choisir les coordonnées cylindriques comme coordonnées généralisées, prendre  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  et écrire les équations de Lagrange.

*Réponses* : Le Lagrangien est donné par

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - q\Phi + q(\dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + \dot{z}A_z);$$

la vérification des conditions (18) se fait moyennant la formule

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

donnant le rotationnel d'un produit vectoriel; le dernier terme du Lagrangien devient  $\frac{1}{2}qBr^2\dot{\theta}$ ; les équations de Lagrange s'obtiennent sans problème.

4.
  - Montrer que deux Lagrangiens ne différant que par la dérivée temporelle totale d'une fonction du temps et des coordonnées généralisées, conduisent aux mêmes équations de Lagrange.
  - Une particule chargée se déplace dans un champ électromagnétique. On effectue un changement de jauge

$$\Phi' = \Phi - \partial_t \psi, \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi, \psi = \psi(t, \vec{r}).$$

Quel est l'effet de cette transformation sur le Lagrangien et le mouvement de la particule?

**Remarque 2.** Dans les cours avancés, on explique que bon nombre de théories physiques récentes peuvent être décrites à partir de Lagrangiens qui sont invariants par transformation de jauge. Par exemple, les équations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

peuvent être obtenues comme équations de Lagrange associées à un Lagrangien invariant sous l'action de la transformation de jauge

$$(\Phi, \vec{A}) \rightarrow (\Phi - \partial_t \psi, \vec{A} + \vec{\nabla} \psi).$$

*Le fait que la méthode de Lagrange est à la base de différents domaines de la physique indique qu'elle correspond à une compréhension profonde de la structure de la physique. L'importance des symétries de jauge apparaît notamment en Mécanique quantique relativiste. Les Théories de jauge, qui exploitent les symétries d'un système pour déduire la forme des équations qui le décrivent, sont utilisées aujourd'hui par exemple en Physique nucléaire et de hautes énergies.*

### 3 Problème de Lagrange-Poisson

Le problème de Lagrange-Poisson a été étudié dans le cadre de la Mécanique newtonienne au cours de mathématique physique 2. Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons ici le texte y relatif.

\*\*\*

Ci-dessous nous étudions le problème de *Lagrange-Poisson*, i.e. les mouvements par rapport au laboratoire  $\mathcal{R}_0$ , considéré comme inertial, d'une toupie  $\mathcal{R}_1$  de masse  $m$  et de centre de masse  $G$ , possédant un axe de symétrie géométrique et matérielle et reposant sur sa pointe  $O$  supposée fixe par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . Ce problème classique est étroitement lié aux mouvements de la Terre dans l'espace, fournit un exemple de *système intégrable* – un thème de recherche actuel en Géométrie symplectique –, ...

La toupie considérée est donc animée d'un mouvement à point fixe et possède trois degrés de liberté. Les paramètres appropriés à la description univoque de ses positions sont les trois angles d'Euler que l'on définit comme suit.

Considérons un ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  attaché à  $\mathcal{R}_0$  et dont le vecteur  $\vec{e}_3$  est vertical ascendant, et un ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  lié à  $\mathcal{R}_1$  et dont le vecteur  $\vec{e}_3$  est directement colinéaire au vecteur  $\vec{OG}$ , si bien que  $\vec{OG} = d\vec{e}_3$ ,  $d = OG$ . Nous supposons que  $\mathcal{R}_1$  se meut par rapport à  $\mathcal{R}_0$  de manière que les vecteurs  $\vec{e}_3$  et  $\vec{e}_3$  sont en permanence non-colinéaires, de sorte que les plans  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  se coupent constamment suivant une droite dite *ligne des noeuds*. Notons  $\vec{u}$  le vecteur unitaire de la ligne des noeuds pour lequel  $(\vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{u})$  est direct. Cela étant, désignons par  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  les trois *angles d'Euler*

$$\phi := \angle(\vec{e}_1, \vec{u}), \quad \text{compté algébriquement autour de } (O, \vec{e}_3),$$

$$\theta := \angle(\vec{e}_3, \vec{e}_3), \quad \text{compté algébriquement autour de } (O, \vec{u}),$$

$$\psi := \angle(\vec{u}, \vec{e}_1), \quad \text{compté algébriquement autour de } (O, \vec{e}_3),$$

appelés logiquement *angle de précession*, *angle de nutation* et *angle de rotation propre ou de spin*.

Nous savons que dans le cas étudié les mouvements sont encodés dans le TMC en  $O$  et plus particulièrement dans les équations d'Euler.

Il s'agit donc de décomposer le moment en  $O$  des forces externes  $m\vec{g} + \vec{R}$  sollicitant la toupie,  $\vec{R}$  désigne la réaction au pivot  $O$ , et le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de la toupie  $\mathcal{R}_1$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$ , dans des axes orthogonaux principaux en  $O$ . Vu la symétrie de la toupie, il est clair que les axes  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont principaux en  $O$ . Comme

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = mgd \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3,$$

nous exprimons d'abord  $\vec{e}_3$  dans la base des  $\vec{e}_i$ . Vu que  $\vec{e}_3 = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$  et que

$$\vec{u} = \cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2, \quad (20)$$

il vient

$$\vec{e}_3 = \sin \theta (\sin \psi \vec{e}_1 + \cos \psi \vec{e}_2) + \cos \theta \vec{e}_3 \quad (21)$$

et

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) = mgd \sin \theta (\cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2). \quad (22)$$

Quant au vecteur rotation, celui  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{01}$  de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , se décompose, vu les paramètres utilisés, naturellement en la somme des vecteurs rotation  $\vec{\omega}_{02} = \dot{\phi} \vec{e}_3$  du référentiel  $\mathcal{R}_2$  défini par  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3)$ ,  $\vec{v} := \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$ , par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ,  $\vec{\omega}_{23} = \dot{\theta} \vec{u}$  du référentiel  $\mathcal{R}_3$  donné par  $(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_3)$ ,  $\vec{w} := \vec{e}_3 \wedge \vec{u}$ , par rapport à  $\mathcal{R}_2$ , et  $\vec{\omega}_{31} = \dot{\psi} \vec{e}_3$  de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_3$ :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{01} = \vec{\omega}_{02} + \vec{\omega}_{23} + \vec{\omega}_{31} = \dot{\phi} \vec{e}_3 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \vec{e}_3. \quad (23)$$

Compte tenu des équations (20) et (21), on obtient finalement la décomposition

$$\vec{\omega} = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \vec{e}_1 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \vec{e}_2 + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \vec{e}_3 \quad (24)$$

du vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de la toupie  $\mathcal{R}_1$  par rapport au laboratoire  $\mathcal{R}_0$ , dans la base des vecteurs principaux  $\vec{e}_i$ .

Finalement, les équations d'Euler s'écrivent

$$J_{11} \dot{\omega}_1 - (J_{11} - J_{33}) \omega_2 \omega_3 = mgd \sin \theta \cos \psi, \quad (25)$$

$$J_{11} \dot{\omega}_2 - (J_{33} - J_{11}) \omega_3 \omega_1 = -mgd \sin \theta \sin \psi, \quad (26)$$

$$J_{33} \dot{\omega}_3 = 0, \quad (27)$$

où  $J_{22} = J_{11}$ , vu la symétrie de la toupie, et où les  $\omega_i$  sont les composantes de  $\vec{\omega}$  dans la base principale des  $\vec{e}_i$ , voir Équation (24). Les équations d'Euler (25)-(27) forment un système de 3 équations différentielles du deuxième ordre en  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ . Elles permettent en principe de déterminer  $\phi = \phi(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  et  $\psi = \psi(t)$ , i.e. de trouver les mouvements de la toupie.

L'Équation (27) est particulièrement simple et signifie que la composante  $\omega_3$  du vecteur rotation est conservée au cours du mouvement :

$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = a, \quad a \text{ constant.} \quad (28)$$

Cette IP est due, voir Équation (27), à la symétrie de la toupie et à l'orthogonalité à  $\vec{e}_3$  du moment  $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) = mgd \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3$ . Or, le moment  $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O)$  est également perpendiculaire au vecteur fixe  $\vec{e}_3$ , si bien que

$$0 = \vec{e}_3 \cdot \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) = \vec{e}_3 \cdot d_t \vec{\sigma}_O = d_t (\vec{e}_3 \cdot \vec{\sigma}_O), \quad (29)$$

de sorte que la composante

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{\sigma}_O = \vec{e}_3 \cdot \sum_i J_{ii} \omega_i \vec{e}_i$$

de  $\vec{\sigma}_O$  suivant  $\vec{e}_3$  est aussi une IP. En utilisant les équations (21) et (24), on trouve l'expression de cette IP en fonction des paramètres :

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{\sigma}_O = J_{11} \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_{33} a \cos \theta = b, \quad b \text{ constant.} \quad (30)$$

Un système de trois IP indépendantes (pour l'instant on en a deux), donc un système de 3 équations différentielles du premier ordre en les paramètres  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ , serait évidemment plus simple à étudier que les trois équations d'Euler (25), (26) et (27), qui sont d'ordre 2. En gros, un système dynamique qui admet un nombre d'intégrales premières indépendantes égal à son nombre de degrés de liberté, y compris l'IPE, est appelé un *système intégrable*. Les systèmes intégrables seront discutés plus en détail dans les cours avancés. Dans le cas de la toupie, l'IPE  $E_c + V = c$ ,  $c$  constant, est évidemment valable, la résultante des forces externes étant composée d'une force  $m\vec{g}$  qui dérive d'un potentiel  $V = mgd \cos \theta$  et d'une force  $\vec{R}$  dont la puissance  $\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}(O)$  est nulle (ce qui fournit la troisième IP). Si l'on exprime l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2} \sum_i J_{ii} \omega_i^2$  en fonction de  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  moyennant l'Équation (24), l'IPE devient

$$\frac{1}{2} J_{11} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J_{33} a^2 + mgd \cos \theta = c. \quad (31)$$

Le deuxième terme du premier membre étant lui aussi constant, l'IPE s'écrit encore

$$\frac{1}{2} J_{11} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + mgd \cos \theta = E, \quad E \text{ constant.} \quad (32)$$

Le déchiffrement de l'information encrytée dans le système d'IP (28), (30) et (32) fournira les différents types de mouvements possibles de la toupie selon les conditions initiales considérées. Notons d'abord que l'angle  $\theta$ , non dérivé par rapport au temps, intervient dans ces IP uniquement sous la forme  $\cos \theta$  ou  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  : posons  $\mu := \cos \theta$ . L'équation (30) devient alors

$$\dot{\phi} = \frac{b - J_{33} a \mu}{J_{11} (1 - \mu^2)}. \quad (33)$$

Cela étant, les IP (32) et (28) prennent la forme

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{J_{11}} (E - V_{\text{eff}}), \quad \text{où } V_{\text{eff}} = mgd\mu + \frac{1}{2} \frac{(b - J_{33} a \mu)^2}{J_{11} (1 - \mu^2)}, \quad (34)$$

et

$$\dot{\psi} = a - \frac{b - J_{33} a \mu}{J_{11} (1 - \mu^2)} \mu \quad (35)$$

respectivement. Dans (34), nous avons introduit le potentiel efficace  $V_{\text{eff}}$ , afin d'écrire l'IPE sous la forme nécessaire à l'étude des mouvements via le diagramme du potentiel. Pour  $b \neq \pm J_{33} a$ , nous supposons dans la suite que cette condition est satisfaite, la courbe représentative du potentiel efficace  $V_{\text{eff}}$  est entre ses deux asymptotes verticales d'équations  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , d'abord décroissante, puis croissante.

- (i) Si  $E = V_{\text{eff}, \text{min}}$ , où  $V_{\text{eff}, \text{min}}$  désigne la valeur minimale du potentiel,  $\theta$  ne peut prendre qu'une seule valeur et est donc constant au cours du mouvement. Il résulte alors de (35) et (33) que  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$  sont également constants : *le mouvement est sans nutation et la précession et le spin sont uniformes.*

- (ii) Supposons maintenant que  $E \geq V_{\text{eff},\min}$  et notons  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les abscisses des deux points de réflexion. Le mouvement de nutation est alors une oscillation entre les valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Quant au mouvement complet, il s'avèrera qu'il dépend de la position de  $b/(J_{33}a)$  – nous supposons  $a \neq 0$  – par rapport à l'intervalle  $[\cos \theta_2, \cos \theta_1]$ .

Avant de passer à l'explication de cette affirmation, deux observations sont nécessaires :

- L'égalité  $b/(J_{33}a) = \cos \theta_2$  est impossible. En effet, on vérifie facilement que dans ce cas on aurait  $V'_{\text{eff}}(\theta_2) = -mgd \sin \theta_2 < 0$ , ce qui est absurde vu l'allure de la courbe du potentiel.
- La fonction  $b - J_{33}a\mu = b - J_{33}a \cos \theta$  est strictement croissante ou strictement décroissante dans  $]0, \pi[$ , selon que  $a > 0$  ou  $a < 0$ .

Passons à l'étude du mouvement complet, voir ci-dessus.

(1)  $b/(J_{33}a) \notin [\cos \theta_2, \cos \theta_1]$

Si  $b/(J_{33}a) < \cos \theta_2$  et  $a > 0$  par exemple, on a  $b - J_{33}a \cos \theta_2 < 0$ . Donc, vu son sens de variation, la fonction  $b - J_{33}a\mu = b - J_{33}a \cos \theta$  est  $< 0$  pour tout  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , i.e.  $\dot{\phi} < 0$ , en vertu de l'Équation (33). Dans les autres cas, on trouve de la même façon, soit  $\dot{\phi} < 0$ , soit  $\dot{\phi} > 0$ . Ainsi, le sommet  $S$  de la toupie décrit, sur la sphère de centre  $O$  et de rayon  $OS$ , une trajectoire de type "sinusoïdal".

(2)  $b/(J_{33}a) \in ]\cos \theta_2, \cos \theta_1[$

Si  $a > 0$  par exemple, on trouve que  $b - J_{33}a \cos \theta_1 < 0 < b - J_{33}a \cos \theta_2$ , de sorte que la fonction strictement croissante  $b - J_{33}a \cos \theta$  s'annule et change de signe en un seul point  $\theta_0 \in ]\theta_1, \theta_2[$ . Vu (33), il en est de même de  $\dot{\phi}$ . Ainsi,  $\dot{\phi}$  décroît si  $\theta \in ]\theta_1, \theta_0[$  et croît si  $\theta \in ]\theta_0, \theta_2[$ . La trajectoire de  $S$  est donc du type "lll...".

(3)  $b/(J_{33}a) = \cos \theta_1$

Ici,  $\dot{\phi} > 0, \forall \theta \neq \theta_1$  ou  $\dot{\phi} < 0, \forall \theta \neq \theta_1$ . De plus,  $\dot{\phi} = 0$  en  $\theta = \theta_1$ . Il s'ensuit que  $\phi$  admet à l'instant  $\theta = \theta_1$  un point d'inflexion à tangente horizontale. Ainsi  $S$  a une trajectoire du type "uu...".

\*\*\*

## Travail dirigé

Prendre le problème de Lagrange-Poisson dans le cadre de la **Mécanique lagrangienne**. Expliquer pourquoi les conditions des liaisons holonomes et du travail virtuel sont satisfaites. Écrire le Lagrangien et les équations de Lagrange. Retrouver les intégrales premières (28),

(30) et (32). En vue de déduire l'intégrale première de l'énergie des équations de Lagrange, on multipliera l'équation de Lagrange relative à l'angle de précession  $\varphi$  par  $\dot{\varphi}$ , l'équation relative à l'angle de spin  $\psi$  par  $\dot{\psi}$ , puis on ajoutera les résultats ainsi obtenus et on intégrera par rapport au temps. Le formalisme Hamiltonien permettra de trouver simplement cette intégrale première.

## 4 Formalisme de Hamilton

### 4.1 Quantités de mouvement généralisées, Hamiltonien

En vue de généraliser la notion de quantité de mouvement, considérons une particule unique de masse  $m$ , qui n'est soumise à aucune liaison et subit l'action d'une résultante de forces  $\vec{F}$ , dérivant d'un potentiel  $V = V(\vec{r})$  ne dépendant que de la position de la particule. Choisissons les coordonnées cartésiennes  $x$  comme coordonnées généralisées  $q$ . Alors

$$L = \frac{1}{2}m \sum_i \dot{x}_i^2 - V(x)$$

et

$$\partial_{\dot{q}_\alpha} L = \partial_{\dot{x}_\alpha} L = m\dot{x}_\alpha = p_\alpha,$$

où  $p_\alpha$  est la composante  $\alpha$  de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  de la particule. D'où la

**Définition 1.** *Étant donné un  **système dynamique lagrangien** , i.e. un système de particules admettant un Lagrangien  $L = L(t, q, \dot{q})$  (et plus précisément un système obéissant aux équations de Lagrange sous leur forme canonique (16)), on appelle  **quantité de mouvement généralisée**  associée à la coordonnée généralisée  $q_\alpha$ , la grandeur*

$$p_\alpha := \partial_{\dot{q}_\alpha} L. \quad (36)$$

Il importe de noter que, si dans le précédent exemple le potentiel dépendait de la vitesse, i.e. de  $\dot{x}$ , la quantité de mouvement généralisée  $p_\alpha := \partial_{\dot{q}_\alpha} L$  associée à  $q_\alpha = x_\alpha$  ne coïnciderait pas avec la composante correspondante de la quantité de mouvement ordinaire  $\vec{p}$ . De plus, les impulsions généralisées  $p_\alpha$  n'ont même pas nécessairement la dimension d'une quantité de mouvement. En effet,  $L = E_c - U$  ayant la dimension  $L^2MT^{-2}$  d'une énergie,  $p_\alpha$  a la dimension  $LMT^{-1}$  d'une impulsion, si  $q_\alpha$  est une longueur, mais possède la dimension  $L^2MT^{-1}$  d'un moment cinétique, si  $q_\alpha$  est un angle. **On fera donc une distinction nette entre les quantités de mouvement généralisées et les composantes de la quantité de mouvement classique  $\vec{p} = m\vec{v}$ .**

Nous utiliserons dans la suite la convention de sommation d'Einstein, qui consiste - nous le savons - à supprimer les symboles de sommation portant sur des indices répétés. De plus,

au lieu d'écrire  $\sum_{\alpha} u_{\alpha} v_{\alpha} = u_{\alpha} v_{\alpha}$ , il est dans le contexte de la Dynamique lagrangienne et hamiltonienne souvent plus commode de supprimer également les indices et d'écrire par exemple simplement  $\sum_{\alpha} u_{\alpha} v_{\alpha} = uv$ , lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. Il découle des équations de Lagrange  $d_t \partial_{\dot{q}} L = \partial_{\dot{q}} L$  et de la définition  $p = \partial_{\dot{q}} L$  des quantités de mouvement généralisées que la dérivée temporelle totale du Lagrangien  $L = L(t, q, \dot{q})$  est donnée par

$$\begin{aligned} d_t L &= \partial_t L + \partial_q L \dot{q} + \partial_{\dot{q}} L \ddot{q} \\ &= \partial_t L + \dot{p} \dot{q} + p \ddot{q} \\ &= \partial_t L + d_t(p \dot{q}). \end{aligned} \quad (37)$$

Si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, ce qui est généralement le cas, il s'ensuit que la fonction  $H := p \dot{q} - L$  est conservée au cours des mouvements.

**Définition 2.** Le *Hamiltonien* d'un système dynamique lagrangien est la fonction

$$H = p \dot{q} - L, \quad (38)$$

où  $L = L(t, q, \dot{q})$  est le Lagrangien du système.

Afin de trouver une interprétation du Hamiltonien (William Rowan Hamilton, mathématicien et physicien irlandais, 1805-1865), considérons un système soumis à des liaisons holonomes ne variant pas au cours du temps,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$ , et dont le potentiel  $V = V(q)$  ne dépend que des positions.

Observons d'abord que l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \sum_i m_i d_t \vec{r}_i \cdot d_t \vec{r}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left( \sum_i m_i \partial_{q_{\alpha}} \vec{r}_i \cdot \partial_{q_{\beta}} \vec{r}_i \right) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} \\ &=: \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} \end{aligned}$$

est alors un polynôme homogène de degré 2 en les  $\dot{q}$ .

Lorsqu'on multiplie la variable  $x = (x_1, x_2)$  d'un polynôme homogène de degré 2,  $p(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ , par une constante quelconque  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on trouve  $p(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 p(x_1, x_2)$ . De manière plus générale, une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une **fonction homogène** d'ordre  $p \in \mathbb{N}$ , si  $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ , quels que soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . La dérivation de cette condition et l'écriture du résultat pour  $\lambda = 1$  fournissent le **Théorème des fonctions homogènes d'Euler** (Leonhard Euler, mathématicien suisse, 1707-1783) :

**Théorème 2.** L'action du *champ d'Euler*  $\sum_i x_i \partial_{x_i}$  sur une fonction homogène d'ordre  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , est donnée par

$$\sum_i x_i \partial_{x_i} f = p f(x). \quad (39)$$

Ceci étant, revenons au Hamiltonien du système considéré. Il résulte du Théorème d'Euler que

$$H = \dot{q}p - L = \dot{q} \partial_{\dot{q}} L - L = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \partial_{\dot{q}_{\alpha}} (E_c - V) - L = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \partial_{\dot{q}_{\alpha}} E_c - L = 2E_c - L = E_c + V.$$

Les précédentes réflexions conduisent à la

**Proposition 1.** *L'équation d'évolution (37) du Hamiltonien s'écrit*

$$d_t H = -\partial_t L \quad (40)$$

et stipule que la dérivée temporelle totale du Hamiltonien et la dérivée temporelle partielle du Lagrangien sont opposées. Dans le cas de liaisons et d'un potentiel indépendants du temps, le Lagrangien est à son tour indépendant du temps et le Hamiltonien est une intégrale première - l'*intégrale première de Jacobi*. Si de plus le potentiel ne dépend que des positions, le Hamiltonien coïncide avec l'énergie totale du système dynamique et l'intégrale première de Jacobi se réduit à l'intégrale première de l'énergie.

## 4.2 Equations de Hamilton, transformation de Legendre

Soit un système mécanique de Lagrangien  $L = E_c - U = L(t, q, \dot{q})$ . Son Hamiltonien étant donné par  $H = \dot{q}p - L = H(t, q, \dot{q})$ , où  $p = \partial_{\dot{q}} L$ , on a

$$dH = p d\dot{q} + \dot{q} dp - \partial_t L dt - \partial_q L dq - \partial_{\dot{q}} L d\dot{q} = -\partial_t L dt - \partial_q L dq + \dot{q} dp. \quad (41)$$

La différentielle de  $H$  s'exprimant ainsi au moyen des différentielles de  $t$ , des  $q$  et des  $p$ , ces variables doivent être considérées comme les variables indépendantes naturelles de  $H$ . D'où l'idée d'exprimer les  $\dot{q}$  en fonction des  $p$  et de remplacer dans  $H(t, q, \dot{q})$ . Partons de la définition  $p = \partial_{\dot{q}} L$ , où le second membre est une fonction connue  $F(t, q, \dot{q})$ . Le **Théorème des fonctions implicites** stipule que le système à  $n$  équations

$$p = F(t, q, \dot{q}) \quad (42)$$

peut être résolu par rapport aux  $n$  variables  $\dot{q}$ , si

$$\det \left( \partial_{\dot{q}_{\beta}} F_{\alpha} \right) = \det \left( \partial_{\dot{q}_{\alpha}} \partial_{\dot{q}_{\beta}} L \right) \neq 0,$$

i.e. dans le cas d'un **Lagrangien non singulier**. La résolution de l'équation (42), qui définit les impulsions généralisées, fournit alors

$$\dot{q} = G(t, q, p) \quad (43)$$

et la substitution dans le Hamiltonien donne  $H = H(t, q, G(t, q, p)) = H(t, q, p)$ . Sauf mention explicite du contraire, nous considérerons ci-dessous  $H$  systématiquement comme fonction de ses variables naturelles “temps, positions et impulsions généralisées”. En fonction de ces nouvelles variables, la différentielle de  $H$  s’écrit

$$dH = \partial_t H dt + \partial_q H dq + \partial_p H dp. \quad (44)$$

Rappelons que les différentielles de  $H = H(t, q, \dot{q})$  et de  $H = H(t, q, p)$  coïncident. En effet, si on prend pour simplifier une fonction  $g = g(y)$  avec  $y = y(x)$  de sorte que  $g = g(x)$ , on vérifie de suite que les différentielles de  $g$  considéré comme fonction de  $y$  et de  $g$  vu comme fonction de  $x$  sont égales. Cette propriété est connue sous le nom de invariance de la différentielle. Par conséquent, compte tenu des équations de Lagrange  $\dot{p} = \partial_q L$  et de l’équation d’évolution du Hamiltonien  $d_t H = -\partial_t L$ , on déduit de (41) et (44) l’équation d’évolution complétée

$$d_t H = -\partial_t L = \partial_t H \quad (45)$$

et les **équations de Hamilton**

$$\dot{q} = \partial_p H \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\partial_q H.$$

Les équations de Hamilton forment un système  $\mathcal{R}(t, q, p, \dot{q}, \dot{p}) = 0$  de  $2n$  équations différentielles du premier ordre en les  $2n$  fonctions inconnues  $(q, p)$ . Leur résolution, dont le degré de difficulté est généralement du même ordre que celui de l’intégration des équations de Lagrange, fournit non seulement les positions  $q = q(t)$ , i.e. les mouvements du système dynamique, mais aussi les quantités de mouvement généralisées  $p = p(t)$ . Le lecteur comprendra plus tard que la méthode de Hamilton a l’avantage de mettre en lumière le lien de la Mécanique classique avec la Mécanique quantique, ainsi qu’avec d’autres domaines des sciences.

**Théorème 3.** Les coordonnées (positions) généralisées  $q$  et les quantités de mouvement (impulsions) généralisées  $p$  d’un système dynamique peuvent être trouvées comme fonctions du temps  $q = q(t)$  (mouvements) et  $p = p(t)$  à partir des équations de Hamilton

$$\dot{q} = \partial_p H \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\partial_q H, \quad (46)$$

où le Hamiltonien  $H = H(t, q, p)$  du système est obtenu par calcul des  $p = F(t, q, \dot{q})$  à partir de leur définition, par résolution de ces dernières égalités par rapport aux  $\dot{q}$  et substitution de la solution  $\dot{q} = G(t, q, p)$  dans  $H = p\dot{q} - L = H(t, q, \dot{q})$ .

Du point de vue mathématique, le passage du langage lagrangien au langage hamiltonien correspond au changement de variables  $(t, q, \dot{q}) \leftrightarrow (t, q, p)$ , qui est un exemple d’une transformation de Legendre. Une **transformation de Legendre** (Adrien-Marie Legendre, mathématicien français, 1752-1833) transforme une fonction  $L = L(t, q, \dot{q})$  (resp.  $E = E(w, \dots, x, y)$ )

décrivant l'état d'un système en une fonction d'état  $H = H(t, q, p)$  (resp.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(w, \dots, x, z)$ ) dont les variables indépendantes sont mieux adaptées au problème étudié. Le cas général est entièrement analogue au cas particulier venant d'être traité : on a

$$dE = \partial_w E dw + \dots + \partial_x E dx + \partial_y E dy$$

et on pose

$$z := \partial_y E \quad \text{et} \quad \mathcal{E} := yz - E,$$

si bien que

$$d\mathcal{E} = -\partial_w E dw - \dots - \partial_x E dx + ydz,$$

i.e. si bien que la nouvelle fonction d'état  $\mathcal{E} = yz - E$  est en fait une fonction  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(w, \dots, x, z)$ . En vue d'exprimer  $y$  en fonction de  $(w, \dots, x, z)$  on résoud le système  $z = F(w, \dots, x, y)$ , qui définit  $z$ , par rapport à  $y$  et on place la solution  $y = G(w, \dots, x, z)$ , si elle existe, dans  $\mathcal{E} = yz - E(w, \dots, x, y)$ . On voit immédiatement que si l'on calcule la transformée de Legendre de la transformée de Legendre  $\mathcal{E}$  de  $E$ , on retrouve  $E$ . Ainsi, [le Hamiltonien est la transformée de Legendre du Lagrangien et vice versa](#).

### 4.3 Théorème de Noether, réduction

Rappelons que

$$\partial_t H = d_t H = -\partial_t L \quad (\text{resp.} \quad \partial_{q_\alpha} H = -\dot{p}_\alpha = -\partial_{q_\alpha} L). \quad (47)$$

Il découle de l'égalité des membres extrêmes de cette équation que le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps (resp. est indépendant d'une coordonnée généralisée  $q_\alpha$ ) si et seulement si il en est ainsi du Lagrangien. On dit alors que le système dynamique considéré est **autonome** (resp. que la coordonnée  $q_\alpha$  est **ignorable**). Le membre central de (47) montre que dans ce cas le Hamiltonien (resp. l'impulsion généralisée  $p_\alpha$  associée à la coordonnée ignorable  $q_\alpha$ ) est constant (resp. constante) sur les mouvements.

**Théorème 4.** *Le Hamiltonien d'un système dynamique autonome et l'impulsion généralisée conjuguée à une coordonnée généralisée ignorable sont des intégrales premières du système.*

Il importe de signaler que [l'existence d'intégrales premières est intimement liée aux symétries du système](#). Si une particule se déplace par exemple dans un plan sous l'action d'une force centrale à symétrie circulaire, un angle polaire, défini en prenant le centre de forces comme pôle, correspondant à une rotation de la particule, qui ne modifie nullement le problème mécanique considéré. En parlant quelque peu vaguement, on peut dire que si une coordonnée généralisée correspond à une rotation autour d'un axe (resp. une translation le long d'un axe) et si une telle rotation (resp. translation) du système de particules, considéré

comme rigide, ne modifie pas le problème étudié, le comportement de ce système est indépendant de la coordonnée  $q_\alpha$  en question et il en est alors (généralement) de même de son Lagrangien et de son Hamiltonien. Il s'ensuit que l'impulsion généralisée correspondante  $p_\alpha$  est constante sur les mouvements. Les remarques relatives à la dimension des quantités de mouvement généralisées  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , voir sous-section 4.1, permettent d'entrevoir que cette conclusion peut dans certains cas signifier que la composante selon l'axe de rotation (resp. de translation) du moment cinétique (resp. de l'impulsion classique) est une intégrale première. Considérons par exemple un système de points matériels placé dans le champ engendré par des masses fixes distribuées uniformément dans le plan  $z = 0$ . Ici la symétrie du problème est telle que le comportement du système est invariant par translation (du système de particules considéré comme rigide) le long de l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  (mais pas le long de l'axe des  $z$ ) et par rotation autour de l'axe des  $z$  (mais non autour des axes des  $x$  ou des  $y$ ), de sorte que les composantes  $x$  et  $y$  de l'impulsion classique et la composante  $z$  du moment cinétique du système sont conservées au cours des mouvements.

**Remarque 3.** *Le **Théorème de Noether** (Emmy Noether, mathématicienne allemande, 1882 - 1935) précise l'étroite relation entre les intégrales premières d'un système et les symétries du système, les symétries de son Lagrangien ou Hamiltonien (ici on entend par symétrie l'indépendance du Lagrangien et du Hamiltonien du temps ou d'une coordonnée généralisée, son invariance par rapport à certaines transformations spatio-temporelles), ou encore celles de l'intégrale du Lagrangien - appelée l'**action**. Il stipule en gros qu'à toute symétrie de l'action correspond une grandeur conservée. Ce théorème, qualifié par Einstein de monument de la pensée mathématique, est un outil important en Physique théorique moderne.*

## Travail dirigé

Reprendre le problème de Lagrange-Poisson. L'énergie cinétique de la toupie, son énergie potentielle et ses impulsions généralisées  $p = \partial_{\dot{q}}L$  ont été déterminées en fonction des variables lagrangiennes  $(q, \dot{q})$  lors de l'étude de ce problème à la section 3. Les résultats relatifs aux énergies permettent de trouver le Hamiltonien  $H = H(q, \dot{q})$  en fonction des variables lagrangiennes. L'inversion du système  $p = F(q, \dot{q})$  fournit  $\dot{q} = G(q, p)$ , et la substitution dans  $H = H(q, \dot{q})$  conduit au Hamiltonien  $H = H(q, p)$  exprimé en fonction des variables hamiltoniennes. Faire les calculs venant d'être expliqués, puis :

- Écrire les équations de Hamilton.
- Étudier et interpréter les intégrales premières en relation avec les symétries du système et de son Hamiltonien (et vérifier qu'il s'agit des grandeurs conservées bien connues données par les équations (28), (30) et (32)).

- Expliquer comment on peut en principe résoudre les équations de Hamilton et montrer que le problème se réduit en fait à un problème à un degré de liberté.

## Travaux à domicile

1. Examiner sous quelles conditions la réciproque du Théorème d'Euler est valable, en posant  $g(\lambda) = f(\lambda x)$  et en prouvant que

$$\ln |g(\lambda)| = \ln |\lambda|^p + \ln C.$$

2. Un point matériel de masse  $m$  se déplace dans un plan (géométrique), sous l'action d'une force centrale à symétrie circulaire et de potentiel  $V$ . Les coordonnées généralisées appropriées sont évidemment des coordonnées polaires définies en prenant le centre de force, disons  $O$ , comme pôle.

- Écrire le Hamiltonien en fonction des coordonnées lagrangiennes  $(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ , calculer les impulsions généralisées  $p_r, p_\theta$ , puis donner le Hamiltonien en fonction des coordonnées hamiltoniennes  $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ .
- Répondre aux mêmes questions qu'au travail dirigé ci-dessus.

Réponses : Hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r).$$

Équations de Hamilton :

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - d_r V, \quad \dot{p}_\theta = 0.$$

La symétrie circulaire du système (resp. l'absence de liaisons dépendant du temps et le potentiel dépendant uniquement de la position et même seulement de  $r$ ) implique (resp. impliquent) que  $H$  est indépendant de  $\theta$  [symétrie de rotation] (resp. ne dépend pas explicitement du temps [symétrie temporelle]), si bien que  $p_\theta$  [la composante du moment cinétique par rapport à  $O$ , selon  $\vec{e}_z = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$ ] (resp.  $H$  [l'énergie totale]) est conservé au cours des mouvements.

Le dernier point est clair.

Les travaux ci-dessus ont permis d'observer que si une symétrie conduit à une coordonnée ignorable, disons  $q_n$ , et donc à une intégrale première  $p_n = C$ , le système des  $2n$  équations de Hamilton

$$\dot{q} = \partial_p H, \quad \dot{p} = -\partial_q H, \quad (48)$$

construites à partir d'un Hamiltonien

$$H = H(q, p),$$

se réduit. De fait, si nous posons  $q = (q', q_n)$  et  $p = (p', p_n)$ , le Hamiltonien s'écrit  $H = H(q', p', p_n)$  et le système (48) se décompose en

$$\dot{q}_n = \partial_{p_n} H, \quad \dot{p}_n = -\partial_{q_n} H = 0 \quad (49)$$

et

$$\dot{q}' = \partial_{p'} \mathcal{H}, \quad \dot{p}' = -\partial_{q'} \mathcal{H}. \quad (50)$$

La subtilité réside dans le fait que dans les équations  $\dot{q}' = \partial_{p'} H$  et  $\dot{p}' = -\partial_{q'} H$  on ne dérive pas par rapport à  $p_n$ , si bien qu'on peut remplacer  $p_n$  par  $C$  avant de dériver. Ceci conduit à  $H(q', p', C) =: \mathcal{H}(q', p')$  et aux équations (50). Afin de trouver les solutions du système (48) formulé dans un espace paramétré par les  $2n$  variables  $(q, p)$  moyennant un Hamiltonien  $H = H(q, p)$ , on résout donc le système réduit (50) posé dans un **espace réduit** paramétré par les  $2n - 2$  variables  $(q', p')$  et basé sur un **Hamiltonien réduit**  $\mathcal{H}(q', p')$ . On injecte ensuite les fonctions ainsi obtenues  $q' = q'(t)$  et  $p' = p'(t)$ , ainsi que la fonction constante  $p_n = C$ , déterminée grâce aux conditions initiales, dans le second membre de la première des équations (49), qui est connu comme fonction de  $(q', p', p_n)$ . L'inconnue restante  $q_n(t)$  s'obtient alors par simple primitivation.

**Remarque 4.** *La généralisation de la théorie de réduction élémentaire décrite ci-dessus, aux **variétés symplectiques**, genre de surfaces de dimension potentiellement élevée munies d'une sorte de "produit scalaire" antisymétrique, est à l'origine de recherches actuelles consacrées à la "réduction symplectique".*

## 5 Formalisme de Poisson

### 5.1 Crochet de Poisson, algèbres associatives, de Lie et de Poisson

Dans cette section, afin de simplifier, nous ne considérons que des fonctions de  $(q, p)$  au lieu de  $(t, q, p)$ . Plus précisément, nous nous intéressons à une valeur expérimentalement observable  $f = f(q, p)$  d'un système dynamique de Hamiltonien  $H = H(q, p)$  - l'observable peut par exemple être l'énergie cinétique  $E_c = E_c(q, p)$  du système exprimée en fonction des

variables hamiltoniennes, le Hamiltonien, une position généralisée, une impulsion généralisée, ... - et nous examinons la variation temporelle de cette observable  $f = f(q(t), p(t))$  au cours d'un mouvement  $q = q(t), p = p(t)$ . Vu les équations de Hamilton, on obtient

$$d_t f = \partial_q f \dot{q} + \partial_p f \dot{p} = \partial_q f \partial_p H - \partial_p f \partial_q H = \{f, H\}, \quad (51)$$

où nous avons utilisé la

**Définition 3.** On appelle *crochet de Poisson* (Siméon Denis Poisson, mathématicien et physicien français, 1781-1840) de deux fonctions  $f = f(q, p)$  et  $g = g(q, p)$ , la somme

$$\{f, g\} := \partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g. \quad (52)$$

Les propriétés du crochet de Poisson sont des conséquences immédiates de sa définition. Si  $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$  et si  $f_i, g_j, f, g, h$  sont des fonctions des variables  $(q, p)$ , disons des fonctions dans  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , on a

1.

$$\left\{ \sum_i \lambda_i f_i, \sum_j \mu_j g_j \right\} = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \{f_i, g_j\}, \quad (53)$$

i.e. le crochet de Poisson est **bilinéaire**,

2.

$$\{g, f\} = -\{f, g\}, \quad (54)$$

i.e. le crochet de Poisson est **antisymétrique**,

3.

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}, \quad (55)$$

i.e. le crochet de Poisson vérifie l'**identité de Jacobi** (Carl Gustav Jacobi, mathématicien prussien, 1804 -1851) et

4.

$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\}, \quad (56)$$

i.e. les opérateurs  $\{f, -\}$  "dérivent" le produit usuel  $g \cdot h$  selon la **règle de Leibniz** (Gottfried Wilhelm Leibniz, mathématicien allemand, 1646 - 1716).

On remarquera que la propriété d'antisymétrie est équivalente à la propriété  $\{f, f\} = 0$  de nullité des carrés ; l'implication directe de cette équivalence est évidente, l'implication réciproque découle de l'observation que  $0 = \{f + g, f + g\} = \{f, f\} + \{f, g\} + \{g, f\} + \{g, g\} = \{f, g\} + \{g, f\}$ .

L'identité de Jacobi signifie simplement que les opérateurs  $\{f, -\}$  vérifient la règle de Leibniz non seulement par rapport au produit ordinaire  $g \cdot h$ , mais aussi par rapport au produit  $\{g, h\}$ . Alors que le produit ordinaire munit l'espace vectoriel réel de dimension infinie  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  d'une structure d'**algèbre associative** commutative, les propriétés (53) - (55) montrent que le crochet de Poisson munit cet espace d'une structure d'algèbre non associative.

**Définition 4.** *Un espace vectoriel  $(V, +, \cdot)$  muni d'une opération interne  $[-, -]$ , qui est bilinéaire, antisymétrique et vérifie la règle de Jacobi, est une **algèbre de Lie** (Marius Sophus Lie, mathématicien norvégien, 1842 - 1899)*

**Définition 5.** *Un espace vectoriel  $(V, +, \cdot)$  muni d'une structure d'algèbre associative  $\cdot$  et d'une structure d'algèbre de Lie  $[-, -]$ , telles que, pour tout  $u \in V$ , l'opérateur  $[u, -]$  dérive le produit associatif  $\cdot$  selon la règle de Leibniz, i.e. telles que pour tous  $u, v, w \in V$ ,*

$$[u, v \cdot w] = [u, v] \cdot w + v \cdot [u, w],$$

*est une **algèbre de Poisson**.*

La proposition suivante est une conséquence directe de la propriété (56).

**Proposition 2.** *L'espace  $(C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), +, \cdot)$ , muni du produit usuel  $\cdot$  des fonctions et du crochet de Poisson  $\{-, -\}$ , est une algèbre de Poisson.*

## 5.2 Géométrie symplectique, Géométrie de Poisson

L'espace (localement) paramétré par  $q$  est, logiquement, l'**espace des configurations** du système dynamique considéré. L'espace paramétré par  $(q, p)$  est l'espace des états du système et est appelé **espace des phases**. Ces espaces ne coïncident pas nécessairement avec  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{2n}$  respectivement. En effet, imaginons par exemple un pendule double, i.e. un pendule portant à son extrémité inférieure un autre pendule. Les configurations de ce système à deux particules sont décrites par deux angles  $q = (q_1, q_2) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ , si bien que l'espace des configurations  $M$  est l'espace  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  modulo identification de 0 et  $2\pi$ , i.e.  $M$  est un tore. On comprend ainsi que **l'espace des configurations d'un système mécanique général est une variété ; il en est de même de l'espace des phases**.

Lorsque l'espace des fonctions  $C^\infty(N)$  d'une variété  $N$  est, comme dans le cas  $N = \mathbb{R}^{2n}$  ci-dessus, muni d'une structure d'**algèbre de Poisson**, on dit que  $N$  est une **variété de Poisson**. L'étude des variétés de Poisson et des problèmes connexes conduit à la **Géométrie de Poisson**.

Observons que dans le cas de la variété de Poisson  $\mathbb{R}^{2n}$ , le crochet de Poisson de deux fonctions  $f$  et  $g$  s'écrit sous la forme

$$\{f, g\} = \partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g = (\partial_q f, \partial_p f) \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ -\text{id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_q g \\ \partial_p g \end{pmatrix},$$

où la matrice  $2n \times 2n$  représente, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$ , une forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée. Le caractère non-dégénéré découle du fait que le déterminant de cette matrice vaut 1, comme on le voit aisément en permutant ses colonnes de manière à la transformer en matrice diagonale. Ce type de forme est appelé **forme symplectique** et un espace vectoriel ou, plus généralement, une variété muni d'une forme symplectique - à un sens généralisé dans le cas des variétés - est un espace ou une **variété symplectique**. L'étude des variétés symplectiques est l'objet de la **Géométrie symplectique**. L'exemple de  $\mathbb{R}^{2n}$  permet d'entrevoir que toute forme symplectique implémente une structure d'algèbre de Poisson sur l'espace des fonctions, si bien que la Géométrie de Poisson est une extension de la Géométrie symplectique. La symétrie et la beauté des équations de Hamilton peuvent être accrues grâce à la forme symplectique de  $\mathbb{R}^{2n}$ . De fait, ces équations s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ -\text{id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_q H \\ \partial_p H \end{pmatrix}.$$

On comprend que la Géométrie symplectique constitue le cadre naturel de la mécanique classique.

### 5.3 Théorème de Poisson, systèmes intégrables

L'équation d'évolution (51) d'une observable autonome implique la

**Proposition 3.** *Une observable autonome  $f = f(q, p)$  d'un système de Hamiltonien  $H$  est une intégrale première si et seulement si*

$$\{f, H\} = 0, \quad (57)$$

*i.e. si et seulement si elle commute avec le Hamiltonien.*

L'identité de Jacobi écrite pour  $f$ ,  $g$  et  $H$ ,

$$\{\{f, g\}, H\} = \{f, \{g, H\}\} + \{\{f, H\}, g\},$$

conduit au **Théorème de Poisson** :

**Théorème 5.** *Si  $f$  et  $g$  sont deux intégrales premières d'un système, il en est de même de leur crochet de Poisson.*

Il est facile de voir que ce théorème reste valable dans le cas non autonome. Néanmoins, il ne permet pas toujours d'augmenter le nombre d'intégrales premières, car souvent ce crochet est nul ou fournit une intégrale première qui n'est pas indépendante de celles qu'il multiplie.

**Définition 6.** Un système mécanique est un *système intégrable* s'il admet  $n$  intégrales premières indépendantes  $f_1, \dots, f_n$  qui Poisson-commutent, i.e. qui vérifient la condition  $\{f_i, f_j\} = 0$  pour tout  $i$  et tout  $j$ .

Les systèmes intégrables constituent un domaine de recherche actuel.

## Travaux à domicile

- Montrer que l'équation d'évolution (51) d'une observable autonome permet de retrouver les équations de Hamilton.
- Prouver que la commutativité  $\{g, f\} = \{f, g\}$  de deux fonctions pour le crochet de Poisson (la même observation est d'ailleurs valable pour tout crochet antisymétrique) est équivalente à la nullité du crochet  $\{f, g\}$  de ces fonctions.
- Établir les règles

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = 0, \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}, \{p_\alpha, q_\beta\} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad (58)$$

que l'on traduit en disant que *chaque  $q$  (resp.  $p$ ) commute avec chaque  $q$  (resp.  $p$ ) et que chaque  $q$  (resp.  $p$ ) commute avec chaque  $p$  (resp.  $q$ ), sauf avec celui qui lui est conjugué.*

- Si  $q_\alpha$  et  $q_\beta$  sont ignorables (resp.  $q_\alpha$  est ignorable et  $H$  est autonome), alors  $p_\alpha$  et  $p_\beta$  (resp.  $p_\alpha$  et  $H$ ) sont des intégrales premières. Déterminer l'intégrale première donnée par le théorème de Poisson.
- Soit une particule se déplaçant dans un champ de potentiel ne dépendant que de la position. Les coordonnées cartésiennes étant choisies comme coordonnées généralisées, exprimer les composantes  $\sigma_{O,i}$  du moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  de la particule par rapport à l'origine  $O$ , en fonction des positions  $q$  et des impulsions  $p$ , puis prouver que

$$\{\sigma_{O,i}, \sigma_{O,j}\} = \varepsilon_{ijk} \sigma_{O,k}.$$

En déduire que si  $\sigma_{O,1}$  et  $\sigma_{O,2}$  sont des intégrales premières, il en est de même de  $\sigma_{O,3}$ .

- Prouver que la toupie est un système intégrable (on négligera l'indépendance qui n'a pas été définie rigoureusement).

## 6 Renonciation

Ce cours est basé essentiellement sur [Sim88] et, dans une moindre mesure, sur [DN96] et [BFR85]. Des encyclopédies en ligne, comme Wikipedia, ont été utilisées. Les exercices sont extraits de sources différentes. La construction du cours s'étant étendue sur une période assez longue et antérieure à celle de la rédaction des présentes notes, des sources peuvent avoir été oubliées. Dans ce cas l'auteur aimerait s'excuser et serait content d'ajouter les références manquantes.

## References

- [BFR85] M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Mécanique 1*, Dunod Université, 1985, 2-04-015755-7
- [Bou93] J. Boutigny, *Mécanique 2*, Classes préparatoires, Vuibert, 1993, 2-7117-4242-3
- [DN96] E.J.M. Delhez, J. Nihoul, *Mécanique rationnelle*, Étienne Riga, 1996, 2-87049-048-8
- [Gol80] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Ser. Phys., 1980, 0-201-02918-9
- [Kib72] T.W.B. Kibble, *Mécanique classique*, Édiscience, 1972
- [LL69] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Vol. 1 of 'A Course of Theoretical Physics'), Pergamon Press, 1969
- [Sim88] R. Simon, *Mécanique analytique*, Vol. 1 et 2, Derouaux, 1988
- [Spi72] M.R. Spiegel, *Mécanique générale*, McGraw-Hill, 1972, 2-7042-0013-0
- [Vio93] F. Viot, *Mécanique du point*, Dunod, 1993, 2-10-001478-1