

**Zwei Anwendungen algebraisch-geometrischer
Methoden in der theoretischen Physik:
Berezin-Toeplitz-Quantisierung und
globale Algebren der
zweidimensionalen konformen Feldtheorie**

von

MARTIN SCHLICHENMAIER

Universität Mannheim
Lehrstuhl II für Mathematik
68131 Mannheim, Germany
email: schlichenmaier@math.uni-mannheim.de
Juni 1996

Ein alter Teich
ein Frosch hüpfte hinein
der Klang des Wassers

Bashô*

1. Einleitung

Die Mathematik und die Physik standen schon immer in fruchtbarer und enger Wechselwirkung. Zum einen war es, daß die Physik, um experimentell überprüfbare Größen aus der Theorie heraus zu bestimmen, die Mathematik benötigte, zum anderen war es aber auch so, daß die Physik die Mathematik benötigte, um diese Theorien überhaupt formulieren zu können. Dabei konnte die Physik meist auf bereits vorhandene mathematische Theorien zurückgreifen. Manchmal ging es aber auch den umgekehrten Weg: Von der Physik wurden wesentliche Impulse zur Weiterentwicklung oder sogar zur Erschaffung mathematischer Theorien gegeben.

Die Bereiche der Mathematik, die eine besondere Rolle in diesem Wechselverhältnis spielten, waren nicht immer dieselben. War es zu Beginn der Entwicklung der klassischen Mechanik durch Newton die, auch von ihm vorangetriebene, Entwicklung der Infinitesimalrechnung, welche dann von Cauchy, seinen Zeitgenossen und Nachfolgern auf eine solide Grundlage gestellt wurde, so war es in der ersten Hälfte des Jahrhunderts im Zusammenhang mit der "klassischen" Quantenmechanik die Theorie der Hilbert-Räume. Dies setzte sich fort mit der Rolle, welche die Theorie der Lie-Gruppen in der Elementarteilchenphysik spielte und immer noch spielt. Heute haben sich zusätzlich faszinierende Beziehungen der theoretischen Physik zur algebraischen Geometrie, zur Theorie unendlichdimensionaler Lie-Algebren, zur niedrig-dimensionalen Topologie und noch zu vielen anderen Gebieten der Mathematik aufgetan. Gerade in diesen Bereichen ist es so, daß die Mathematik selbst sehr viel von diesem Kontakt profitiert. Begonnen hatte diese Phase mit der mathema-

* Ein *Haiku* des japanischen Dichters Bashô (1644–94) übersetzt von Franziska Ehmcke.

tischen Umsetzung der physikalischen Yang-Mills-Eichtheorie in vier Dimensionen (eine Quantenfeldtheorie), welche zum Studium des Modulraums gewisser algebraischer Bündel über algebraischen Flächen (also reell-vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten) führte. Mit Hilfe der Donaldson-Invarianten konnten diese Modulräume zur Bestimmung von Diffeomorphieinvarianten algebraischer Flächen benutzt werden. Letztendlich brachte dies eine Reihe wichtiger mathematischer Resultate, etwa, daß es topologische Viermannigfaltigkeiten gibt mit unendlich vielen nicht isomorphen differenzierbaren Strukturen. Bemerkenswert ist, daß dieser Bereich kürzlich nochmals durch die Seiberg-Witten-Invarianten revolutioniert wurde. Hierbei stammt von Witten [211] die Idee, daß eine physikalisch erwartete Symmetrie zweier Theorien auch eine Entsprechung auf der mathematischen Seite haben sollte. Dabei ist die mathematische Seite der einen Theorie die Donaldson-Theorie (eine Theorie der Instantonen) und die mathematische Seite der symmetrischen Theorie die neugeschaffene Theorie der Seiberg-Witten-Invarianten (eine Theorie der “Monopol-Gleichung”).

Auch aus dem Gebiet der konformen und topologischen Quantenfeldtheorie heraus stammen von Witten wesentliche Impulse zur Entwicklung der Mathematik, speziell auch im Bereich der algebraischen Geometrie. Es sei hier nur an die Witten-schen Vermutungen zur Schnitttheorie auf dem Modulraum der punktierten algebraischen Kurven erinnert. Diese Vermutungen wurden dann von Kontsevich mathematisch bewiesen. Weitere wichtige Beziehungen zwischen der modernen theoretischen Physik und der algebraischen Geometrie bestehen. Da ist zum einen die Beziehung der konformen Blöcke in der konformen Quantenfeldtheorie zur Darstellungstheorie affiner Kac-Moody-Algebren und weiter zum Modulraum der Vektorbündel auf algebraischen Kurven. Die von den Physikern vermutete “Verlinde-Formel” regte viele hervorragende Mathematiker an, an deren Beweis zu arbeiten. Hier seien nur erwähnt Faltings, Beauville, Lazlo, Narasimhan, Ramanan, Tsuchya, Ueno und Yamada, ... Auf diesem Gebiet wurde auf mathematischer Seite ein relativ zufriedenstellender Zustand erreicht. Dies will sagen, die Formel ist bewiesen für die wichtigsten Gruppen.

Von einem solchen Zustand ist man auf dem nächsten Gebiet noch sehr entfernt. Auf der physikalischen Seite handelt es sich um die Spiegelsymmetrie (“mirror symmetry”). Wiederum wegen der erwarteten Gleichwertigkeit zweier physikalischer Theorien (konkreter zweier “Kompaktifizierungen” der Stringtheorie)

erhält man die Symmetrie zweier algebraisch-geometrischer Objekte auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten der (komplexen) Dimension drei. Verblüffend ist, daß von den Physikern enumerative Größen angegeben wurden, etwa die Zahl rationaler Kurven vom festen Grad auf der Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit, von denen die Mathematiker bis dahin keine zugrundeliegende Struktur erahnten, bzw. noch nicht einmal diese Zahlenwerte kannten. Trotz vielfältiger Anstrengungen ist man bei weitem noch nicht zu einer zufriedenstellenden mathematischen Erklärung des Sachverhalts gelangt.

In der vorliegenden Schrift sollen die bescheidenen mathematischen Ergebnisse, die der Autor auf diesem Gebiet der algebraisch-geometrischen Methoden erarbeitet hat, die von Relevanz in der theoretischen Physik sein könnten, dargestellt und weiterentwickelt werden. Einige dieser Ergebnisse wurden in Zusammenarbeit mit anderen Mathematikern und Physikern entwickelt. Was sind die Bereiche, die hier zur Sprache kommen? Dies ist zum einen der Bereich der Berezin-Toeplitz-Quantisierung kompakter Kähler-Mannigfaltigkeiten, zum anderen der Bereich des globalen Zugangs zur konformen Feldtheorie auf kompakten Riemannschen Flächen höheren Geschlechts unter Benutzung der Objekte vom Krichever-Novikov-Typ. Bei den Krichever-Novikov-Algebren (und deren Verallgemeinerungen) handelt es sich um geometrisch induzierte unendlichdimensionale Lie-Algebren, welche die Virasoro-Algebra bzw. die affinen Lie-Algebren (Kac-Moody-Algebren) verallgemeinern. Dementsprechend ist die Schrift auch zweigeteilt. Der erste Teil (Abschnitt 2 bis 8) beschäftigt sich mit der Berezin-Toeplitz-Quantisierung, der zweite Teil (Abschnitt 9 bis 14) mit der Krichever-Novikov-Theorie. Auch wenn man nun zuerst vermuten könnte, daß diese beiden Bereiche nichts miteinander zu tun haben, ist dem nicht so. So weist man etwa bei der Quantisierung der Chern-Simons-Theorie jeder Riemannschen Fläche in funktorieller Weise einen endlichdimensionalen Vektorraum zu. Eine Möglichkeit einen solchen zu finden besteht darin, den kompaktifizierten Modulraum der stabilen Vektorbündel festen Rangs und festen Grads zu einer festen Strukturgruppe über der Riemannschen Fläche zu betrachten. Dieser Modulraum ist eine Varietät mit sehr milden Singularitäten. Er besitzt ein eindeutig bestimmtes amples Geradenbündel minimalen Grads. Führt man die Quantisierung dieses Modulraums durch, so erhält man zu jedem Level k (entspricht der k -ten Tensorpotenz des amples Bündels) als endlichdimensionalen Vektorraum den Raum der holomorphen Schnitte in diese Tensorpotenz. Für diese Vektorräume hat sich der Namen "Verlinde-Räume" eingebürgert. Die berühmte Verlinde-Formel macht Aussagen

über die Dimension dieser Räume in Abhängigkeit vom Rang, der Strukturgruppe der Bündel und dem Geschlecht der Riemannschen Fläche. Leider ist es bis jetzt noch nicht gelungen, darauf aufbauend, eine vollständige Theorie zu entwickeln. Es ist zu erwarten, daß auf diesem Feld noch faszinierende Entwicklungen bevorstehen.

Als eine weitere Verbindung sei erwähnt, daß die auftretenden Lie-Algebren selbst oft dynamische Systeme bilden, bzw. zu deren Beschreibung eingesetzt werden.

Nun zu einer kurzen Beschreibung dessen, was in den einzelnen Abschnitten gemacht wird. Im ersten Teil der Arbeit wird die Berezin-Toeplitz-Quantisierung kompakter Kähler-Mannigfaltigkeiten behandelt. Ich habe allerdings versucht, eine hoffentlich auch für den Nichtexperten lesbare Einführung in eine der wichtigen Problemstellungen der Quantenmechanik zu geben, nämlich in das Problem: Wie erhält man aus kommutativen Objekten nichtkommutative. Um dies zu präzisieren: Gegeben sei eine Phasenmannigfaltigkeit. Die kommutativen Objekte sind die Elemente der kommutativen Algebra der Funktionen auf der Phasenmannigfaltigkeit. Dies sind die klassischen Observablen. Man versuche nun, diesen Funktionen, bzw. sogar der ganzen Algebra, nichtkommutative Objekte (Operatoren, Algebren, ...) zuzuordnen. Was man unter dem Begriff "natürlich" zu verstehen hat, ist nicht klar festgelegt. Eine geometrische Methode würde ich jedoch als natürlicher betrachten als ein rein formales Äquivalenzprinzip. Hierüber mögen die Ansichten auseinander gehen.

In *Abschnitt 2* werden die relevanten Begriffe aus der klassischen Mechanik bereitgestellt. Zentral ist der Begriff der symplektischen Mannigfaltigkeit (die "Phasenmannigfaltigkeit") mit ihrer symplektischen Form und der dadurch definierten Poisson-Algebrastruktur auf den (beliebig oft) differenzierbaren Funktionen der Mannigfaltigkeit. Einige der Aspekte des Übergangs zur Quantenmechanik werden dargestellt. Insbesondere wird definiert, was man unter einer vollständigen Quantisierung versteht. U.a. soll hierbei die Poisson-Klammer zweier Funktionen in den Kommutator der zugeordneten Operatoren übergehen. Die gesamte Quantenmechanik hängt von einem Parameter \hbar , der Planckschen Konstante, ab. Die klassische Mechanik soll sich als $\hbar \rightarrow 0$ -Grenzwert aus der Quantenmechanik ergeben. Das Groenewold-van Hove-Theorem besagt allerdings, daß eine vollständige Quantisierung nicht möglich ist.

In *Abschnitt 3* wird die Deformationsquantisierung, bzw. die Quantisierung durch Sternprodukte behandelt. Hierbei betrachtet man nichtkommutative Deformationen der Funktionenalgebra durch formale Potenzreihen in der Variablen \hbar mit Koeffizienten aus den differenzierbaren Funktionen. In den Termen nullter Ordnung soll sich die Funktionenalgebra wiederfinden, in den Termen linearer Ordnung die Poisson-Algebra. Dies bedeutet, die Poisson-Klammer zweier Funktionen geht, bis auf Terme höherer Ordnung in \hbar , in den Sternkommutator über. In diesem Abschnitt wird die Definition der Sternprodukte gegeben. Es werden Beispiele (Moyal-Produkt, Wick-Produkt) behandelt und die Verbindung zur Kohomologie, bzw. Homologie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeiten aufgezeigt. Nach einem Theorem von de Wilde-Lecomte, Fedosov, Omori-Maeda-Yoshida, ... besitzt jede symplektische Mannigfaltigkeit ein Sternprodukt. Es wird sich später zeigen, wie man mit Hilfe der Berezin-Toeplitz-Quantisierung für kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten ein Sternprodukt erhält.

Vorerst werden aber die Grunddefinitionen der geometrischen Quantisierung in *Abschnitt 4* dargestellt. Bei der geometrischen Quantisierung wird die Funktion f repräsentiert durch einen Operator (eine modifizierte kovariante Ableitung in Richtung des Hamiltonschen Vektorfelds zu f) auf den differenzierbaren Schnitten eines Geradenbündels L , dem Quantenbündel. Diese Operatoren heißen Präquantenoperatoren. Im folgenden werden nur symplektische Mannigfaltigkeiten behandelt, die komplexe Kähler-Mannigfaltigkeiten sind und für die die symplektischen Formen durch die Kähler-Formen gegeben sind. Es zeigt sich, daß zur Durchführung dieses Programms die Präquantenbedingung erfüllt sein muß. Diese gibt einen Zusammenhang zwischen der Krümmung des Quantenbündels L und der Kähler-Form. Ist die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit M kompakt, so folgt daraus, daß das Quantenbündel amplex ist. Dies bedeutet, die Kähler-Mannigfaltigkeit kann via der Schnitte einer geeigneten Tensorpotenz von L in einen projektiven Raum komplexisomorph eingebettet werden. M ist also eine projektive Mannigfaltigkeit. Wir sind somit im Bereich der algebraischen Geometrie angelangt. Im folgenden werden wir nur noch kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten betrachten. Diese treten etwa auf, wenn Systeme mit "constraints" behandelt werden. Darüberhinaus ist der reduzierte Phasenraum oft kompakt, wenn man Systeme mit der Aktion einer Symmetriegruppe betrachtet. Eine weitere, sehr aktuelle Rolle spielen diese kompakten Mannigfaltigkeiten auch im Zusammenhang mit der Quantisierung von Chern-Simons-Theorien. Dies wurde bereits weiter oben angesprochen.

Die Präquantenoperatoren operieren auf Feldern, welche von “zu vielen” Variablen abhängen. Um die “richtigen” Quantenoperatoren zu erhalten, muß man polarisierte Schnitte betrachten. Im Kähler-Fall gibt es eine natürliche Polarisierung, man betrachtet nur die holomorphen Schnitte. Den Quantenoperator erhält man, indem man den Präquantenoperator auf die holomorphen Schnitte anwendet und das Ergebnis auf den Unterraum der globalen holomorphen Schnitte zurückprojiziert. Haben die Präquantenoperatoren noch Poisson-Klammern in Kommutatoren überführt, so gilt dies für die Quantenoperatoren nicht mehr.

Bisher wurden im wesentlichen bekannte Tatsachen zusammengetragen, bzw. einige Resultate gezeigt, welche für die späteren Abschnitte von Bedeutung sind. In *Abschnitt 5* wird die Berezin-Toeplitz-Quantisierung eingeführt. Dieser Quantisierungsoperator ist einfacher als der Operator der geometrischen Quantisierung. Der holomorphe Schnitt wird direkt mit der zu quantisierenden Funktion f multipliziert. Der dadurch erhaltene differenzierbare Schnitt wird auf den Unterraum der holomorphen Schnitte zurückprojiziert. Diesen Operator nennt man Toeplitz-Operator zur Funktion f . Die nun folgenden Ergebnisse im Zusammenhang mit der Berezin-Toeplitz-Quantisierung sind Ergebnisse, die der Autor zusammen mit Martin Bordemann und Eckhard Meinrenken erzielt hat, bzw. darauf aufbauende Weiterentwicklungen. Von Tuynman stammt ein erstaunliches Resultat, welches für kompakte Mannigfaltigkeiten den Operator der geometrischen Quantisierung durch den Toeplitz-Operator ausdrückt. In *Abschnitt 5* findet sich ein koordinatenunabhängiger Beweis (Prop. 5.4). Es gibt noch einen weiteren Zugang zur Quantisierung, der ebenfalls von Berezin stammt. Dies ist der Zugang über die kohärenten Berezin-Zustände, bzw. seine kovarianten und kontravarianten Symbole. In *Abschnitt 5(d)* wird der Zusammenhang dieser Symbole mit den Toeplitz-Operatoren behandelt. Als Ergebnis ergibt sich etwa, daß das kontravariante Symbol des Toeplitz-Operators zur Funktion f die Funktion f selbst ist (Prop. 5.9) und daß die kovariante Symbolabbildung und die Toeplitzabbildung zueinander adjungiert sind (Prop. 5.10).

Da die hier auftretenden Räume der holomorphen Schnitte wegen der Kompaktheit der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit endlichdimensional sind, kann man nicht erwarten, die klassische Situation wiederzufinden. Hierzu muß man, ausgehend von dem Quantenbündel L , die Konstruktion für alle Tensorpotenzen $L^{\otimes m}$ durchführen. Die Erwartung ist, daß für $m \rightarrow \infty$, d.h. $\hbar := 1/m \rightarrow 0$ die klassi-

sche Situation zurückerhalten wird. In der Tat sind dies die zentralen Aussagen des *Abschnitts 6*. Theorem 6.1 und Theorem 6.2 besagen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_f^{(m)}\| = \|f\|_\infty, \quad (1-1)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|m \cdot [T_f^{(m)}, T_g^{(m)}] - T_{\{f,g\}}^{(m)}\| = 0. \quad (1-2)$$

Es sei hierbei $T_f^{(m)}$ der Toeplitz-Operator zur Funktion f in Bezug auf das Bündel $L^{\otimes m}$. Aufgrund der Tuynman-Beziehung gelten entsprechende Aussagen auch für die geometrische Quantisierung. Zum Beweis der Theoreme wird die Einbettung von M in den projektiven Raum \mathbb{P}^N benutzt. Genauer benutzen wir die Einbettung des Totalraums des dualen Bündels zu L (L sei als sehr ampel angenommen) in den Totalraum des tautologischen Bündels von \mathbb{P}^N . Das Kreislinienbündel berandet das Diskbündel. Die vorgegebenen Daten definieren eine Toeplitz-Struktur im Sinne von Boutet de Monvel und Guillemin. Die Operatoren $T_f^{(m)}$ können als Moden eines “globalen Toeplitz-Operators” beschrieben werden. Der von Boutet de Monvel und Guillemin entwickelte Symbolkalkül liefert das Ergebnis (1-2). Die Aussage (1-1) wird mit anderen Methoden (Fourier-Integraloperatoren, Hermite-Distributionen) bewiesen. Der allgemeine Beweis hierfür wird in Abschnitt 6 skizziert. Für den Fall, daß M durch die Einbettung eine projektive Kähler-Untermannigfaltigkeit wird, d.h. daß die Kähler-Form mit der eingeschränkten Fubini-Study-Form übereinstimmt, wird in diesem Abschnitt (1-1) mit Hilfe von Calabis “diastatic function” gezeigt.

In *Abschnitt 7* wird durch Verfeinerung der Symbolrechnung aus Abschnitt 6 ein (formales) Sternprodukt für kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten mit Hilfe der Berezin-Toeplitz-Quantisierung konstruiert (Theorem 7.1).

In *Abschnitt 8* wird das vom Autor zusammen mit Martin Bordemann, Jens Hoppe und Peter Schaller [A] entwickelte Konzept der \mathfrak{L}_α -Approximation dargestellt. Der Ausgangspunkt hierfür war, daß die in der Theorie der Membranen wichtigen unendlichdimensionalen Lie-Algebren durch eine Folge von endlichdimensionalen Matrizenalgebren (etwa $gl(n), n \rightarrow \infty$) angenähert werden können. Typischerweise hat man allerdings nur lineare Abbildungen und keine Lie-Homomorphismen. “Approximativ”, d.h. für $n \rightarrow \infty$, “werden” es solche. Das Konzept der \mathfrak{L}_α -Approximation macht dies präziser. Der Begriff des $(gl(n), n \rightarrow \infty)$ -Quasilimes wird eingeführt. In [A] wurde vermutet, daß durch die geometrische Quantisierung die Poisson-Algebra einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit immer ein

$(gl(k(n)), n \rightarrow \infty)$ -Quasilimes ist. Es ist $k(n)$ eine über den Satz von Riemann-Roch angebbare Funktion, die von der Mannigfaltigkeit abhängt. In diesem Abschnitt wird mit den Resultaten aus Abschnitt 6 gezeigt, daß sowohl die geometrische Quantisierung als auch die Berezin-Toeplitz-Quantisierung einen solchen Quasilimes definiert. In Abschnitt 8 werden aber auch noch einige weitere Beispiele solcher Approximationen behandelt. Es handelt sich hierbei um die Quantentorusalgebra und die Sphärenalgebra. Desweiteren werden die divergenzfreien Vektorfelder auf der Kähler-Mannigfaltigkeit in Bezug zur Poisson-Algebra gebracht. Zum Abschluß sei erwähnt, daß solche Approximationen auch in der Theorie der integrablen Systeme und der Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten von Bedeutung sind.

War der erste Teil etwas allgemeiner angelegt, so präsentiere ich im zweiten Teil speziellere Resultate. Die Virasoro-Algebra und ihre Darstellungen sind in der konformen Feldtheorie von fundamentaler Bedeutung. Sie tritt dort in verschiedenen Interpretationen auf. Sie ist die universelle zentrale Erweiterung der Witt-Algebra, die aus den Vektorfeldern auf der S^1 besteht, die eine endliche Fourier-Darstellung haben. Diese Algebra kann nach der Komplexifizierung aufgefaßt werden als die Algebra der meromorphen Vektorfelder auf der Riemannschen Zahlenkugel (d.h. der Riemannschen Fläche vom Geschlecht Null), die holomorph außerhalb der Punkte 0 und ∞ sind.¹ Geht man über zu Riemannschen Flächen höheren Geschlechts, so hat man zwei Möglichkeiten. Entweder man betrachtet an jedem Punkt eine lokale Theorie, die durch die Virasoro-Algebra beschrieben wird, oder man versucht, eine globale Beschreibung der Feldtheorie mit Hilfe der entsprechend verallgemeinerten Algebren zu erhalten. Der zweite Zugang stammt von Krichever und Novikov [146],[147],[148]. Der erste Schritt hierbei ist sehr einfach. Man nehme die meromorphen Vektorfelder auf der Riemannschen Fläche, die holomorph außerhalb zweier festgewählter Punkte sind. Entscheidend ist die Einführung einer Graduierung im zweiten Schritt. Die von der Physik benötigten Darstellungen, die Höchstgewichtsdarstellungen, machen erst Sinn, wenn man für die Algebren eine graduierte Struktur hat; für die Witt- bzw. Virasoro-Algebra hat man eine solche (siehe Abschnitt 9 für die Details). Krichever und Novikov machten die Beobachtung, daß man mit einem schwächeren Konzept, der Beinahe-Graduierung, auskommt. Durch Angabe einer speziellen Basis führten sie solch eine Beinahe-Graduierung ein. Vom Autor wurden

¹Es gibt noch weitere Interpretationen, siehe etwa [180].

in seiner Dissertation im Jahre 1990 die entsprechenden Mehrpunktverallgemeinerungen (insbesondere auch die zugehörige Beinahe-Graduierung) entwickelt.

Im 2. Teil dieser Schrift sollen Weiterentwicklungen hiervon vorgestellt werden. Die Resultate der Dissertation werden, soweit sie zur Darstellung des Gesamtbilds notwendig sind, kurz referiert.

In *Abschnitt 9* werden die grundlegenden geometrischen Definitionen gegeben. Gegeben ist eine kompakte Riemannsche Fläche festen Geschlechts. Die Menge der möglichen Polstellen A wird in zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen, die Menge der Eintrittspunkte I und die Menge der Austrittspunkte O , zerlegt. Man betrachtet meromorphe Vektorfelder oder, allgemeiner, meromorphe Schnitte in eine λ -fache Tensorpotenz des kanonischen Bündels (Formen vom Gewicht λ), die holomorph außerhalb A sind. Die Zerlegung $A = O \cup I$ wird benutzt, um eine Beinahe-Graduierung einzuführen. Eine wesentlich verschiedene Zerlegung von A ergibt auch eine wesentlich verschiedene Graduierung auf dem Raum der Formen vom Gewicht λ . Es werden die relevanten Algebren, die Vektorfeldalgebra, die Algebra der Funktionen, die Algebra der Differentialoperatoren und deren Aktion auf den Formen eingeführt.

In *Abschnitt 10* werden zentrale Erweiterungen dieser Algebren mit Hilfe geometrischer Kozykel konstruiert, die durch Integration entsprechender Differentialformen gewonnen werden. Will man die Beinahe-Graduierung auf die zentralerweiterten Algebren fortsetzen, so muß der Kozykel "lokal" sein. Ist der Integrationsweg eine "Niveaulinie" (insbesondere trennt diese die Punkte aus I von denen aus O), so ist der Kozykel lokal. Desweiteren werden in diesem Abschnitt die Verallgemeinerungen der affinen Lie-Algebren (Kac-Moody-Algebren vom ungetwisteten affinen Typ) auf höheres Geschlecht und mehrere Punkte gegeben.

In *Abschnitt 11* wird die Sugawara-Konstruktion für diese affinen Mehrpunktalgebren behandelt. In der klassischen Situation erhält man, ausgehend von einer zulässigen Darstellung der affinen Algebra, durch die Sugawara-Konstruktion eine Darstellung der Virasoro-Algebra. In diesem Abschnitt wird diese Konstruktion geometrisiert und dann verallgemeinert auf höheres Geschlecht und mehrere Punkte. Auch hier liefert die Sugawara-Konstruktion eine Darstellung der zentralerweiterten Vektorfeldalgebra (Theorem 11.7 und 11.17).

In *Abschnitt 12* werden weitere Resultate einer gemeinsamen Arbeit des Autors zusammen mit Oleg K. Sheinman [K] dargestellt und weiterentwickelt. Zuerst werden Höchstgewichtsmodul für die zentralerweiterten Funktionen-, Vektorfeld-, Differentialoperator-, bzw. affinen Algebren in Verallgemeinerung der klassischen Situation definiert. Es wird gezeigt, daß man, ausgehend von den Höchstgewichtsdarstellungen der affinen Mehrpunktalgebra, durch die Sugawara-Konstruktion eine Höchstgewichtsdarstellung der zentralerweiterten Vektorfeldalgebra erhält. Für die zentrale Ladung ergibt sich die auch im klassischen bekannte Beziehung

$$c_{\widehat{\mathcal{L}}} = \frac{\dim \mathfrak{g} \cdot c}{c + k} .$$

Hierbei ist \mathfrak{g} die endlichdimensionale einfache oder abelsche Lie-Algebra, von der ausgehend man die affine Algebra konstruiert, k die duale Coxeter-Zahl von \mathfrak{g} , bzw. $k = 0$ im abelschen Fall, c die zentrale Ladung der Darstellung der affinen Algebra und $c_{\widehat{\mathcal{L}}}$ die zentrale Ladung der durch die Sugawara-Konstruktion gegebenen Darstellung der zentralerweiterten Vektorfeldalgebra. Um eine Beziehung zwischen den Gewichten der Darstellung zu erhalten, muß man das von Sheinman eingeführte Totalgewicht betrachten. Für Darstellungen vom Sheinman-Typ erhält man im 2-Punktfall eine Beziehung der Gewichte (Theorem 12.14). Für die Höchstgewichtsdarstellungen der mit einem Vektorfeld erweiterten affinen Algebren werden Casimir-Operatoren konstruiert. Es wird eine Formel für den Eigenwert des Casimir-Operators gegeben, falls dieser überhaupt einen besitzt.

Eine weitere Methode, Darstellungen der zentralerweiterten Vektorfeldalgebra zu erhalten, ist die Methode der semi-infiniten Wedgeprodukte, die man ausgehend von den Formen eines festen Gewichts λ konstruiert. Diese wird in *Abschnitt 13* dargestellt. Die Wedgeprodukt-darstellung zerfällt in Höchstgewichtsdarstellungen im Sinne des vorherigen Abschnitts. Die zentrale Ladung dieser Darstellung beträgt

$$-2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) .$$

Es tritt also wieder der berühmte Ausdruck aus Mumfords Formel auf. Als interessantes Nebenresultat (Theorem 13.4) erhält man eine konkrete Realisierung einer zentralen Erweiterung der Differentialoperatoralgebra (beliebiger Ordnung!). Die Existenz einer solchen Erweiterung ist zwar bekannt, der Beweis hierzu ist aber nicht trivial. Auf dem Raum der Wedgeprodukte werden $b - c$ -Systeme konstruiert (diese bilden eine Clifford-Algebra). Es wird gezeigt, daß man die Darstellung einer

zentralerweiterter Vektorfeldalgebra erhält, wenn man den zugeordneten Energie-Impuls-Tensor in seine “Moden” zerlegt. Speziell für $b - c$ -Systeme vom Gewicht $(2, -1)$ erhält man als zentrale Ladung dieser Darstellung -26 . Dies ist ein weiterer Punkt, an dem sich 26 als Dimension der Raumzeit der bosonischen Stringtheorie ergibt.

Im letzten *Abschnitt 14* wird als Beispiel einer Degeneration der Fall des Torus (also Geschlecht Eins) mit 2 und 3 Punkten als mögliche Polstellen behandelt. Für gewisse natürliche Punktewahlen wird die Degeneration des Torus (d.h. der elliptischen Kurve) in die beiden singulären kubischen Kurven, die Knotenkurve und die Spitzenkurve, untersucht. Die Entartung der Vektorfeldalgebra zu den entsprechenden Algebren auf der Desingularisierung beider Kurven, dem \mathbb{P}^1 , wird studiert. Insbesondere wird auch gezeigt, wie aus einer 2-Punktsituation durch Entartung der Kurven eine 3-Punktsituation auf einer Kurve vom Geschlecht Null entsteht. Diese Entartungstechniken sind von Bedeutung in der konformen Feldtheorie. Viele Aussagen bei höherem Geschlecht werden dort über “Faktorisierungspostulate” auf die entsprechenden Resultate auf Riemannschen Flächen niedrigeren Geschlechts zurückgeführt. Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, entsprechen diese Faktorisierungspostulate einer Deformation in den Rand des Modulraums der Riemannschen Flächen festen Geschlechts (eventuell mit Zusatzstrukturen). Diese Beispiele zeigen, daß das Studium der Mehrpunktsituation auch dann notwendig ist, wenn man von einer 2-Punktsituation ausgeht.

Da ich die durch die Zweiteilung der Arbeit etwas heterogene Leserschaft (bezüglich deren Arbeitsfelder) im Auge habe, erscheint es mir notwendig, gewisse in ihrem Feld wohlbekanntere Grundkonzepte zu erläutern. Ich hoffe, damit auch eine für den Nichtexperten lesbare Einführung in die Berezin-Toeplitz-Quantisierung und in die Verwendung der globalen Krichever-Novikov-Objekte (einschließlich ihrer Mehrpunktverallgemeinerungen) in der zweidimensionalen konformen Feldtheorie zu geben.

Einige Bemerkungen zur Notation.

Das Literaturverzeichnis ist zweigeteilt. Die Referenzen, die mit den Buchstaben des Alphabets bezeichnet werden, sind eigene Arbeiten, bzw. Arbeiten, die zusammen mit anderen Autoren geschrieben wurden. Die mit Nummern bezeichneten sind die weiteren Referenzen.

Verwendet wird die übliche mathematische Symbolik, die weitestgehend Standard ist. Wenn hier von Riemannschen Flächen gesprochen wird, so sind, falls nichts anderes gesagt wird, immer kompakte gemeint. Insbesondere handelt es sich auch um nichtsinguläre Kurven über den komplexen Zahlen \mathbb{C} . Je nach Bedarf werde ich zwischen den beiden Begriffen wechseln. Es sei immer der Grundkörper \mathbb{C} vorausgesetzt. In der Tat ist es möglich, viele Resultate im zweiten Teil über einem beliebigen, algebraisch abgeschlossenen Körper (mit Charakteristik 0 oder geeignet hoher Charakteristik) zu entwickeln. Dies soll aber hier, aus Gründen der Darstellung, nicht erfolgen. Unter “differenzierbar” sei immer beliebig oft differenzierbar verstanden.

Danksagung

Danken möchte ich allen, mit denen ich in den vergangenen Jahren mathematisch zusammengearbeitet habe, vor allem Martin Bordemann, Jens Hoppe, Eckhard Meinrenken und Oleg K. Sheinman für fruchtbare mathematische Kontakte. Danken möchte ich dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach und der Volkswagen-Stiftung für die teilweise Unterstützung im Rahmen des “Research in Pairs” Programms und nicht zuletzt auch meiner Frau Ilse und meinem Sohn Johannes für das Verständnis dafür, daß in der Endphase der Erstellung dieser Schrift gemeinsame Familienaktivitäten etwas kurz kamen.

Teil I: Quantisierung

2. Von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik

In diesem Abschnitt soll lediglich gezeigt werden, daß es interessant ist, nichtkommutative Deformationen von Funktionenalgebren zu untersuchen. Ich möchte hier nicht den Versuch unternehmen die mathematischen Grundlagen der Quantisierung zu beschreiben.

Der mathematische Rahmen der klassischen Mechanik ist der Phasenraum, bzw. allgemeiner die Phasenmannigfaltigkeit. Die Variablen im Phasenraum (bzw. die lokalen Variablen auf der Phasenmannigfaltigkeit) sind die Orts- und Impulsvariablen. Die physikalischen Observablen sind Funktionen (C^∞ -Funktionen, analytische Funktionen, etc.) auf der Phasenmannigfaltigkeit M . Um Dynamiken zu konstruieren, ist die Vorgabe einer symplektischen Form ω (d.h. einer nichtausgearteten, geschlossenen 2-Differentialform) notwendig. Das Paar (M, ω) heißt *symplektische Mannigfaltigkeit*. Das Standardbeispiel des Phasenraums ist das Kotangentenbündel $T^*\mathbb{R}^n$, das mit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann. Hierbei ist das Paar $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ gegeben durch die freien Ortsvariablen $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ und die zugehörigen Impulsvariablen $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Die symplektische Form ist definiert als¹

$$\omega := \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i . \quad (2-1)$$

Ist $f \in C^\infty(M)$ eine Funktion so kann aufgrund der Nichtausgeartetheit der Form ω das zugehörige *Hamiltonsche Vektorfeld* X_f durch

$$i_{X_f} \omega = \omega(X_f, \cdot) = df(\cdot) \quad (2-2)$$

eindeutig bestimmt werden. Sind $f, g \in C^\infty(M)$, so wird durch

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) \quad (2-3)$$

¹In den Konventionen (Vorzeichengebung, etc.) orientiere ich mich weitestgehend an Abraham-Marsden [1]. Hier finden sich auch die Beweise für die folgenden Tatsachen.

eine weitere Funktion auf M bestimmt. Durch die Verknüpfung (2-3) erhält die kommutative Funktionenalgebra $C^\infty(M)$ noch eine weitere algebraische Struktur, die Struktur einer *Poisson-Algebra*. Dies bedeutet

- (1) $(C^\infty(M), \cdot)$ ist eine assoziative, kommutative Algebra,
- (2) $(C^\infty(M), \{ \cdot, \cdot \})$ ist eine Lie-Algebra,
- (3) es gilt die Kompatibilitätsbeziehung (die Leibniz-Regel):

$$\forall f, g, h \in C^\infty(M) : \quad \{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + \{f, h\} \cdot g . \quad (2-4)$$

Die zusätzliche Lie-Struktur nennt man *Poisson-Klammer*. Diese Algebra sei mit $(\mathcal{P}(M), \omega)$, bzw. wenn klar ist welches ω zugrundegelegt ist, mit $\mathcal{P}(M)$, oder auch einfach mit $C^\infty(M)$ bezeichnet. In der Tat ist es möglich² eine sinnvolle Theorie zu betreiben, ohne daß eine nichtausgeartete symplektische Form existiert. In diesem Fall stellt man die Poisson-Algebrenstruktur in den Vordergrund und redet von *Poisson-Mannigfaltigkeiten*. Hier gehe ich aber in Richtung der Kähler-Mannigfaltigkeiten. Diese besitzen immer eine symplektische Form.³

Für den Fall $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ und ω aus (2-1) ist die Poisson-Klammer gegeben durch

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) . \quad (2-5)$$

Es sei noch erwähnt, daß für jede symplektische Mannigfaltigkeit lokale Koordinaten gefunden werden können, in denen ω lokal die Form (2-1) und die Poisson-Klammer lokal die Form (2-5) besitzt. Diese Koordinaten heißen *kanonische Koordinaten*.

Eine Hamiltonsche Dynamik ist durch Vorgabe einer festen Funktion, der Hamilton-Funktion $H \in \mathcal{P}(M)$ gegeben. Diese Funktion ergibt ein festes Hamiltonsches Vektorfeld X_H und induziert somit einen zugeordneten Hamiltonschen Fluß auf der Mannigfaltigkeit M . Sei $m \in M$ ein fester Punkt und I ein offenes Intervall in \mathbb{R} mit $0 \in I$. Die Integralkurve $c : I \rightarrow M$ mit der Anfangsbedingung $c(0) = m$ ist gegeben als Lösung der Differentialgleichung

$$c'(t) = X_H(c(t)), \quad t \in I, \quad c(0) = m . \quad (2-6)$$

²Dies ist notwendig für den Fall von Lie-Gruppen wenn man eine mit der Gruppenmultiplikation verträgliche Poisson-Klammer haben möchte.

³Zur Quantisierung von allgemeinen Poisson-Algebren, siehe etwa den Übersichtsartikel [121]

Dies sind die klassischen Bewegungsgleichungen. Ausgehend vom Punkt m (d.h. bei gegebenen Anfangswerten für Ort und Impuls) zur Zeit $t = 0$, nimmt das System den Zustand $c(t)$ zum Zeitpunkt t ein. Auf der Ebene der Poisson-Algebra können die Bewegungsgleichungen beschrieben werden (für alle $f \in \mathcal{P}(M)$) durch

$$\frac{d}{dt}f(c(t)) = \{f, H\}(c(t)) . \quad (2-7)$$

In kanonischen Koordinaten berechnet sich das Hamiltonsche Vektorfeld zu

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \quad (2-8)$$

und die Integralkurve ist gegeben durch

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n . \quad (2-9)$$

Die *klassischen Observablen* sind Funktionen auf der Phasenmannigfaltigkeit M . Sei etwa $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ der Phasenraum eines Teilchens im freien n -dimensionalen Raum, so ist die i -ten Ortskoordinate q_i selbst eine physikalische Observable

$$q_i : ((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)) \mapsto \alpha_i .$$

Die Auswertung dieser Funktion am Punkt (a, b) entspricht einer klassischen Messung der i -ten Ortskoordinate des Systems im Zustand (a, b) . Dasselbe trifft auf die i -te Impulskoordinate p_i und auf andere Funktionen des Phasenraums zu. So ist die kinetische Energie des Teilchens durch das Auswerten der Funktion $\frac{1}{2m} \langle p, p \rangle$ am Punkt $(a, b) \in M$ gegeben.

Der Übergang zur Quantenmechanik wird z.B. durch zwei experimentelle Ergebnisse erzwungen. Zum einen beobachtet man, daß auf atomarem Level bei der Messung bestimmter Größen kein kontinuierlicher Wertebereich erhalten wird sondern nur klar definierte diskrete Werte. Zum zweiten sieht man, daß Ort und Impuls eines Teilchens nicht durch ein Experiment gleichzeitig beliebig genau gemessen werden können. Dies ist die berühmte Heisenbergsche Unschärferelation. Die Physiker benützen den folgenden Formalismus um die Situation zu beschreiben. Man nimmt einen geeigneten (komplexen) Hilbert-Raum \mathbf{H} und ersetzt die klassischen

Observablen f durch selbstadjungierte Operatoren \hat{f} , die *quantenmechanischen Observablen*, welche auf \mathbf{H} operieren. Der Hilbert-Raum soll der quantenmechanische Zustandsraum des betrachteten Systems sein. Bei der Messung der quantenmechanischen Observablen \hat{f} wird das System in einen Eigenzustand zu \hat{f} gesetzt, falls es sich noch nicht in einem solchen befindet. D.h. bei der Messung von \hat{f} wird ein Eigenvektor von \hat{f} angenommen und der zugehörige Eigenwert ergibt sich als Messwert. Durch die Selbstadjungiertheit ist dieser reell. Welcher Eigenzustand angenommen wird, ist nicht a priori festgelegt. Durch die Dynamik des Systems wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorgegeben, welche das Annehmen der jeweiligen Eigenzustände kontrolliert. Dies erklärt, daß es Observable gibt (bei geeigneten Voraussetzungen), die nur einen diskreten Wertevorrat haben. In dieser Weise werden beim freien Teilchen die Ortsvariablen q_i durch die Ortsoperatoren \hat{q}_i und die Impulsvariablen p_i durch die Impulsoperatoren \hat{p}_i ersetzt.

Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt, daß \hat{q}_i und \hat{p}_i (für festes i) nicht gleichzeitig genau gemessen werden können. Dies bedeutet aber, daß diese Operatoren nicht dieselben Vektoren aus \mathbf{H} als Eigenvektoren haben können. So wird bei der Messung von \hat{q}_i bei Messung eines festen Werts, das System in einen Eigenzustand von \hat{q}_i gebracht. Nehmen wir an, daß beide Operatoren dieselben Eigenvektoren haben, so befindet sich das System bereits in einem Eigenzustand der \hat{p}_i -Messung. Kein Zustandswechsel ist notwendig. Somit erhalten wir zu einem festen \hat{q}_i -Wert immer denselben \hat{p}_i -Wert. Dies ist aber im Widerspruch zur Unschärferelation, denn nur durch einen statistischen Zustandswechsel "verschmiert" der Meßwert der \hat{p}_i -Messung. Wir müssen die Annahme fallen lassen. Da jedoch kommutierende Operatoren dieselben Eigenvektoren haben, kommutieren \hat{q}_i und \hat{p}_i nicht:

$$\hat{q}_i \cdot \hat{p}_i \neq \hat{p}_i \cdot \hat{q}_i .$$

War die Algebra der klassischen Observablen die Funktionenalgebra $C^\infty(M)$, so muß diese durch eine nichtkommutative Algebra ersetzt werden. Oder, in dualer Sprechweise, die Phasenmannigfaltigkeit ist durch eine "nichtkommutative Mannigfaltigkeit" zu ersetzen. Diese Ersetzung ist nicht vollkommen willkürlich. Die klassische Mechanik liefert eine hinreichend genaue Beschreibung der Welt im makroskopischen Maßstab. Erst wenn wir Systeme bei immer kleineren (z.B. atomaren) Maßstäben beschreiben, dürfen wir die Quanteneffekte nicht mehr vernachlässigen. In diesem Sinne soll die nichtkommutative Algebra der quantenmechanischen Observablen eine "Deformation der klassischen Algebra" sein.

Um diesen Übergang zu erreichen, gibt es mehrere verschiedene Konzepte. Der von den Physikern am meisten verwendete Zugang (und auch erfolgreichste im Hinblick auf konkrete Berechnungen) ist die *kanonische Quantisierung*. Hierzu suche man geeignete kanonische Ortsvariablen q_i und zugehörige Impulsvariablen p_i . Sodann ersetze man q_i und p_i durch Operatoren \hat{q}_i und \hat{p}_i die auf einem (nicht näher spezifizierten) Hilbert-Raum operieren. Für die Operatoren postuliert man

$$\hat{1} = id, \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \widehat{\{q_i, p_j\}} = i\hbar \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2-10)$$

Die Größe \hbar ist die *Planksche Konstante*. Sie “gibt” an, ab welchem Maßstab Quanteneffekte eine Rolle spielen. Insbesondere soll sich das klassische Bild im Limes $\hbar \rightarrow 0$ ergeben. Diese Forderung heißt *Korrespondenzprinzip*. Man beachte, daß $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$ gilt. Die Vorgabe (2-10) erhält man somit durch die formale Vorschrift “gehe über zu den Operatoren und ersetze die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ der klassischen Observablen A und B durch den Kommutator $\frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]$ der zugeordneten Quantenobservablen”. Dies ist die Quantisierungsphilosophie, wie sie von Dirac [64] entwickelt wurde. Mit diesem Rezept erhalten wir für die Dynamik aus (2-7) nun

$$\frac{d}{dt}\hat{A} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]. \quad (2-11)$$

Nimmt man im Fall $M = T^*\mathbb{R}^n$ als Hilbert-Raum $\mathbf{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ und definiert

$$\hat{q}_i(f) = q_i \cdot f, \quad \hat{p}_i(f) = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (2-12)$$

so erhält man eine konkrete Darstellung der Relationen (2-10). Mehr über diese Methode findet man in jedem Physiklehrbuch zur Quantenmechanik, siehe etwa [178].

Trotz seiner großen Erfolge ist diese Methode mathematisch nicht vollständig befriedigend: Sie ähnelt mehr einem ad-hoc Rezept, gibt keinen Hinweis auf Natürlichkeit, Eindeutigkeit, etc. . Es gibt andere, konzeptionellere, Methoden (zumindestens finde ich dies) von denen ich im folgenden einige behandeln werden. Leider ist in diesen Theorien das konkrete “Ausrechnen von Werten”, das die Physiker natürlich brauchen, meist deutlich komplizierter. Vorher soll noch definiert werden, was man unter einer vollen Quantisierung für $M = T^*\mathbb{R}^n$ versteht.

Definition 2.1. Eine *volle Quantisierung* ist eine (meist als treu vorausgesetzte) Abbildung

$$Q : \mathcal{P}(M) \rightarrow \text{Selbstadj. Endom.}(\mathbf{H}),$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1) Q ist \mathbb{R} -linear.
- (2) $Q(\{f, g\}) = \frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)]$.
- (3) $Q(1) = id$.
- (4) $Q(p_i)$ und $Q(q_i)$ operieren irreduzibel.

Leider sagt das Groenewold-van Hove-Theorem, daß solch eine volle Quantisierung nicht existieren kann. Das Theorem von Stone-von Neumann sagt übrigens, daß solch eine Darstellung immer äquivalent zu einer wäre, in der (2-12) gilt. Für die Beweise und mehr Hintergrundinformation sei auf [1, p.434ff] verwiesen. Siehe auch [101] für eine generelle Behandlung der Obstruktionen.

Es gibt mehrere Methoden die theoretischen Hürden zu umgehen.

- (a) Man läßt die Irreduzibilität fallen.
- (b) Man quantisiert nur eine kleine Klasse von Funktionen.
- (c) Man schwächt die Bedingung (2) ab, indem man lediglich $[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\})$ bis auf "quadratische Terme in \hbar " fordert.

Die Strategie (c) besagt, daß man nur noch eine *approximative Operatordarstellung* anstrebt. Hier werden wir es vor allem mit ihr und ihren Varianten zu tun haben.

Löst man sich ganz von den Operatoren und stellt die nichtkommutative Algebra der quantenmechanischen Observablen in den Vordergrund, so gibt es das Konzept der *Deformationsquantisierung* oder *Sternproduktquantisierung*. In dieser Theorie wird eine systematische Deformationstheorie der Poisson-Algebra der Funktionen auf M betrieben. Auch hier hat man eine Abhängigkeit von einem (meist als formal angenommenen) Parameter \hbar . Die Terme 0. Ordnung in \hbar geben die kommutative Funktionenalgebra wieder, Terme 1. Ordnung in \hbar die Poisson-Klammer. Mehr darüber in Abschnitt 3.

Bei der *geometrischen Quantisierung* handelt es sich um eine Operatorquantisierung. Im Gegensatz zur kanonischen Quantisierung, bei der man einfach sagt, man ersetze die Funktion f durch den selbstadjungierten Operator \hat{f} auf einem Hilbert-Raum, nimmt man hier ein spezielles komplexes Geradenbündel über der

Phasenmannigfaltigkeit M und ersetzt die Funktion f , die klassische Observable, in einer geometrischen Art und Weise durch eine modifizierte kovariante Ableitung in Richtung des Hamiltonschen Vektorfeldes X_f im Raum der Schnitte des Geradenbündels. Hierbei ist der Übergang sehr stark geometrisch motiviert. Die Geometrie wird “erzeugt” durch die klassische Mechanik, welche zu quantisieren ist. Im allgemeinen werden die dabei erhaltenen Darstellungen nicht irreduzibel sein. Durch Wahl einer *Polarisierung* erhält man zwar Irreduzibilität, jedoch nur eine approximative Operatordarstellung. Details hierzu in Abschnitt 4.

Falls man es mit komplexen Phasenmannigfaltigkeiten zu tun hat, kann man auch die, mit der geometrischen Quantisierung verwandte, *Berezin-Toeplitz-Quantisierung* und die *Berezin-Quantisierung mit Hilfe kohärenter Zustände* betrachten. Die Berezin-Toeplitz-Quantisierung ist das zentrale Thema dieses Teiles der Arbeit. Sie wird im Abschnitt 5 eingeführt. Im wesentlichen verwendet man statt des Operators der geometrischen Quantisierung den Operator, den man erhält, indem man die Schnitte mit der Funktion f multipliziert und anschließend auf die holomorphen Schnitte des (nun holomorph zu wählenden) Geradenbündels projiziert. Bei der Quantisierung durch kohärente Zustände berechnet man mit deren Hilfe zu den Operatoren auf dem Schnittraum die kovarianten Symbole. Diese sind Funktionen auf der Phasenmannigfaltigkeit. Diese werden dadurch quantisiert. Mehr darüber in Abschnitt 5 (d). In beiden Fällen handelt es sich um eine approximative Operatorquantisierung.

Es gibt noch einen weiteren Zugang der Physiker zur Quantisierung, die *Pfadintegralmethode* von Feynman. Diese Methode paßt konzeptionell nicht direkt in den hier behandelten Bereich. Grob gesprochen stellt man bei ihr die Erwartungswerte der Observablen in den Vordergrund. Um von einem fixierten Anfangszustand in einen fixierten Endzustand zu kommen, beschreibt die klassische Dynamik, die durch das Lagrange-Funktional⁴ gegeben wird, einen eindeutig bestimmten Weg, den Weg extremaler (minimaler) Energie. In der Quantisierung via Pfadintegral werden alle Wege realisiert. Die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Weg hängt ab von der aufzuwendenden Energie. Damit wird der Raum aller Wege mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß versehen. Physikalische Observable ordnen nun jedem Weg eine

⁴Das Lagrange-Funktional wird durch die Legendre-Transformation aus der Hamilton-Funktion H erhalten.

gewisse Größe zu. Beobachtet wird der Erwartungswert über den ganzen Wegeraum. So konzeptionell interessant (zumindestens für mich) dieser Zugang ist, so leidet er notorisch daran, daß die oben eingeführten Begriffe Wegeraum, Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Wegeraum, etc. in dieser Allgemeinheit nicht wohldefiniert sind. Oft handelt es sich hierbei lediglich um (sehr nützliche) heuristische Konzepte. Es gibt viele Arbeiten, die sich mit der rigorosen Fundierung dieser Methode beschäftigen. Leider besitze ich darüber keinen Überblick. Hier möchte ich lediglich auf die aktuellen Ergebnisse von Cartier und deWitt-Morette [49] verweisen.

3. Deformationsquantisierung und Sternprodukte

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{C})$ die Poisson-Algebra der beliebig oft differenzierbaren \mathbb{C} -wertigen Funktionen. Mit $\mathcal{A} = C^\infty(M)[[\hbar]]$ sei der Vektorraum der formalen Potenzreihen in der Variablen \hbar bezeichnet.

Definition 3.1. \mathcal{A} heißt (*formales*) Sternprodukt oder *Deformationsquantisierung* für (M, ω) falls gilt:

- (1) \mathcal{A} besitzt eine Multiplikation \star , welche eine assoziative Ringstruktur definiert.
- (2) \mathcal{A} ist eine $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -Algebra, insbesondere ist $\mathbb{C}[[\hbar]]$ zentral und es gilt $\hbar^i \star \hbar^j = \hbar^{i+j}$.
- (3) $\mathcal{A}/\hbar\mathcal{A} \cong C^\infty(M)$ (als Ring), d.h. für $f, g \in C^\infty(M)$ gilt

$$f \star g \bmod (\hbar) = f \cdot g . \quad (3-1)$$

- (4) Für $f, g \in C^\infty(M)$ gilt

$$\frac{1}{\hbar}(f \star g - g \star f) \bmod (\hbar) = -i \{f, g\} . \quad (3-2)$$

Sternprodukte wurden von Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz und Sternheimer 1978 eingeführt [9]. Für gewisse Kähler-Mannigfaltigkeiten (beschränkte symmetrische Gebiete in \mathbb{C}^n) wurden entsprechende Strukturen bereits im Jahre 1974 von Berezin in [12] behandelt. Die Bedingungen (3) und (4) entsprechen dem Korrespondenzprinzip.

Schreibt man

$$f \star g = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k C_k(f, g) , \quad \text{mit } C_k(f, g) \in C^\infty(M), \quad (3-3)$$

so sind die $C_k \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(C^\infty(M) \otimes C^\infty(M), C^\infty(M))$ d.h. bilineare Abbildungen. Die Bedingung (3) aus Def. 3.1 besagt

$$f \star g \bmod (\hbar) = f \cdot g = C_0(f, g) = C_0(g, f) \quad (3-4)$$

und die Bedingung (4)

$$\frac{1}{\hbar}(f \star g - g \star f) \bmod (\hbar) = C_1(f, g) - C_1(g, f) = -i \{f, g\} . \quad (3-5)$$

Manchmal fordert man noch, daß die Abbildungen $C_k(f, g)$ weitere Bedingungen erfüllen. Wie etwa

(5) Die 1-Funktion in $C^\infty(M)$ ist auch das Einselement in \mathcal{A} . D.h.

$$C_k(1, \cdot) = C_k(\cdot, 1) = 0 \quad \text{für } k \geq 1 . \quad (3-6)$$

(6) Die $C_k(\cdot, \cdot)$ sind Bidifferentialoperatoren (wobei manchmal noch gefordert wird, daß der Bigrad $\leq (k, k)$ ist).

(7) Es gilt die Paritätsbedingung

$$C_k(f, g) = (-1)^k \overline{C_k(g, f)} . \quad (3-7)$$

Im holomorphen Setting, das wir später betrachten, ist es sinnvoller statt (3-7) die Paritätsbedingung

$$\overline{C_k(f, g)} = C_k(\bar{g}, \bar{f}) \quad (3-7')$$

zu betrachten (siehe hierzu auch [29]). In diesem Fall gilt $\overline{f \star g} = \bar{g} \star \bar{f}$.

Definition 3.2. Zwei Sternprodukte \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 für (M, ω) heißen *äquivalent*, falls es einen $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -Algebrenisomorphismus ϕ zwischen beiden gibt, welcher die Identität auf $\mathcal{A}_1/\hbar\mathcal{A}_1 \cong C^\infty(M) \cong \mathcal{A}_2/\hbar\mathcal{A}_2$ induziert.

In Bezug auf die Zerlegung nach \hbar -Potenzen kann ϕ aufgrund der Linearität auch beschrieben werden durch

$$\phi(f) = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r D_r(f), \quad D_0(f) = f, \quad \text{für } f \in C^\infty(M) , \quad (3-8)$$

mit passenden $D_r \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(C^\infty(M), C^\infty(M))$, die gewisse Vertauschungsrelationen mit den bilinearen Abbildungen C_k erfüllen.

Der Faktor i in (3-2) ist nicht von Bedeutung. Er kann in die formale Variable \hbar "aufgenommen" werden. Deshalb findet man auch bei manchen Autoren die Faktoren 1 , -1 oder i .

Beispiel 3.3. *Weyl-Quantisierung und Moyal-Sternprodukt* auf $M = T^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (nach [50]). Tatsächlich wurde die Deformationsquantisierung bereits viel früher implizit studiert. Von Weyl [209] stammt der folgende Vorschlag zur Quantisierung. Ausgehend von der Darstellung der Operatoren \hat{q} und \hat{p} , wie sie in (2-12) gegeben ist, wird für eine geeignete Teilmenge der $f \in C^\infty(M)$ der zugeordnete Operator wie folgt konstruiert. Zuerst sei

$$\tilde{f}(\xi, \eta) := \frac{1}{(2\pi)^2} \iint f(q, p) \exp(-i(\xi q + \eta p)) dq dp$$

die Fourier-Transformierte zu f . Der zugeordnete Operator ist (zumindestens formal) definiert als

$$\hat{f} = \iint \tilde{f}(\xi, \eta) \exp(i(\xi \hat{q} + \eta \hat{p})) d\xi d\eta .$$

Definiert man $\phi : f \rightarrow \phi(f) := \hat{f}$, so kann man zeigen, daß ϕ wohldefiniert und injektiv ist auf dem Raum der Funktionen, welche bei ∞ höchstens polynomiales Wachstum in allen Ableitungen haben. Für diese Funktionen ist der Operator \hat{f} ein dicht definierter, unbeschränkter Operator. Von Moyal [159] wurde die Frage untersucht, welche Struktur dadurch auf $C^\infty(M)$ induziert wird: $\phi(?) = \phi(f) \cdot \phi(g)$. Ausgehend von der Relation

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar id$$

erhält man mit der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel für $A, B \in \langle \hat{q}, \hat{p}, id \rangle$ (alle 3-er Produkte verschwinden)

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right),$$

nach Multiplikation der Operatoren, welche im Produkt $\phi(f) \cdot \phi(g)$ auftreten, eine Abhängigkeit vom Parameter \hbar . Sehen wir diesen Parameter als formale Unbestimmte an, so kann man $f \star g$ definieren als die Potenzreihe in \hbar , die die Vorgabe $\phi(f \star g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$ erfüllt. Moyal berechnete konkret diese Potenzreihe. Diese läßt sich mit folgender nützlicher Notation explizit niederschreiben. Sei $P(f, g) := \{f, g\}$, so können wir P als Bidifferentialoperator vom Bigrad $(1, 1)$ auffassen. Beliebige Potenzen von P sind in folgender Weise definiert:

$$P^0(f, g) = fg, \quad P^n(f, g) = \left(\frac{\partial_1}{\partial q} \frac{\partial_2}{\partial p} - \frac{\partial_1}{\partial p} \frac{\partial_2}{\partial q} \right)^n (f, g) . \quad (3-9)$$

Hierbei bedeutet ∂_1 (bzw. ∂_2), daß der Ableitungsoperator auf die 1. (bzw. die 2.) Funktion im Argument wirken soll. In expliziter Form ergibt sich

$$P^n(f, g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{\partial^n f}{\partial q^k \partial p^{n-k}} \frac{\partial^n g}{\partial q^{n-k} \partial p^k} . \quad (3-10)$$

Mit Hilfe diese Notation berechnet Moyal

$$f \star g = \exp\left(\frac{i\hbar}{2}P\right)(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n P^n(f, g) . \quad (3-11)$$

Man rechnet nun leicht nach, daß dadurch in der Tat ein Sternprodukt definiert ist (mit Vorfaktor $+i$). Es erfüllt die zusätzlichen Bedingungen (5) bis (7), da $P^n(g, f) = (-1)^n P^n(f, g)$ gilt. Die *Moyal-Klammer* ist definiert als der reskalierte Kommutator

$$\{f, g\}_\star = \frac{1}{\hbar}(f \star g - g \star f)$$

und berechnet sich zu

$$\{f, g\}_\star = \frac{2}{\hbar} \sinh\left(\frac{i\hbar}{2}P\right)(f, g) = \frac{2i}{\hbar} \sin\left(\frac{\hbar}{2}P\right)(f, g) . \quad (3-12)$$

□

Beispiel 3.4. Das *Wick-Produkt* auf \mathbb{C}^n . Auf \mathbb{C}^n ist durch

$\omega = i \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$ eine symplektische Form gegeben. Die dadurch definierte Poisson-Klammer berechnet sich als (siehe auch (4-17))

$$\{f, g\} = i \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i} \right) .$$

Ein Sternprodukt ist gegeben durch

$$f \star g = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{|i|=r} \frac{1}{r!} (-1)^r \hbar^r \frac{\partial^r f}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2} \dots \partial z_{i_r}} \cdot \frac{\partial^r g}{\partial \bar{z}_{i_1} \partial \bar{z}_{i_2} \dots \partial \bar{z}_{i_r}} . \quad (3-13)$$

Mit Hilfe des Operators $Q = \sum_{i=1}^n \frac{\partial_1}{\partial z_i} \frac{\partial_2}{\partial \bar{z}_i}$ und den entsprechenden Definitionen für Q^r gilt

$$f \star g = \exp(-\hbar Q)(f, g) .$$

Dieses Sternprodukt erfüllt die Paritätsbedingung (3-7'). \square

Ein Sternprodukt für (M, ω) kann als nichtkommutative Deformation der Funktionalalgebra aufgefaßt werden. Es kann die Deformationstheorie, wie sie von Gerstenhaber [92] entwickelt wurde, angewendet werden. Die verlangte Assoziativität von \star erzwingt gewisse kohomologische Bedingungen für die bilinearen Abbildungen C_k . Wertet man diese bis zum Grad 1 in \hbar aus, so erhält man $\forall a, b, c \in C^\infty(M)$

$$a \cdot C_1(b, c) - C_1(a \cdot b, c) + C_1(a, b \cdot c) - C_1(a, b) \cdot c = 0 .$$

Dies besagt gerade, daß C_1 ein Hochschild-2-Kozykel für die Algebra $C^\infty(M)$ mit Werten im Bimodul $C^\infty(M)$ ist. Die *Hochschild-Kohomologie* ist wie folgt definiert. Sei A eine assoziative Algebra und M ein A -Bimodule, so werden auf den p -Koketten $C : A^p \rightarrow M$ die Randoperatoren

$$\begin{aligned} \delta_p C(f_0, f_1, \dots, f_p) &:= f_0 \cdot C(f_1, f_2, \dots, f_p) - C(f_0 \cdot f_1, f_2, \dots, f_p) + \dots \\ &+ (-1)^p C(f_0, \dots, f_{p-1} \cdot f_p) + (-1)^{p+1} C(f_0, \dots, f_{p-1}) \cdot f_p \end{aligned} \quad (3-14)$$

eingeführt. Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes sind die Hochschild-Kohomologiegruppen [54],[55]. Seien \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 zwei Sternprodukte mit den bilinearen Abbildungen $C_k^{(1)}(f, g)$, bzw. $C_k^{(2)}(f, g)$ und sei ϕ eine Äquivalenz gegeben durch die linearen Abbildungen D_i aus (3-8), so berechnet sich für den linearen Anteil in \hbar

$$f \cdot D_1(g) + D_1(f) \cdot g - D_1(f \cdot g) = C_1^{(1)}(f, g) - C_1^{(2)}(f, g) = \delta_1 D_1(f, g) .$$

Dies bedeutet, die Hochschild-2-Kozykel $C_1^{(1)}$ und $C_1^{(2)}$ sind kohomolog. Für $k > 1$ sind die C_k nicht notwendigerweise 2-Kozykel. Die Assoziativität und die Äquivalenz ist ein Problem das innerhalb der Hochschild-3-Kohomologie, bzw. der Hochschild-2-Kohomologie formuliert werden kann [55]. Wir schreiben die Differenz

$$f \star (g \star h) - (f \star g) \star h = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k E_k$$

mit

$$E_k := \sum_{j+l=k} C_j(C_l(f, g), h) - \sum_{j+l=k} C_j(f, C_l(g, h)) .$$

Die Assoziativität ist äquivalent zum Verschwinden aller E_k . Der 2-Korandoperator auf C_k angewendet ergibt (mit $C_0(r, t) = rt$)

$$\delta_2 C_k(f, g, h) = C_0(f, C_k(g, h)) - C_k(C_0(f, g), h) + C_k(f, C_0(g, h)) - C_0(C_k(f, g), h) .$$

Wir können also E_k ausdrücken als

$$E_k = F_k - \delta_2 C_k$$

mit

$$F_k := \sum_{\substack{j+l=k \\ j, l > 0}} (C_j(C_l(f, g), h) - C_j(f, C_l(g, h))) .$$

Aus $E_k = 0$ folgt, daß F_k ein Korand ist. Insbesondere muß F_k (welches nur von C_j mit $j < k$ abhängt) ein 3-Kozykel sein. Beachte, daß für $k = 1$ $F_1 = 0$ ist und somit die Bedingung lautet, daß C_1 ein 2-Kozykel ist, wie bereits oben gezeigt wurde.

Betrachtet man lediglich den reskalierten Sternkommutator

$$[f, g]_\star = \frac{1}{\hbar}(f \star g - g \star f) = -i \{f, g\} + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k (C_{k+1}(f, g) - C_{k+1}(g, f)), \quad (3-15)$$

so erhält man wiederum eine Lie-Algebra, welche als zugeordnete Kommutatoralgebra zu einer assoziativen Algebra sogar eine Poisson-Algebra ist, d.h. es gilt

$$[f \star g, h]_\star = f \star [g, h]_\star + [f, h]_\star \star g .$$

Diese Algebra ist eine Deformation der Lie-Algebra $(C^\infty(M), \{.,.\})$. Setzt man $\mu_k(f, g) := C_k(f, g) - C_k(g, f)$, so erzwingt die Jacobi-Identität für $(\mathcal{A}, [.,.]_\star)$

$$\begin{aligned} \{\mu_2(f, g), h\} + \{\mu_2(g, h), f\} + \{\mu_2(h, f), g\} \\ + \mu_2(\{f, g\}, h) + \mu_2(\{g, h\}, f) + \mu_2(\{h, f\}, g) = 0 . \end{aligned}$$

Dies ist aber genau die Bedingung, daß μ_2 ein 2-Kozykel der Lie-Algebrenkohomologie $H_{Lie}^2(C^\infty(M), C^\infty(M))$ ist. (Zur Definition der Lie-Algebrenkohomologie siehe die Formel (10-2) oder auch [114].) Äquivalente Kozykel sind wiederum kohomolog. Für den Fall, daß unsere Sternprodukte die Bedingung (5) erfüllen und die C_k

Bidifferentialoperatoren sind, handelt es sich um differenzierbare Kozykel. Diese Kohomologiegruppen sind endlichdimensional und es gilt

$$\dim H_{Lie,diff}^2(C^\infty(M), C^\infty(M)) = 1 + b_2(M), \quad \text{wobei } b_2 = \dim H^2(M, \mathbb{C})$$

die zweite Betti-Zahl ist (siehe Vey [205] und Gutt [110], [111]). Man beachte allerdings, daß es nicht klar ist, ob jede infinitesimale Deformation (d.h. eine Deformation, die bis zum linearen Glied in \hbar definiert ist) tatsächlich zu jedem Level von \hbar geliftet werden kann. Wie von Vey [205] gezeigt, liegt die Obstruktion zur Liftung im Raum $H^3(M, \mathbb{C})$ [205]. D.h. bei symplektischen Mannigfaltigkeiten mit verschwindender 3. Betti-Zahl b_3 kann jede infinitesimale Deformation geliftet werden. Von Neroslavskii und Vlassov [161] und Lichnerowicz [152] wurde damit die Existenz von Sternprodukten für Mannigfaltigkeiten mit $b_3(M) = 0$ gezeigt.

Es gilt jedoch der Satz

Theorem 3.5. *[De Wilde-Lecomte, Fedosov, Omori-Maeda-Yoshioka, ...]*
Jede symplektische Mannigfaltigkeit besitzt mindestens ein Sternprodukt.

Dieser Satz wurde mit Hilfe kohomologischer Methoden von de Wilde und Lecomte [60] bewiesen. Insbesondere erweist sich die Bedingung $b_3 = 0$ als nicht notwendig. Existenzbeweise mehr geometrischer Natur wurden etwa von Omori, Maeda und Yoshioka [164],[165] und von Karasev und Maslow [132] geführt. Ein konzeptioneller geometrischer Beweis wurde von Fedosov [75],[76] gegeben. Mehr Hintergrundinformationen und mehr Literaturhinweise können im Übersichtsartikel von Flato und Sternheimer [84] und im Bourbaki exposé 789 von Weinstein [207] gefunden werden. Letzterer befaßt sich auch im Detail mit der Beweismethode von Fedosov.

Es sei hier noch erwähnt, daß neben dem formalen Sternprodukt auch Sternprodukte behandelt werden, für die man, grob gesprochen, Konvergenz der Potenzreihe $f \star g$ fordert. Es handelt sich hierbei um die *strikte Deformationsquantisierung*, wie sie etwa von Rieffel [175] eingeführt wurde.

Um konkrete Werte auszurechnen kann man, falls man ein Sternprodukt hat, zuerst eine geeignete Operatorarstellung (d.h. eine “approximative Operatorarstellung”) suchen und dann die übliche Eigenwerttheorie betreiben. Siehe hierzu [77], [131]. Tatsächlich ist es aber auch möglich, wie in [9] gezeigt (siehe auch [85]),

dies direkt innerhalb der Sternalgebra auszuführen. Zuerst wird die Dynamik mit Hilfe der Hamilton-Funktion H beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}f_t = i[f_t, H]_\star . \quad (3-16)$$

Diese erhält man durch das Ersetzen der Poisson-Klammer in (2-7) durch den (reskalierten) Sternkommutator. Für eine Funktion f ist die Sternpotenz $(\star f)^n$ definiert als

$$(\star f)^n := \underbrace{f \star f \cdot \star f}_{n\text{-mal}} .$$

Damit definiert man die Sternexponentialfunktion als

$$\exp_\star\left(\frac{itH}{\hbar}\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{it}{\hbar}\right)^n (\star H)^n . \quad (3-17)$$

Die Lösung von (3-16) kann formal als

$$f_t = \exp_\star\left(\frac{itH}{\hbar}\right) \star f \star \exp_\star\left(\frac{-itH}{\hbar}\right) \quad (3-18)$$

gegeben werden (siehe [65]). Unter geeigneten Konvergenzvoraussetzungen kann man schreiben ($x \in M$ fest)

$$\exp_\star\left(\frac{itH}{\hbar}\right)(x) = \int \exp(\lambda it\hbar) d\mu(x; \lambda) .$$

Hierbei entspricht das Maß μ der “Fourier-Transformierten” (im Distributionensinne) der Sternexponentialfunktion. Als *Spektrum* von H ist der Träger des Maßes μ definiert. In [85] und [9] wird gezeigt, daß man mit dieser Definition sinnvoll arbeiten kann.

Der “Nachteil” des Beweises von Theorem 3.5 von DeWilde und Lecomte ist, daß das Argument ein reiner Existenzbeweis formaler kohomologischer Natur ist. Fedosovs Beweis ist zwar geometrischer aber sehr abstrakter Natur, so daß der Übergang klassische Mechanik zur Quantenmechanik in beiden Fällen für konkrete Systeme sehr schwierig ist. Deshalb haben die Untersuchungen, welche sich mit konkreten, geometrisch induzierten Konstruktionen von Sternprodukten befassen, durchaus ihre Bedeutung. Eine unvollständige Auswahl (für die Quantisierung auf

komplexen Mannigfaltigkeiten) ist etwa durch die folgenden Arbeiten gegeben. Ein Weg Sternprodukte zu erhalten, benützt Berezins kohärente Zustände und kovariante Symbole. Auf die Untersuchungen von Berezin für beschränkte Hermiteische Gebiete aufbauend, wurde von Moreno und Ortega-Navarro [157],[156],[158] Sternprodukte auf S^2 , auf der offenen Einheitskreisscheibe und einigen weiteren nichtkompakten Hermiteschen Räume konstruiert. Entsprechende Konstruktionen wurden auch von Cahen und Gutt [42] ausgeführt. Dieser Zugang wurde später systematisch ausgebaut durch Cahen, Gutt und Rawnsley in einer Serie von Artikeln [44],[45],[46],[47]. Ausgehend von dem Wick-Produkt auf \mathbb{C}^{n+1} , bzw. einer geeigneten Modifikation davon, wurde mit Hilfe einer Phasenraumreduktion durch Bordemann, Brischle, Emmerich und Waldmann [25],[26] auf \mathbb{P}^n ein Sternprodukt konstruiert. Für eine konkretere Beschreibung des Fedosov-Sternproduktes vom Wick-Typ siehe Bordemann und Waldmann [29]. Siehe auch bei Bordemann, Meinrenken und Römer [28] wie die Totalraumquantisierung des Quantenbündels (zu seiner Definition siehe den Abschnitt 4) zum Erhalt eines Sternprodukts ausgenutzt werden kann. Von Pflaum [167],[168] wird ein Sternprodukt für die Unteralgebra der polynomialen Observablen auf dem Kotangentenbündels konstruiert. Hierbei handelt es sich sogar um eine strikte Deformationsquantisierung. D.h. die Potenzreihen für $f \star g$ konvergieren in einer geeigneten Weise. Für eine weitere Konstruktion siehe auch Karasev [130].

Allen diesen Konstruktionen ist es gemeinsam, daß sie nur auf einer sehr eingeschränkten Klasse von Kähler-Mannigfaltigkeiten funktionieren. Im Abschnitt 7 werde ich, als ein Resultat gemeinsamer Arbeiten mit E. Meinrenken und M. Bordemann, zeigen, daß mit Hilfe der Berezin-Toeplitz-Quantisierung, die im Abschnitt 5 und 6 dargestellt wird, auf beliebigen kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten ein Sternprodukt erhalten werden kann. Von Coburn und Xia [53] wird für den \mathbb{C}^n ebenfalls die Berezin-Toeplitz-Quantisierung benutzt um ein Sternprodukt zu erhalten. In einem kürzlich erschienenen Artikel von Guillemin [106] skizziert er wie man durch den Symbolkalkül der, von ihm zusammen mit Boutet de Monvel eingeführten, verallgemeinerten Toeplitz-Operatoren ein Sternprodukt erhalten kann.

Ein anderer Zugang zur “nichtkommutativen Geometrie” geht über die Theorie der Quantengruppen (siehe etwa [50]). In der Tat besteht ein direkter Zusammenhang. Hierzu möchte ich aber lediglich auf [84], [85] und [18] verweisen. Siehe auch Rădulescu für den Fall der Einheitskreisscheibe [171].

4. Geometrische Quantisierung

Das Schema der geometrischen Quantisierung wurde unabhängig voneinander durch Kostant [144] und Souriau [189] eingeführt. Es gibt der Zuordnung eines nichtkommutativen Operators zu einer kommutativen Funktion eine geometrische Bedeutung. Hier möchte ich lediglich die Grundzüge der Konstruktion darstellen soweit sie in den folgenden Abschnitten gebraucht wird. Eine geschlossene Darstellung findet man etwa in den Büchern von Woodhouse [213] oder Śniatycki [188], siehe auch [A].

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Wegen der Nichtausgeartetheit der symplektischen Form ω ist notwendigerweise M von (reeller) gerader Dimension $2n$ und orientierbar. Die normalisierte symplektische Volumenform ist gegeben als

$$\Omega := (-1)^{\binom{n}{2}} \frac{1}{n!} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n \text{ mal}} . \quad (4-1)$$

Für uns wird im folgenden (M, ω) eine Kähler-Mannigfaltigkeit sein. D.h. M ist eine komplexe Mannigfaltigkeit der (komplexen) Dimension n . Die *Kähler-Form* ω ist eine nichtausgeartete, positive, geschlossene $(1, 1)$ -Differentialform. Dies bedeutet, daß ω in lokalen holomorphen Koordinaten z_j , $j = 1, \dots, n$ beschrieben werden kann als

$$\omega = i \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(z) dz_i \wedge d\bar{z}_j, \quad g_{ij} \in C^\infty(M, \mathbb{C}) . \quad (4-2)$$

Hierbei ist (g_{ij}) eine positivdefinite Hermitesche Matrix¹ und es gilt $d\omega = 0$.² Auf dem reellen $2n$ -dimensionalen Tangentialbündel T^*M ist eine komplexe Struktur $I \in \text{End}(T^*M)$ gegeben. Sei $a \in M$ fixiert und seien die z_j wie oben lokale holomorphe Koordinaten. Zerlegen wir $z_j = x_j + iy_j$ für $j = 1, \dots, n$, so sind die partiellen

¹Physiker verwenden meist die Notation $(g_{i\bar{j}})$.

²Für mehr Information siehe [141] und [208].

Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}$ für $j = 1, \dots, n$ eine lokale Basis des Tangentialbündels. In Bezug auf diese Basis ist die komplexe Struktur $I = (I_a)_{a \in M}$ gegeben durch

$$I_a \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad I_a \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4-3)$$

Es sei daran erinnert, daß $I^2 = -id$ gilt. Das komplexifizierte Tangentialbündel wird durch $\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ für $j = 1, \dots, n$ aufgespannt. Für die komplexe Fortsetzung von I findet man, unter Beachtung von $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$,

$$I_a \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right) = i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad I_a \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) = -i \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4-4)$$

Mit Hilfe der komplexen Struktur I erhält man die Beziehung zwischen Kähler-Form³ ω und Kähler-Metrik g für Vektorfelder X und Y auf M

$$\omega(X, Y) = g(IX, Y), \quad g(X, Y) = \omega(X, IY). \quad (4-5)$$

In obigen Koordinaten wird g gegeben als

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(z) (dz_i \otimes d\bar{z}_j + d\bar{z}_j \otimes dz_i). \quad (4-6)$$

Sowohl ω als auch g sind invariant unter der komplexen Struktur

$$\omega(IX, IY) = \omega(X, Y), \quad g(IX, IY) = g(X, Y). \quad (4-7)$$

Insbesondere können wir (M, ω) , wenn wir die komplexe Struktur vergessen, als symplektische Mannigfaltigkeit mit der symplektischen Form ω auffassen.

Beispiele 4.1. Die folgenden Beispiele werden uns später noch interessieren.

(1) Der flache komplexe Raum \mathbb{C}^n mit der Form

$$\omega = i \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j. \quad (4-8)$$

³Aus der Fülle verschiedener Normierungen verwende ich für das äußere Produkt diejenige, für welche das äußere Produkt zweier 1-Formen α, β definiert ist als $\alpha \wedge \beta(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$.

- (2) Die projektive Gerade \mathbb{P}^1 (die Riemannsche Zahlenkugel S^2) mit quasi-globaler Koordinate z und Kähler-Form

$$\omega = \frac{i}{(1 + z\bar{z})^2} dz \wedge d\bar{z} . \quad (4-9)$$

- (3) Der komplex-projektive Raum \mathbb{P}^n mit der Fubini-Study-Form

$$\omega_{FS} := i \frac{(1 + |w|^2) \sum_{i=1}^n dw_i \wedge d\bar{w}_i - \sum_{i,j=1}^n \bar{w}_i w_j dw_i \wedge d\bar{w}_j}{(1 + |w|^2)^2} . \quad (4-10)$$

Die Koordinaten w_j , $j = 1, \dots, n$ sind affine Koordinaten $w_j = z_j/z_0$ auf der affinen Karte $U_0 := \{(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \mid z_0 \neq 0\}$.

- (4) Die offene Einheitskreisscheibe $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ mit der Form

$$\omega = \frac{2i}{(1 - z\bar{z})^2} dz \wedge d\bar{z} . \quad (4-11)$$

Zur späteren Verwendung will ich die folgenden Formeln notieren:

Proposition 4.2. *Sei (M, ω) eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur I . Die Kähler-Form ω sei in Bezug auf lokale holomorphe Koordinaten gegeben wie in (4-2) mit der Matrix $G := (g_{ij})$. Sei (g^{ij}) die inverse Matrix G^{-1} . Desweiteren seien $f, g \in C^\infty(M)$. Dann gilt:*

- (1) *Der Gradient von f in Bezug auf die Metrik g berechnet sich zu*

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \left(Y^i \frac{\partial}{\partial z_i} + \hat{Y}^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right) \quad \text{mit } Y^i = \sum_{j=1}^n g^{ji} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}, \quad \hat{Y}^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial z_j} . \quad (4-12)$$

- (2) *Das Hamiltonsche Vektorfeld zu f berechnet sich als*

$$X_f = -I(\text{grad } f) , \quad (4-13)$$

bzw. in Komponenten

$$X_f = \sum_{i=1}^n \left(X_f^i \frac{\partial}{\partial z_i} + \hat{X}_f^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right), \quad X_f^i = -i \sum_{j=1}^n g^{ji} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}, \quad \hat{X}_f^i = i \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial z_j} . \quad (4-14)$$

(3) Die Poisson-Klammer ist gegeben durch

$$\{f, g\} = i \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i} \right). \quad (4-15)$$

(4) Für den Laplace-Operator auf den Funktionen gilt

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = 2 \sum_{i,j=1}^n g^{ji} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}. \quad (4-16)$$

Beweis. Ad (1). Per Definition gilt $g(\operatorname{grad} f, \cdot) = df(\cdot)$. Setzt man den Gradienten in Bezug auf die (komplexe) Standardbasis der Vektorfelder an, so ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = df\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right) = g(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial z_i}) = \sum_{j=1}^n g_{ij} \hat{Y}^j.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die \hat{Y}^j mit Koeffizientenmatrix G . Die Lösung wird somit durch Invertieren erhalten. Die entsprechende Überlegung gilt für die Komponenten Y^i .

Ad (2). Aufgrund der Definition des Hamiltonschen Vektorfeldes und der Relation (4-5) gilt $df(\cdot) = \omega(X_f, \cdot) = g(IX_f, \cdot)$. Somit gilt $\operatorname{grad} f = IX_f$. Aus $I^2 = -1$, folgt die Behauptung (4-13). Die genaue Form (4-14) ergibt sich durch Anwendung von $-I$ auf den Gradienten (4-12) unter Beachtung von (4-4).

Ad (3). Per Definition gilt

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = df(X_g) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \right) (X_g).$$

Benutzt man nun (4-14), so ergibt sich das Resultat.

Ad (4). Spezialisieren wir die allgemeine Form des Laplace-Operators (siehe etwa [1, p.152]) in unseren lokalen komplexen Koordinaten, so erhalten wir mit $g = \det G$

$$\Delta f = \frac{1}{g} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} (g \cdot g^{ji} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} (g \cdot g^{ij} \frac{\partial f}{\partial z_j}) \right).$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Matrix der Metrikkoeffizienten die Struktur $\begin{pmatrix} 0 & G \\ {}^t G & 0 \end{pmatrix}$ hat. Führen wir die Differentiation aus, ergibt sich

$$\Delta f = 2 \sum_{i,j} g^{ji} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} + \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial g^{ji}}{\partial z_i} + \frac{1}{g} g^{ji} \frac{\partial g}{\partial z_i} \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} + \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial g^{ij}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{g} g^{ij} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i} \right) \frac{\partial f}{\partial z_j}.$$

Es ist zu zeigen, daß in der 2. und 3. Summe die inneren Summen verschwinden. Sei t irgendeine der Variablen z_i , bzw. \bar{z}_i festgewählt. Wir fassen G , G' und g als Funktion von t auf (' bezeichne $\frac{\partial}{\partial t}$). Dann gilt

$$\mathrm{Tr}(G' \cdot G^{-1}) = \frac{(\det G)'}{\det G} = \frac{g'}{g} .$$

Dies beweist man am einfachsten indem man die Matrix G diagonalisiert. Desweiteren folgt aus $G' \cdot G = 1$

$$(G^{-1})' = -G^{-1} \cdot G' \cdot G^{-1} .$$

Somit

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\frac{\partial g^{ji}}{\partial z_i} + \frac{1}{g} g^{ji} \frac{\partial g}{\partial z_i} \right) &= \sum_i \left(\sum_{k,l} -g^{jk} \frac{\partial g_{kl}}{\partial z_i} g^{li} + g^{ji} \sum_{r,s} \frac{\partial g_{rs}}{\partial z_i} g^{sr} \right) \\ &= \sum_{i,k,l} -g^{jk} \frac{\partial g_{kl}}{\partial z_i} g^{li} + \sum_{i,r,s} g^{ji} \frac{\partial g_{rs}}{\partial z_i} g^{sr} = \sum_{i,k,l} -g^{jk} \frac{\partial g_{kl}}{\partial z_i} g^{li} + \sum_{i,k,l} g^{jk} \frac{\partial g_{il}}{\partial z_k} g^{li} . \end{aligned}$$

Nun kommt die Kähler-Bedingung zum Zuge. Aus $d\omega = 0$ folgt

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial z_i} = \frac{\partial g_{il}}{\partial z_k} .$$

Somit verschwindet die obige Summe. Die analoge Überlegung kann auf die zweite Summe angewendet werden und liefert das Ergebnis. \square

Mit Prop. 4.2 kann man sofort angeben, wie die Poisson-Klammern im Fall der Beispiele 4.1 (1), (2) und (4) lauten.

Dies ist im Fall \mathbb{C}^n

$$\{f, g\} = i \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i} \right) , \quad (4-17)$$

für \mathbb{P}^1

$$\{f, g\} = i(1 + z\bar{z})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) \quad (4-18)$$

und für die Einheitskreisscheibe \mathcal{D}

$$\{f, g\} = \frac{i}{2}(1 - z\bar{z})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) . \quad (4-19)$$

Unmittelbar folgt auch

Proposition 4.3. *Seien ω und ω' zwei Kähler-Formen auf M mit $\omega' = \alpha\omega$ für $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$, dann gilt für die induzierten Hamiltonschen Vektorfelder, die Poisson-Klammern und die Laplace-Operatoren*

$$X'_f = \frac{1}{\alpha} X_f, \quad \{f, g\}' = \frac{1}{\alpha} \{f, g\}, \quad \Delta' = \frac{1}{\alpha} \Delta. \quad (4-20)$$

Im folgenden ist es ganz nützlich statt reellwertiger Funktionen komplexwertige C^∞ -Funktionen $C^\infty(M, \mathbb{C})$ zu betrachten. Ich werde im folgenden unter $C^\infty(M)$, bzw. $\mathcal{P}(M)$, falls nichts anderes gesagt wird, die Algebra der komplexwertigen Funktionen verstehen.

Wir benötigen desweiteren die Daten (L, h, ∇) . Hierbei ist L ein holomorphes Geradenbündel, h eine Hermitesche Metrik auf L (antilinear im 1. Argument und linear im 2. Argument) und ∇ ein Zusammenhang auf L , der sowohl mit der Metrik h als auch mit der komplexen Struktur verträglich ist.⁴ Die Verträglichkeitsbedingungen lauten:

- (1) Für Vektorfelder X und C^∞ -Schnitte s_1, s_2 des Bündels gilt

$$h(\nabla_X s_1, s_2) + h(s_1, \nabla_X s_2) = d(h(s_1, s_2))(X). \quad (4-21)$$

- (2) Für holomorphe Schnitte s und Vektorfelder X vom Typ $(0, 1)$

(d.h. $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$) gilt

$$\nabla_X s = 0. \quad (4-22)$$

Der Zusammenhang ∇ ist durch die Vorgabe von h und die Bedingungen (1) and (2) eindeutig fixiert. Seien holomorphe Koordinaten und ein holomorpher Rahmen des Bündels gewählt. Drückt man die Schnitte s lokal durch die Funktionen \hat{s} und die Metrik h durch die Funktion \hat{h} mit $h(s_1, s_2)(z) = h(z) \overline{\hat{s}_1} \hat{s}_2$ aus, so ist der Zusammenhang explizit gegeben durch

$$\nabla = \partial + (\partial \log \hat{h}) + \bar{\partial}. \quad (4-23)$$

⁴Ist M eine beliebige symplektische Mannigfaltigkeit, so ist L ein komplexes Geradenbündel, h eine Hermitesche Metrik auf L und ∇ ein mit der Metrik verträglicher Zusammenhang.

Hierbei sind ∂ und $\bar{\partial}$ die üblichen holomorphen, bzw. antiholomorphen Ableitungen

$$\partial f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i, \quad \bar{\partial} f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i .$$

Die Krümmungsform F zum Zusammenhang ∇ ist gegeben durch

$$F(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} . \quad (4-24)$$

In Bezug auf den holomorphen Rahmen berechnet sich die Krümmungsform als

$$F = \bar{\partial} \partial \log \hat{h} = -\partial \bar{\partial} \log \hat{h} . \quad (4-25)$$

Definition 4.4. Eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) heißt *quantisierbar*, falls es ein holomorphes Geradenbündel L mit Metrik h und (kompatiblen) Zusammenhang ∇ gibt derart, daß gilt

$$F(X, Y) = -i\omega(X, Y) . \quad (4-26)$$

Die Bedingung (4-26) heißt *Präquantenbedingung* und (L, h, ∇) *Quantenbündel*.⁵

Damit gilt

$$\omega = i\bar{\partial} \partial \log \hat{h} . \quad (4-27)$$

Nach [51] ist ω eine Kähler-Form genau dann, wenn es lokal reellwertige Funktionen K gibt mit $\omega = i\bar{\partial} \partial K$. Die Funktion K heißt *lokales Kähler-Potential*. Aus (4-27) folgt, daß in unserem Fall ein lokales Kähler-Potential durch

$$K(x) = -\log \hat{h}(z) . \quad (4-28)$$

bzw.

$$\hat{h}(z) = \exp(-K(z)) \quad (4-29)$$

gegeben ist.

Welche Bedeutung die Präquantenbedingung hat, werden wir weiter unten sehen. Zuerst möchte ich erörtern, warum für kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten

⁵In dieser Schrift wird die geometrische Quantisierung ohne metaplektische Korrektur [213] betrachtet, da hier vor allem das asymptotische Verhalten interessiert.

die Präquantenbedingung eine einschneidende Bedingung ist. Sie impliziert über den Zusammenhang der Chern-Form $c(L)$ des Geradenbündels mit seiner Krümmung die Relation

$$c(L) = \frac{i}{2\pi} F = \frac{\omega}{2\pi} . \quad (4-30)$$

Chern-Formen sind ganzzahlige Formen, d.h. bei Integration über Flächen ergeben sich ganzzahlige Werte [208]. Dies bedeutet aber, daß die Kähler-Form 2π -mal eine ganzzahlige Form sein muß, d.h. nur “diskrete Zustände” sind erlaubt. Dies ist eine Quantisierungsbedingung par excellence. Benutzt man umgekehrt, daß ω eine positive 2-Form ist, so erhält man, daß L ein positives Geradenbündel ist. Nach dem Kodairaschen Einbettungssatz kann M deshalb via holomorpher Schnitte einer geeigneten Tensorpotenz $L^{\otimes k}$ als nichtsinguläre Varietät in einen projektiven Raum eingebettet werden. Solche Mannigfaltigkeiten heißen projektive algebraische Mannigfaltigkeiten. Wir sind somit im Bereich der algebraischen Geometrie angelangt.

Feststellung 4.5. *Sei (M, ω) eine quantisierbare kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit, dann ist M eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit. Umgekehrt ist jede Untermannigfaltigkeit von \mathbb{P}^n eine quantisierbare Mannigfaltigkeit.*

Um die zweite Hälfte zu sehen ist zu beachten, daß der \mathbb{P}^n mit der Fubini-Study-Form (4-10) eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist. Das Hyperebenenbündel H mit der Standardmetrik, die vom tautologischen Bündel herkommt, ist ein zugehöriges Quantenbündel. Durch Einschränkung sowohl der Fubini-Study-Form, als auch des Hyperebenenbündels auf die Untermannigfaltigkeit M erhält man die Behauptung. Näheres hierzu werde ich im Abschnitt 5 ausführen.

Um die Operatoren einzuführen, betrachten wir den (unendlichdimensionalen) Raum $\Gamma_\infty(M, L)$ der beliebig oft differenzierbaren globalen Schnitte des Bündels L . Es sei $(\mathcal{P}(M), \omega)$ die Poisson-Algebra von M . Zu $f \in \mathcal{P}(M)$ sei das Hamiltonsche Vektorfeld X_f durch (2-2) zugeordnet.

Satz/Definition 4.6. *Die Abbildung*

$$P : (\mathcal{P}(M), \{, \cdot, \cdot\}) \rightarrow (\text{End}(\Gamma_\infty(M, L)), [\cdot, \cdot]), \quad f \mapsto P_f := -\nabla_{X_f} + i f \cdot id \quad (4-31)$$

ist ein Lie-Homomorphismus. Der Operator P_f heißt Präquantenoperator zur Funktion f , die Abbildung P Präquantenabbildung.

Es ist zu beachten, daß hier nicht die gesamte Struktur von $\mathcal{P}(M)$ als Poisson-Algebra betrachtet wird, sondern lediglich die Lie-Algebra gegeben durch die Poisson-Klammer. Auf $\text{End}(\Gamma_\infty(M, L))$ wird der üblichen Kommutator $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ benützt.

Beweis. Dies ist natürlich ein klassisches Resultat (siehe etwa [1, p.441]). Da jedoch genau an dieser Stelle die Quantisierungsbedingung (4-26) auftritt, möchte ich es hier zeigen. Die Linearität ist klar. Es genügt zu zeigen: $P_{\{f, g\}} = [P_f, P_g]$. Für die rechte Seite ergibt sich

$$[P_f, P_g] = [\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] - i[\nabla_{X_f}, g] - i[f, \nabla_{X_g}] .$$

Wegen der Derivationseigenschaft von ∇_{X_f} ergibt sich

$$[\nabla_{X_f}, g] = \nabla_{X_f} \cdot (g \cdot) - g \cdot \nabla_{X_f} = \nabla_{X_f}(g) = X_f(g) = dg(X_f) = \omega(X_g, X_f) .$$

Insgesamt also

$$[P_f, P_g] = [\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] + 2i\omega(X_f, X_g) .$$

Nun zur linken Seite. Aus der Definition $\{f, k\} = \omega(X_f, X_k) = -dk(X_f) = -X_f(k)$ folgt durch Einsetzen in die Jacobi-Identität $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ die Beziehung

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}} . \quad (4-32)$$

Somit

$$P_{\{f, g\}} = -\nabla_{X_{\{f, g\}}} + i\{f, g\} = \nabla_{[X_f, X_g]} + i\omega(X_f, X_g) .$$

Damit liegt Gleichheit genau dann vor wenn

$$[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] - \nabla_{[X_f, X_g]} = -i\omega(X_f, X_g)$$

gilt. Dies ist jedoch genau die Quantisierungsbedingung (4-26). \square

Oft findet man in der Literatur P_f definiert als

$$\check{P}_f = -i\nabla_{X_f} - f \cdot id .$$

Es gilt $P_f = -i\check{P}_f$. Daraus berechnet sich $[\check{P}_f, \check{P}_g] = i\check{P}_{\{f, g\}}$, in Analogie mit (2) in der Definition der vollen Quantisierung (Def. 2.1). Darüberhinaus ist mit dieser

Definition für reellwertiges f , der Operator \check{P}_f ein Hermitescher Operator (siehe [1, p.441]). Allerdings ist die Abbildung \check{P} kein Lie-Homomorphismus. Hier möchte ich die Lie-Homomorphismeigenschaft in den Vordergrund stellen. Somit habe ich, wie es auch in [144] und [A] getan wurde, die Form (4-31) gewählt. Dies impliziert, daß für reellwertiges f der Operator P_f anti-Hermitesch ist.

Durch die Präquantenabbildung erhalten wir eine Zuordnungsvorschrift "Funktion \mapsto Operator". Diese Zuordnung überträgt die klassische Poisson-Klammer in den Kommutator. Der Operator wirkt auf dem Raum der globalen Schnitte des Bündels L . Will man einen Hilbert-Raum, so geht man aus von der Metrik des Bündels, integriert dies über M in Bezug auf ein sinnvolles Maß auf M und betrachtet die L^2 -Vervollständigung.⁶ Dieser Raum sei mit $L^2(M, L)$ bezeichnet. Leider ist dieser Hilbert-Raum noch zu groß. Die Darstellung ist (zumindestens für T^*R^n) nicht irreduzibel. Anschaulich gesprochen operieren die Operatoren auf Feldern, die durch Ort und Impuls in einer unabhängigen Weise gegeben sind. Physikalisch sind aber Ort und Impuls nicht unabhängig voneinander. Wir haben also zuviele Freiheitsgrade. Die Felder sollten lediglich von n unabhängigen Variablen abhängen. Im Rahmen der geometrischen Quantisierung hat man deshalb eine "Polarisierung" zu wählen, d.h. ein Lagrangesches Unterbündel des Tangentialbündels TM auszuzeichnen. Ein Lagrangesches Unterbündel ist ein maximales Unterbündel (hat also Rang n) auf dem die symplektische Form verschwindet. Man beschränkt sich nun auf die Schnitte, welche kovariant konstant sind in Richtung des Unterbündels (siehe [213] für die allgemeine Theorie). Die Auswahl einer Polarisierung ist ziemlich willkürlich. Im Kähler-Fall gibt es allerdings eine Standardwahl der Polarisierung, die Kähler-Polarisierung.⁷ Für komplexe Mannigfaltigkeiten hat man die natürliche Zerlegung des Tangentialbündels in holomorphe und antiholomorphe Anteile. Diese Zerlegung ist invariant unter holomorphen Koordinatentransformationen. Wählt man nun als Lagrangesches Unterbündel das Unterbündel, das von den $(0, 1)$ -Derivationen (den antiholomorphen Richtungen) aufgespannt wird, so bedeutet dies, daß wir uns auf die holomorphen Schnitte des Bündels L beschränken. Sei $\Gamma_{hol}(M, L)$ der Raum der globalen holomorphen Schnitte des Bündels L . Wir fassen ihn als Unterraum von $\Gamma_\infty(M, L)$, dem Raum der differenzierbaren Schnitten, auf. Sei

⁶Für den Fall der kompakten Mannigfaltigkeiten ist dies nichts anderes als das Integral der Metrik über das symplektische Volumen, siehe (5-2). Nur dieser Fall wird uns im folgenden interessieren.

⁷Selbstverständlich gibt es auch im Kähler-Fall andere Polarisierungen.

$\Gamma_{hol}^b(M, L) = \Gamma_{hol}(M, L) \cap L^2(M, L)$, der Unterraum der holomorphen Schnitte, die beschränkt (in Bezug auf das gewählte Maß) sind. Dann wurde in [195] (siehe auch [162], [113]) gezeigt, daß $\Gamma_{hol}^b(M, L)$ ein abgeschlossener Unterraum ist. Dies bedeutet, es existiert der Projektor

$$\Pi : L^2(M, L) \rightarrow \Gamma_{hol}^b(M, L) .$$

In der uns interessierenden kompakten Situation ist $\Gamma_{hol}^b(M, L) = \Gamma_{hol}(M, L)$. Die Einschränkung von P_f auf $\Gamma_{hol}^b(M, L)$ sei mit $P_f \cdot \Pi : \Gamma_{hol}^b(M, L) \rightarrow L^2(M, L)$ oder auch einfacher mit P_f bezeichnet. Beachte $P_f \cdot \Pi$ nimmt Werte in $L^2(M, L)$ an. Um wiederum Schnitte aus $\Gamma_{hol}^b(M, L)$ zu erhalten, muß zurückprojiziert werden.

Definition 4.7. Die lineare Abbildung

$$Q : \mathcal{P}(M) \rightarrow \text{End}(\Gamma_{hol}^b(M, L)), \quad f \mapsto Q_f = \Pi \cdot P_f \cdot \Pi \quad (4-33)$$

heißt *Quantisierungsabbildung*, der Operator Q_f *Quantenoperator* zur Funktion f .

Leider geht die Lie-Homomorphie verloren. Im allgemeinen ist

$$Q_{\{f,g\}} = \Pi P_{\{f,g\}} \Pi = \Pi P_f P_g \Pi - \Pi P_g P_f \Pi \neq \Pi P_f \Pi P_g \Pi - \Pi P_g \Pi P_f \Pi = [Q_f, Q_g] .$$

Ist M kompakt, so sind alle $\Gamma_{hol}(M, L)$ endlichdimensionale Vektorräume. Für gewisse L ist es sogar möglich, daß es der Nullraum ist. In diesem Fall geht alle klassische Information verloren. Wie oben ausgeführt, ist das Quantenbündel ein positives⁸ Bündel, d.h. steigende Potenzen von L besitzen immer mehr holomorphe Schnitte. Die Hoffnung ist, daß letztendlich auch alle klassischen Informationen wieder gefunden werden können, wenn wir alle Tensorpotenzen von L auf einmal betrachten. Dies ist in der Tat richtig und diese Fragestellung ist ein zentraler Aspekt dieses Teils der Arbeit. Ausgehend von dem holomorphen Quantenbündel (L, h, ∇) betrachten wir positive ganzzahlige (Tensor)Potenzen

$$L^m := L^{\otimes m} = \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{m \text{ mal}} . \quad (4-34)$$

⁸In der Sprache der algebraischen Geometrie heißen diese auch ample Bündel.

Eine Hermitesche Metrik und ein kompatibler Zusammenhang ist gegeben durch

$$h^{(m)} := \underbrace{h \otimes \cdots \otimes h}_{m \text{ mal}}, \quad \nabla^{(m)} = \nabla \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes \nabla \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \nabla . \quad (4-35)$$

Wenn wir diese Objekte in Bezug auf einen holomorphen Rahmen für das Bündels L schreiben, so wird $h^{(m)}$ durch $(\hat{h})^m$ und $\nabla^{(m)}$ durch $\partial + m \partial \log \hat{h} + \bar{\partial}$ beschrieben. Für die Krümmungsform $F^{(m)}$ des Bündels L^m erhält man aufgrund der Quantisierungsbedingung

$$F^{(m)} = mF = -i m \omega = -i \omega^{(m)}, \quad \omega^{(m)} := m \omega . \quad (4-36)$$

Dies bedeutet $(L^m, h^{(m)}, \nabla^{(m)})$ ist ein Quantenbündel für die Kähler-Mannigfaltigkeit $(M, \omega^{(m)})$. Insbesondere bleibt die zugrundeliegende komplexe Mannigfaltigkeit unverändert. Es wird lediglich die Kähler-Form mit einem ganzzahligen positiven Faktor multipliziert. Wir können somit die oben entwickelte Prozedur zur geometrischen Quantisierung für jedes m wiederholen. Auf diese Weise erhalten wir Präquantenoperatoren,

$$P_f^{(m)} = -\nabla_{X_f^{(m)}}^{(m)} + i f \cdot id, \quad (4-37)$$

Projektoren

$$\Pi^{(m)} : L^2(M, L^m) \rightarrow \Gamma_{hol}^b(M, L^m) \quad (4-38)$$

und Quantenoperatoren

$$Q_f^{(m)} = \Pi^{(m)} \cdot P_f^{(m)} \cdot \Pi^{(m)} . \quad (4-39)$$

Die Abbildung $f \mapsto P_f^{(m)}$ ist ein Lie-Homomorphismus von der Lie-Algebra, gegeben durch die Poisson-Klammer $\{.,.\}^{(m)}$ auf $(M, m\omega)$, in die entsprechende Endomorphismenalgebra. Hier wollen wir allerdings eine Darstellung der ursprünglichen Poisson-Algebra zu (M, ω) haben. Aufgrund Prop. 4.3 gilt

$$\{f, g\}^{(m)} = \frac{1}{m} \{f, g\} .$$

Somit ergibt sich

$$[P_f^{(m)}, P_g^{(m)}] = P_{\{f, g\}^{(m)}}^{(m)} = \frac{1}{m} P_{\{f, g\}}^{(m)} . \quad (4-40)$$

Um eine Darstellung zu erhalten, müssen wir also reskalieren:

$$\widehat{P}_f^{(m)} := mP_f^{(m)} = m \left(-\nabla_{X_f}^{(m)} + i f \cdot 1 \right) = -\nabla_{X_f}^{(m)} + i m f \cdot 1, \quad (4-41)$$

$$\widehat{Q}_f^{(m)} = \Pi^{(m)} \cdot \widehat{P}_f^{(m)} \cdot \Pi^{(m)}. \quad (4-42)$$

Reskaliert man nicht und setzt $\hbar := \frac{1}{m}$, so erhält man übrigens die \hbar -Abhängigkeit aus der Definition der vollen Quantisierung (Def. 2.1). Hier kann \hbar nur die diskreten Werte $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ annehmen. Der Limes $m \rightarrow \infty$ entspricht $\hbar \rightarrow 0$, d.h. “dem klassischen Limes”.

Ich möchte die Konstruktion dieses Abschnitts **zusammenfassen**. Wir gingen aus von einer quantisierbaren Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω) . Die Kähler-Form gibt dem Raum der C^∞ -Funktionen die Struktur einer Poisson-Algebra $\mathcal{P}(M)$. Wählt man ein Quantenbündel (L, h, ∇) zu (M, ω) , so ergibt die geometrische Quantisierung zwei Familien von linearen Abbildungen

$$\widehat{P}^{(m)} : \mathcal{P}(M) \rightarrow \text{End}(L^2(M, L^m)), \quad \widehat{Q}^{(m)} : \mathcal{P}(M) \rightarrow \text{End}(\Gamma_{hol}^b(M, L^m)), \quad (4-43)$$

die durch $m \in \mathbb{N}$ indiziert werden. Die Präquantenabbildungen $\widehat{P}^{(m)}$ sind Lie-Homomorphismen. Die Bilder sind lineare Operatoren auf den globalen L^2 -Schnitten der Bündel L^m . Die Quantenabbildungen $\widehat{Q}^{(m)}$ erhält man, indem man die Operatoren auf den Unterraum der holomorphen Schnitten projiziert. Ist M kompakt, erzwingt die Quantisierungsbedingung, daß M projektiv algebraisch ist. Zum andern sind die Vektorräume der holomorphen Schnitte endlichdimensional. Insbesondere erhält man in diesem Fall (nach Wahl von Basen) durch $\widehat{Q}^{(m)}$ eine Familie von linearen Abbildungen, welche von der Poisson-Algebra $\mathcal{P}(M)$ in endlichdimensionale Matrizenalgebren gehen. Allerdings sind die $\widehat{Q}^{(m)}$ im allgemeinen keine Lie-Homomorphismen mehr. Die Fragen, welche im folgenden untersucht werden sollen, lauten: Wird wenigstens “approximativ” $\widehat{Q}^{(m)}$ für $m \rightarrow \infty$ (d.h. für $\hbar \rightarrow 0$) ein Lie-Homomorphismus? “Steckt” die gesamte Information von $\mathcal{P}(M)$ “annähernd” in der Familie dieser $\widehat{Q}^{(m)}$? In welchem Sinne, kann man dieses “annähernd” verstehen? Selbstverständlich müssen zuerst Normen eingeführt werden, um die “Approximation” näher fassen zu können. Dies wird im nächsten Abschnitt geschehen. Zusätzlich ist noch der Zusammenhang von $\widehat{Q}_{\{f,g\}}^{(m)}$ mit $[\widehat{Q}_f^{(m)}, \widehat{Q}_g^{(m)}]$ zu untersuchen, damit gezeigt werden kann, daß es sich tatsächlich um eine approximative

Quantisierung handelt. Auch dies wird in den nächsten Abschnitten gezeigt werden. Zuerst werde ich allerdings in Abschnitt 5 den Zusammenhang zur Berezin-Toeplitz-Quantisierung herstellen. Diese ist einfacher zu handhaben. Es wird sich ergeben, daß beide dasselbe approximative Verhalten haben.

5. Berezin-Toeplitz-Quantisierung

(a) Die Definition der Berezin-Toeplitz-Quantisierung

Was in diesem und im folgenden Paragraphen ausgeführt wird, ist eine Darstellung bzw. Weiterentwicklung einer gemeinsamen Arbeit des Autors zusammen mit Eckhard Meinrenken und Martin Bordemann [B]. Die Notation und Situation sei wie im vorhergehenden Paragraphen. D.h. (M, ω) ist eine quantisierbare Kähler-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n und (L, h, ∇) ein zugehöriges Quantenbündel. Ich werde ab jetzt, falls nichts anderes gesagt wird, zusätzlich voraussetzen, daß M **kompakt** ist. Der Leser mag einwenden, daß dadurch die Möglichkeiten für die Phasenmannigfaltigkeiten stark eingeschränkt werden. So ist etwa das freie Teilchen im Raum ausgeschlossen. Trotzdem ist selbst vom Standpunkt der Physik die Situation “kompakte Phasenmannigfaltigkeit” sehr interessant. Sie tritt z.B. auf wenn Systeme mit “constraints” behandelt werden. Darüberhinaus ist es eine typische Situation, wenn man Systeme mit der Aktion einer Symmetriegruppe betrachtet (Beispiele findet man etwa in [179, p.172]). Oft ist der reduzierte Phasenraum kompakt. Eine weitere, sehr aktuelle Rolle spielen diese kompakten Mannigfaltigkeiten auch im Zusammenhang mit der Quantisierung von Chern-Simons-Theorien, bzw. topologischer Feldtheorien. Hier treten (kompaktifizierte) Modulräume gewisser stabiler Rang- k Bündel über Riemannschen Flächen auf. Diese Modulräume haben nur sehr milde Singularitäten. Sie besitzen eine kanonische Kähler-Form und ein kanonisches amplex¹ Bündel L , welches das Quantenbündel ist. Für die Schnitträume $H^0(M, L^m)$ hat sich der Namen Verlinde-Räume eingebürgert. Die berühmte Verlinde-Formel macht Aussagen über die Dimension dieser Räume in Abhängigkeit vom Rang k , der Strukturgruppe der Bündel und dem Geschlecht der Riemannschen Fläche. Siehe [180] für eine Einführung in die

¹Die amplexen Bündel der algebraischen Geometrie entsprechen den positiven Bündeln der Differentialgeometrie.

Verlinde-Formel und Verweise auf weitere Literatur und [41] für den Zusammenhang mit der geometrischen Quantisierung.

Unabhängig von diesen Anwendungen in der theoretischen Physik ist die Fragestellung der Approximation natürlich auch aus rein mathematischen Gründen interessant.

Wie bereits in Abschnitt 4 ausgeführt, ist M wegen der Quantisierbarkeitsbedingung und der Kompaktheit eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit und L ein amples Geradenbündel. Dies bedeutet es gibt eine Tensorpotenz L^k , so daß M mit Hilfe der globalen holomorphen Schnitte von L^k in \mathbb{P}^N eingebettet werden kann. Für die Dimension N gilt $N = \dim H^0(M, L^k) - 1$. Die Einbettung kann nach Wahl einer Basis $s_0, s_1, \dots, s_N \in H^0(M, L^k)$ konkret gegeben werden durch

$$M \rightarrow \mathbb{P}^N, \quad x \mapsto (s_0(x) : s_1(x) : \dots : s_N(x)) . \quad (5-1)$$

Die Abbildung ist in folgender Weise zu verstehen: Für jedes $x \in M$ wähle man eine Umgebung, welche das Bündel L trivialisiert. Sodann repräsentiere man die Schnitte s_i lokal durch holomorphe Funktionen \hat{s}_i und werte diese bei x aus. Damit erhält man ein Element aus \mathbb{C}^{N+1} . Die Wahl einer anderen Trivialisierung ändert diesen Vektor gerade durch Multiplikation mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \neq 0$. Somit ist der Punkt im projektiven Raum in der Tat wohldefiniert, falls nicht alle Schnitte simultan verschwinden. Die Bedingung "sehr ample" schließt dies aus. Ich führe die folgenden Bezeichnungen ein. Das symplektische Volumen Ω ist gegeben durch (4-1). Für differenzierbare Schnitte $\varphi, \psi \in \Gamma_\infty(M, L^m)$ ist ein *Skalarprodukt* und eine *Norm* gegeben durch

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_M h^{(m)}(\varphi, \psi) \Omega , \quad (5-2)$$

$$\|\varphi\| := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} . \quad (5-3)$$

Die Hermitesche Metrik sei antilinear im 1. Argument und linear im 2. Argument. Ist $A \in \text{End}(\Gamma_{hol}(M, L^m))$, so ist seine *Operatornorm* definiert als

$$\|A\| := \sup_{\|\varphi\| \neq 0} \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|} . \quad (5-4)$$

Wird das Skalarprodukt (5-2) reskaliert, so ändert sich die Operatornorm nicht.

Wegen der Kompaktheit von M ist das Skalarprodukt wohldefiniert. Wir bezeichnen die L^2 -Vervollständigung des Schnitttraums der (beliebig oft) differenzierbaren Schnitte mit $L^2(M, L^m)$. Der endlichdimensionale Raum der globalen holomorphen Schnitte ist ein abgeschlossener Unterraum und wir bezeichnen mit

$$\Pi^{(m)} : L^2(M, L^m) \rightarrow \Gamma_{hol}(M, L^m) \quad (5-5)$$

den Projektor. Mit Hilfe einer Orthonormalbasis des Raums der holomorphen Schnitte kann der Projektor als Integral explizit angegeben werden (siehe Gleichung (5-12)). In lokalen Koordinaten kann der Integrand im Skalarprodukt (5-2) auch beschrieben werden durch

$$\exp(-mK(z)) \overline{\hat{\varphi}(z)} \hat{\psi}(z) \Omega(z)$$

mit dem lokalen Kähler-Potential $K(z)$ (4-28) und den lokalen Repräsentanten $\hat{\varphi}$ (bzw. $\hat{\psi}$) der Schnitte.

Definition 5.1. Für $f \in C^\infty(M)$ sei der *Multiplikationsoperator* durch

$$M_f^{(m)} : L^2(M, L^m) \rightarrow L^2(M, L^m), \quad \varphi \mapsto f \cdot \varphi \quad (5-6)$$

und der *Toeplitz-Operator* durch

$$T_f^{(m)} : \Gamma_{hol}(M, L^m) \rightarrow \Gamma_{hol}(M, L^m), \quad T_f^{(m)} = \Pi^{(m)} \cdot M_f^{(m)} \cdot \Pi^{(m)} \quad (5-7)$$

definiert.

In Worten ausgedrückt: Der Toeplitz-Operator zu einer differenzierbaren Funktion f multipliziert den holomorphen Schnitt mit der Funktion f und projiziert den erhaltenen differenzierbaren Schnitt auf den Unterraum der holomorphen Schnitte zurück.

Proposition 5.2. (a) Die Operatoren $M_f^{(m)}$ und $T_f^{(m)}$ sind lineare Operatoren. Die adjungierten Abbildungen $M_f^{(m)*}$ und $T_f^{(m)*}$ sind gegeben durch

$$M_f^{(m)*} = M_{\bar{f}}^{(m)}, \quad T_f^{(m)*} = T_{\bar{f}}^{(m)}. \quad (5-8)$$

Insbesondere sind beide für reellwertige Funktionen f selbstadjungiert.

(b) Für holomorphe Schnitte s_1 und s_2 gilt

$$\langle s_1, T_f^{(m)} s_2 \rangle = \langle s_1, f \cdot s_2 \rangle . \quad (5-9)$$

Beweis. Klar, man beachte lediglich

$$\begin{aligned} \langle s_1, T_f^{(m)} s_2 \rangle &= \langle s_1, \Pi^{(m)} M_f^{(m)} \Pi^{(m)} s_2 \rangle = \langle s_1, \Pi^{(m)} f \cdot s_2 \rangle \\ &= \langle s_1, f \cdot s_2 \rangle = \langle \bar{f} \cdot s_1, s_2 \rangle = \langle T_{\bar{f}}^{(m)} s_1, s_2 \rangle = \langle T_f^{(m)*} s_1, s_2 \rangle . \quad \square \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$M^{(m)} : C^\infty(M) \rightarrow \text{End}(L^2(M, L^m)), \quad f \mapsto M_f^{(m)}$$

ist trivialerweise ein Algebrenhomomorphismus. Insbesondere sind damit alle Funktionen durch eine kommutative Unter algebra von $\text{End}(L^2(M, L^m))$ dargestellt. Dies trifft für die Toeplitzabbildung

$$T^{(m)} : C^\infty(M) \rightarrow \text{End}(\Gamma_{hol}(M, L^m)) \quad f \mapsto T_f^{(m)} \quad (5-10)$$

nicht mehr zu. Im allgemeinen gilt

$$T_f^{(m)} T_g^{(m)} = \Pi^{(m)} (f \cdot) \Pi^{(m)} (g \cdot) \Pi^{(m)} \neq \Pi^{(m)} (fg \cdot) \Pi^{(m)} = T_{fg}^{(m)} .$$

Die Unter algebra der globalen holomorphen Funktionen wird durch eine kommutative Unter algebra dargestellt. Im kompakten Fall sind dies allerdings nur die Konstanten.

Definition 5.3. Die Abbildung (5-10) heißt Berezin-Toeplitz-Quantisierung (zur Stufe m) der quantisierbaren Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω) mit dem Quantenbündel (L, h, ∇) .

Um nachzuprüfen, daß es sich wirklich um eine approximative Quantisierung im Sinne unserer Ausführungen von Abschnitt 2 handelt, sind zwei Dinge nachzuprüfen. Zum einen müssen nichtkommutative Operatoren im Bildbereich auftreten. Dies ist

der Fall. Zum anderen muß der Kommutator der Operatoren mit der Poisson-Klammer der Funktionen in einer asymptotischen Beziehung stehen. Dies bedeutet wir müssen eine Beziehung zwischen $T_{\{f,g\}}^{(m)}$ und $[T_f^{(m)}, T_g^{(m)}]$ finden. Diese Aufgabe wird in Abschnitt 6 gelöst.

Die Berezin-Toeplitz-Quantisierung wurde von Berezin [13] für beschränkte komplex-symmetrische Gebiete betrachtet. In diesen Fällen ist die Mannigfaltigkeit ein offenes Gebiet im \mathbb{C}^n . Statt Schnitte in Bündel werden Funktionen, welche in Bezug auf ein geeignetes, von \hbar abhängiges, Integrationsmaß integrierbar sind, betrachtet. $1/\hbar$ entspricht der Tensorpotenz unserer Bündel. Die Toeplitz-Operatoren für beschränkte symmetrische Gebiete in \mathbb{C}^n wurde ausgiebig von Upmeyer in einer Serien von Arbeiten [199],[200],[201],[202], ... untersucht. Hierbei stand die von ihnen erzeugte C^* -Algebra im Vordergrund des Interesses. Siehe hierzu auch die kürzlich erschienene Monographie dieses Autors [203]. Für den Fall des \mathbb{C}^n selbst siehe auch Berger und Coburn [15]. In der Folgezeit wurden auch etwas allgemeinere homogene Räume untersucht. In [A] wurden von Bordemann, Hoppe, Schaller und Schlichenmaier die höherdimensionalen komplexen Tori studiert. Klimek und Lesniewski studierten in [136],[137] die Berezin-Toeplitz-Quantisierung auf der Einheitskreisscheibe und übertrugen mit Hilfe automorpher Formen die Resultate auf Riemannsche Flächen vom Geschlecht $g \geq 2$. In [138],[139] wurden dann Überlagerungssituationen studiert. Von Borthwick, Lesniewski und Upmeyer [34] wurde die Berezin-Toeplitz-Quantisierung von Cartan-Gebieten studiert. Diese Techniken können auf super-Hermitesche Räume übertragen werden. Siehe hierzu die Arbeiten von Borthwick, Klimek, Lesniewski und Rinaldi [30],[31],[32], [33].

Alle diese Untersuchungen befassen sich mit symmetrischen Gebieten. Im Gegensatz hierzu befinden sich unsere Kähler-Mannigfaltigkeiten [B] gerade in einem anderen Bereich der Theorie, im Bereich der beliebigen kompakten Mannigfaltigkeiten. Natürlich gibt es Überschneidungen.

Die Berezin-Toeplitz-Quantisierung ist verwandt mit der Quantisierung unter Benutzung von Berezins kohärenten Zuständen. Im Abschnitt 5 (d) werde ich einen kurzen Überblick hierzu geben. Die Berezin-Toeplitz-Quantisierung paßt auch in den Rahmen der "Prime-Quantization", welche auf der Naimark-Erweiterung eines geeigneten "positive operator-valued measure" beruht. Sie wurde von Ali und Doebner [3], [2] entwickelt.

(b) Der Zusammenhang zwischen geometrischer Quantisierung und der Berezin-Toeplitz-Quantisierung

Der Quantenoperator $Q_f^{(m)}$, (bzw. der reskalierte Quantenoperator $\widehat{Q}_f^{(m)}$) und der Toeplitz-Operator $T_f^{(m)}$ operieren beide auf dem Raum der globalen holomorphen Schnitte $\Gamma_{hol}(M, L^m)$. Hier möchte ich beide in Beziehung zueinander bringen. Mit Hilfe des Skalarprodukts (5-2) auf den Schnitten kann man den Projektor $\Pi^{(m)}$ explizit beschreiben. Sei $k(m) := \dim \Gamma_{hol}(M, L^m)$ und sei $s_1, s_2, \dots, s_{k(m)}$ eine festgehaltene Orthonormalbasis von $\Gamma_{hol}(M, L^m)$. Es gilt dann

$$\Pi^{(m)} = \sum_{j=1}^{k(m)} |s_j\rangle\langle s_j|. \quad (5-11)$$

Hier verwende ich die einprägsame “bra” und “ket” Notation der Physiker. Die Gleichung (5-11) bedeutet für einen beliebigen Schnitt φ

$$\Pi^{(m)}(\varphi)(z) = \sum_{j=1}^{k(m)} |s_j(z)\rangle\langle s_j|\varphi\rangle = \sum_{j=1}^{k(m)} \langle s_j|\varphi\rangle s_j(z).$$

Ersetzt man das Skalarprodukt durch seine Definition über das Integral, so ergibt sich die Darstellung mit Hilfe eines Integralkerns

$$\Pi^{(m)}(\varphi)(z) = \int_M \left(\sum_{j=1}^{k(m)} s_j(z) h^{(m)}(s_j(w), \varphi(w)) \right) \Omega(w). \quad (5-12)$$

Für einen holomorphen Schnitt s gilt $T_f^{(m)}s = \Pi^{(m)}(f \cdot s)$. Daraus ergibt sich die Integralkerndarstellung des Toeplitz-Operators

$$(T_f^{(m)}s)(z) = \int_M \sum_{i=1}^{k(m)} h^{(m)}(s_i(w), f(w)s(w)) \cdot s_i(z) \Omega(w). \quad (5-13)$$

Es sei erwähnt, daß der Projektionsoperator speziell in den Fällen die von Berezin untersucht wurden eine weitere geschlossene Darstellung hat. Dabei sei vorausgesetzt, daß die Kähler-Mannigfaltigkeit bis auf Komponenten niedriger Dimension in \mathbb{C}^n eingebettet ist. Die Metrik sei reellanalytisch und das Kähler-Potential (4-28) global definiert. Insbesondere ist dieses auch reellanalytisch. Wir schreiben

$K(z) = K(z, \bar{z})$ und setzen K holomorph in der ersten Variablen und antiholomorph in der zweiten Variablen fort. Damit erhalten wir die Funktion $K(z, \bar{w})$. Der Projektionsoperator schreibt sich dann als

$$\Pi^{(m)}(\varphi)(z) = \int_M \varphi(w) \exp(m(K(z, \bar{w}) - K(w, \bar{w}))) d\mu_m(w, \bar{w}) \quad (5-14)$$

mit einem entsprechend skalierten Maß $d\mu_m$ auf M .

Zuück zum allgemeinen Fall. In der “bra-ket” Notation schreibt sich

$$Q_f^{(m)} = \sum_{i,j=1}^{k(m)} |s_i\rangle \langle s_i | P_f^{(m)} | s_j \rangle \langle s_j |, \quad (5-15)$$

$$T_f^{(m)} = \sum_{i,j=1}^{k(m)} |s_i\rangle \langle s_i | f | s_j \rangle \langle s_j |. \quad (5-16)$$

Die Symbole $\langle s_i | A | s_j \rangle$ sind die zugehörigen Matrixelemente des Operators A und sind definiert als $\langle s_i, A s_j \rangle$.

Proposition 5.4. [Tuynman]

$$Q_f^{(m)} = i \cdot T_{f - \frac{1}{2m} \Delta f}^{(m)} = i \left(T_f^{(m)} - \frac{1}{2m} T_{\Delta f}^{(m)} \right). \quad (5-17)$$

Hierbei ist der Laplace-Operator zu berechnen in Bezug auf die Kähler-Metrik, welche aufgrund ω gegeben ist.

Beweis. Nach (4-20) gilt $\Delta^{(m)} = \frac{1}{m} \Delta$. Dies bedeutet: Ist (5-17) für $m=1$ und jede Kähler-Mannigfaltigkeit bewiesen, so gilt die Behauptung für alle m . Für $m = 1$ wurde die Behauptung von Tuynman durch Rechnung in lokalen Koordinaten gezeigt [196]. In [A] wurde vom Autor zusammen mit Bordemann, Hoppe und Schaller allerdings ein koordinatenunabhängiger Beweis gegeben. Diesen möchte ich hier wiedergeben. Gleichheit ist erbracht, falls für je zwei holomorphe Schnitte s_1, s_2 für die zugehörigen Matrixelemente gilt (die Indizes ⁽¹⁾ werden weggelassen)

$$\langle s_1 | P_f | s_2 \rangle = i \langle s_1 | f - \frac{1}{2} \Delta f | s_2 \rangle.$$

Es sei erinnert, daß $P_f = -\nabla_{X_f} + i f$ ist. Somit genügt es zu zeigen

$$\langle s_1 | \nabla_{X_f} s_2 \rangle = \frac{i}{2} \langle s_1 | \Delta f s_2 \rangle .$$

Sei I die komplexe Struktur auf M , dann gilt für jedes Vektorfeld, daß die $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ Komponente gegeben wird durch $\frac{1}{2}(X - iIX)$, bzw. $\frac{1}{2}(X + iIX)$. Die Verträglichkeitsbeziehung “Zusammenhang mit komplexer Struktur” (4-22) besagt

$$\nabla_{\frac{1}{2}(X + iIX)} s_2 = 0, \quad \text{bzw.} \quad \nabla_{IX} s_2 = i \nabla_X s_2 .$$

Mit (4-13) erhält man

$$h(s_1, \nabla_{X_f} s_2) = -h(s_1, \nabla_{I \text{ grad } f} s_2) = -h(s_1, i \nabla_{\text{grad } f} s_2) = -i h(s_1, \nabla_{\text{grad } f} s_2) . \quad (5-18)$$

Die Verträglichkeitsbedingung “Metrik und Zusammenhang” (4-21) besagt

$$d(h(s_1, s_2))(X_f) - h(s_1, \nabla_{X_f} s_2) = h(\nabla_{X_f} s_1, s_2) = i h(\nabla_{\text{grad } f} s_1, s_2) . \quad (5-19)$$

Ziehen wir (5-19) von (5-18) ab, so ergibt sich

$$2h(s_1, \nabla_{X_f} s_2) = d(h(s_1, s_2))(X_f) - i(h(s_1, \nabla_{\text{grad } f} s_2) + h(\nabla_{\text{grad } f} s_1, s_2)) .$$

Mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingungen kann dies umgeschrieben werden in

$$h(s_1, \nabla_{X_f} s_2) = \frac{1}{2} d(h(s_1, s_2))(X_f) - \frac{i}{2} d(h(s_1, s_2))(\text{grad } f) .$$

Diese Relation wird über ganz M integriert und ergibt

$$\langle s_1, \nabla_{X_f} s_2 \rangle = -\frac{1}{2} \int_M h(s_1, s_2) \text{div } X_f \Omega + \frac{i}{2} \int_M h(s_1, s_2) \text{div grad } f \Omega .$$

Hierbei benutzen wir die Relation $\int_M df(X) \Omega = -\int_M f \text{div } X \Omega$, [1, p.153]. Nun ist $\text{div grad } f = \Delta f$ und X_f als Hamiltonsches Vektorfeld nach untenstehendem Lemma 5.5 divergenzfrei (immer alles in Bezug auf die Metrik, welche von der Kähler-Form herkommt). Übrig bleibt genau die zu beweisende Formel. \square

Lemma 5.5. *Hamiltonsche Vektorfelder X_f sind divergenzfrei in Bezug auf die symplektische Volumenform.*

Beweis. Sei Ω die Volumenform, dann ist $\operatorname{div} X_f$ definiert über die Lie-Ableitung von Ω in Richtung des Vektorfeldes X_f durch $L_{X_f}\Omega = (\operatorname{div} X_f) \cdot \Omega$. Da $d\omega = 0$, gilt für die Lie-Ableitung der Form ω

$$L_{X_f}\omega = (i_{X_f} \circ d + d \circ i_{X_f})\omega = d \circ i_{X_f}(\omega) = d(\omega(X_f, \cdot)) = d(df(\cdot)) = 0 .$$

Aufgrund der Derivationseigenschaft somit $L_{X_f}\Omega = 0$. \square

Die Relation (5-17) ist äußerst nützlich. Zum einen erlaubt sie es, die Ableitungen von den variablen Schnitten in die feste zu quantisierende Funktion zu schieben. Darüberhinaus wird für große m der Anteil $\frac{1}{2m}T_{\Delta f}$ immer kleiner. Für $m \rightarrow \infty$ haben also $T_f^{(m)}$ und $Q_f^{(m)}$ dasselbe approximative Verhalten. Siehe Abschnitt 6 für die genauen Aussagen.

Bemerkung. Ausgehend von (5-17) hat Tuynman [196] vorgeschlagen, statt des Operators der geometrischen Quantisierung, den Toeplitz-Operator² zur Funktion $\exp(-\frac{1}{2m}\Delta f)$ als Quantisierungsoperator zu betrachten.

(c) Beispiele

1. Die projektive Gerade \mathbb{P}^1 . Dies entspricht der Riemannschen Zahlenkugel S^2 , bzw. der Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g = 0$. Sei (U_0, U_1) die affine Standardüberdeckung

$$U_0 := \{(z_0 : z_1) \mid z_0 \neq 0\}, \quad U_1 := \{(z_0 : z_1) \mid z_1 \neq 0\} .$$

Die Koordinate für U_0 sei $z = z_1/z_0$, die Koordinate für U_1 sei $\omega = z_0/z_1$, die Kartenwechselabbildung sei $w(z) = 1/z$. Alle Objekte können als lokale Funktionen in der Karte U_0 beschrieben werden. Die Kähler-Form ist gegeben durch

$$\omega_0(z) = \frac{i}{(1 + z\bar{z})^2} dz \wedge d\bar{z} . \tag{5-20}$$

²in unserer Sprechweise

Das zugehörige Quantenbündel ist genau das Hyperebenenbündel L mit der Übergangsfunktion $1/z$. Die globalen Schnitte in die Bündel L^m werden repräsentiert durch die Funktionen $\langle 1, z, z^2, \dots, z^m \rangle_{\mathbb{C}}$. Es gilt $\dim \Gamma_{hol}(M, L^m) = m + 1$. Die Metrik $h^{(m)}$ wird gegeben durch die Funktion

$$\hat{h}^{(m)}(z) = \frac{1}{(1 + z\bar{z})^m} . \quad (5-21)$$

Man verifiziert sofort $\omega = i\bar{\partial}\partial \log \hat{h}$. Sind s_1, s_2 holomorphe Schnitte, repräsentiert durch die Polynome \hat{s}_1, \hat{s}_2 , so gilt für das Skalarprodukt

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_{\mathbb{P}^1} h^{(m)}(s_1, s_2) \omega = \int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\hat{s}_1} \hat{s}_2}{(1 + z\bar{z})^m} \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} . \quad (5-22)$$

Für die spezielle Basis der Potenzen ergibt sich durch Übergang zu Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$

$$\langle z^k, z^l \rangle = 2\pi \int_0^\infty \frac{r^{2k} 2r dr}{(1 + r^2)^{m+2}} \cdot \delta_{k,l} .$$

Setzt man

$$I(k, m) := \int_0^\infty \frac{r^{2k} 2r dr}{(1 + r^2)^{m+2}} = \int_0^\infty \frac{u^k du}{(1 + u)^{m+2}} ,$$

so erhält man durch partielle Integration die Rekursion

$$I(k, m) = \frac{k}{m+1} \cdot I(k-1, m-1), \quad \text{und} \quad I(0, m-k) = \frac{1}{m-k+1} .$$

Damit insgesamt

$$\langle z^k, z^l \rangle = 2\pi \binom{m}{k}^{-1} \frac{1}{m+1} \cdot \delta_{k,l} .$$

Also bilden die Schnitte repräsentiert durch

$$\sqrt{\frac{m+1}{2\pi}} \binom{m}{k} \cdot z^k, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (5-23)$$

eine Orthonormalbasis von $\Gamma_{hol}(M, L^m)$. Setzt man mit dieser ONB den Projektor (5-12) an, so erhält man nach Aufsummation die geschlossene Darstellung des Projektors

$$(\Pi^{(m)}\varphi)(z) = \frac{m+1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{(1 + z\bar{\zeta})^m \varphi(\zeta)}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^m} \frac{i d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2} . \quad (5-24)$$

Hierbei ist φ ein beliebiger Schnitt. Für den Toeplitz-Operator ergibt sich nach (5-13)

$$(T_f^{(m)} s)(z) = \frac{m+1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{(1+z\bar{\zeta})^m f(\zeta) s(\zeta)}{(1+\zeta\bar{\zeta})^m} \frac{i d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}. \quad (5-25)$$

Hier ist s ein holomorpher Schnitt. Man vergleiche dies mit (5-14).

Amüsanterweise tritt dieses Beispiel bei den Physikern (oder besser bei manchen von ihnen) seit kurzen unter dem Namen “fuzzy sphere” in Erscheinung [153],[102].

2. Der eindimensionale komplexe Torus ($g = 1$). Hier ist $M \cong \mathbb{C}/\Lambda$, mit einem normierten zweidimensionalen Gitter $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$. Insbesondere ist $\text{Im } \tau > 0$. Die komplexe Struktur von M ist durch τ fixiert. Die Kähler-Form ist gegeben durch

$$\omega(z) = \frac{i\pi}{\text{Im } \tau} dz \wedge d\bar{z}. \quad (5-26)$$

Die Variable z ist die globale Koordinate auf der Überlagerung \mathbb{C} . Offensichtlich ist ω invariant unter den Translationen mit den Gitterelementen und definiert somit eine Kähler-Form auf dem Quotienten M . Ein zugehöriges Quantenbündel ist das Thetabündel. Die Metrik h ist gegeben durch die lokale Funktion

$$\hat{h} = \exp\left(\frac{\pi(z - \bar{z})^2}{2 \text{Im } \tau}\right).$$

Der Raum der globalen Schnitte ist eindimensional und wird durch die Riemannsche Thetafunktion

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi n z)$$

erzeugt. Betrachtet man die Tensorpotenzen von L , so erhält man mit dem Satz von von Riemann-Roch $\dim \Gamma_{hol}(M, L^m) = m$. Eine Basis der Schnitte wird durch die Thetafunktionen mit Charakteristiken gegeben. Zur Definition siehe etwa [D] oder [99]. Das Bündel L^3 ist sehr ampel [99]. Alle Objekte (Schnitte, Metriken, etc.) auf M werden gegeben als Funktionen auf der Überlagerung \mathbb{C} , welche das richtige Transformationsverhalten unter dem Gitter Λ haben (d.h. durch automorphe Objekte).

3. Höherdimensionale komplexe Tori. Da ein quantisierbarer komplexer Torus projektiv ist, haben wir es immer mit abelschen Varietäten zu tun. Insbesondere haben wir die gesamte Schlagkraft der Thetafunktionen zur Verfügung. Damit kann die Beschreibung vom letzten Beispiel auf diesen Fall übertragen werden. Dies möchte ich hier nicht tun. Entsprechende Berechnungen wurden in [A] ausgeführt. Dort beweisen wir für diesen Fall auch die Approximationsaussagen für die Quantenoperatoren, da wir 1990 noch nicht den Beweis hatten, welcher für beliebige kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten funktioniert.

4. Riemannsche Flächen vom Geschlecht $g \geq 2$. Für solche Riemannsche Flächen M ist $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die universelle Überlagerung. Genauer kann diese Überlagerung wie folgt beschrieben werden. Es sei

$$SU(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \mid |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}. \quad (5-27)$$

Die Elemente R von $SU(1,1)$ operieren durch gebrochen lineare Transformationen

$$z \mapsto Rz := \frac{az + b}{\bar{a}z + \bar{b}} \quad (5-28)$$

auf \mathcal{D} . Zu M gibt es eine Fuchssche Gruppe G , d.h. eine diskrete Untergruppe von $SU(1,1)$ welche noch einige zusätzliche Bedingungen erfüllt [74], so daß M analytisch isomorph zum Orbitraum $M \cong \mathcal{D}/G$ ist. Umgekehrt definiert jede Fuchssche Gruppe (ohne parabolische und elliptische Elemente) eine solche kompakte Riemannsche Fläche. Analog zum Torusfall werden alle Objekte durch Funktionen auf \mathcal{D} mit entsprechendem Transformationsverhalten unter der Gruppe G beschrieben. \mathcal{D} selbst ist eine (nichtkompakte) Kähler-Mannigfaltigkeit mit der Kähler-Form

$$\omega(z) = \frac{2i}{(1 - z\bar{z})^2} dz \wedge d\bar{z}. \quad (5-29)$$

Man berechnet leicht $R'(z) = (\bar{b}z + \bar{a})^{-2}$ und damit weiter $\omega(Rz) = \omega(z)$. Damit ist ω invariant unter $SU(1,1)$ und definiert deshalb eine Kähler-Form ω_M auf M .

Eine (holomorphe) Funktion f auf \mathcal{D} heißt automorphe Form zur Gruppe G vom Gewicht $2k$, falls für alle $R = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in D$ gilt

$$f(Rz) = (\bar{b}z + \bar{a})^{2k} f(z) = R'(z)^{-k} f(z). \quad (5-30)$$

Daraus folgt

$$f(z)(dz)^k = f(Rz)(d(Rz))^k .$$

Damit können die holomorphen Differentialformen vom Gewicht k , d.h. die Schnitte in die k -fache Tensorpotenz des kanonischen Bündels \mathcal{K} , mit den automorphen Formen vom Gewicht $2k$ identifiziert werden. Das kanonische Bündel \mathcal{K} (d.h. das Bündel, welches die Differentiale (vom Gewicht 1) als Schnittgarbe hat) ist ein Quantenbündel zu (M, ω) . Die komplexe Struktur von M wird durch die Fuchsche Gruppe G bestimmt. Für eine generische Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g > 2$ ist \mathcal{K} bereits ample. In jedem Fall wird aber \mathcal{K}^3 sehr ample sein [160]. Der Satz von Riemann-Roch gibt die folgenden Aussagen über die Dimensionen

$$\dim \Gamma_{hol}(M, \mathcal{K}^m) = \begin{cases} g, & m = 1, \\ (2m - 1)(g - 1), & m \geq 2 . \end{cases}$$

Um die Metrik auf K^m anzugeben, wählen wir zuerst einen Fundamentalbereich $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ der Gruppenaktion von G . Die Metrik ist definiert durch

$$h(\varphi, \psi)(z) = (1 - z\bar{z})^m \overline{\widehat{\varphi}(z)} \widehat{\psi}(z) . \quad (5-31)$$

Hierbei sind φ und ψ beliebige Schnitte und $\widehat{\varphi}$ bzw. $\widehat{\psi}$ deren Repräsentanten auf \mathcal{D} . Es ergibt sich $h(\varphi, \psi)(z) = h(\varphi, \psi)(Rz)$, d.h. die Metrik ist wohldefiniert auf M . Ein Skalarprodukt auf dem Raum der Schnitte erhält man durch Integration von (5-31) mit dem Volumenmaß über den Fundamentalbereich

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\mathcal{F}} (1 - z\bar{z})^m \overline{\widehat{\varphi}(z)} \widehat{\psi}(z) \frac{2i dz \wedge d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2} . \quad (5-32)$$

Bis auf einen skalaren Faktor ist dies das Petersson'sche Skalarprodukt der automorphen Formen. Eine äquivalente Beschreibung kann auch durch die obere Halbebene $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ anstatt \mathcal{D} und $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ anstatt $\text{SU}(1, 1)$ erhalten werden.

5. Der projektive Raum. Sei \mathbb{P}^n der komplexe projektive Raum mit den homogenen Koordinaten $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$. \mathbb{P}^n entsteht durch Quotientenbildung aus dem $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ unter der Äquivalenzrelation

$$z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \sim z' = (z'_0, z'_1, \dots, z'_n) \iff \text{es gibt ein } \lambda \in \mathbb{C}^* : z = \lambda \cdot z' .$$

Sei $U_0 := \{(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \mid z_0 \neq 0\}$ eine affine Standardkarte. Auf dieser Karte haben wir die lokalen Koordinaten $w_j = z_j/z_0$, $j = 1, \dots, n$. Die Fubini-Study-Form ω_{FS} (4-10) definiert eine Kähler-Struktur auf \mathbb{P}^n . Dies ist die Standardstruktur des projektiven Raums. Die Form ist bis auf den Faktor $-i$ die Krümmungsform des Hyperebenenbündels H . D.h. H ist ein Quantenbündel. Die globalen holomorphen Schnitte von H^m können mit den homogenen Polynomen vom Grad m in den $n+1$ Variablen z_0, z_1, \dots, z_n identifiziert werden. Auf obiger affiner Karte entsprechen sie beliebigen Polynomen in den n Variablen w_1, w_2, \dots, w_n vom Grad $\leq m$. Das Bündel H ist dual zum tautologischen Bündel U . Die Faser von U über dem Punkt $z \in \mathbb{P}^n$ besteht aus den Elementen in der Äquivalenzklasse von z . Die Metrik in \mathbb{C}^{n+1} definiert eine Metrik in U und somit auch auf H . Die Metrik auf den Potenzen von H wird in der affinen Karte gegeben durch die Funktion $(1 + \sum_{i=1}^n w_i \bar{w}_i)^{-m}$.

6. Projektive Kähler-Untermannigfaltigkeiten. Sei $i : M \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{P}^N (d.h. eine glatte projektive Varietät). Durch Einschränkung der Fubini-Study-Form ω_{FS} auf M erhalten wir $i^*(\omega_{FS})$, eine Kähler-Form auf M . Ebenfalls durch Einschränkung erhalten wir aus dem Hyperebenenbündel H ein Geradenbündel $i^*(H) = L$. Die Schnitte der Tensorpotenzen $L^m = (i^*H)^m = i^*(H^m)$ werden ebenfalls durch die homogene Polynome in \mathbb{P}^N gegeben. Sie werden lediglich auf M eingeschränkt. Natürlich werden diese Einschränkungen im allgemeinen nicht mehr linear unabhängig sein. Die Form ω_{FS} ist (bis auf einen Faktor) die Krümmungsform $c_1(H)$. Es gilt $c_1(i^*H) = i^*(c_1(H))$. Dies bedeutet i^*H ist ein Quantenbündel für die Mannigfaltigkeit $(M, i^*(\omega_{FS}))$. Hierbei ist die Metrik auf H ebenfalls einzuschränken. Dies zeigt insbesondere, daß jede projektive Mannigfaltigkeit quantisierbar ist (siehe die Feststellung 4.5).

An dieser Stelle ist es notwendig, auf das folgende hinzuweisen. Ist (M, ω) eine quantisierbare Mannigfaltigkeit und L ein zugehöriges Quantenbündel, welches wir bereits als sehr ampel annehmen wollen. Die Schnitte definieren eine Einbettung

$$\phi : M \hookrightarrow \mathbb{P}^N, \quad \text{mit} \quad \phi^*H = L.$$

Dies bedeutet M kann als projektive Untermannigfaltigkeit von \mathbb{P}^N aufgefaßt werden. Sei $i : \phi(M) \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ die Inklusion der Bildmenge, so ist $(\phi(M), i^*(\omega_{FS}))$ ebenfalls eine Kähler-Mannigfaltigkeit, welche quantisierbar ist mit dem Quantenbündel $i^*H = L'$. Offensichtlich vermittelt ϕ einen analytischen Isomorphismus

$\phi : (M, L) \rightarrow (\phi(M), L')$. Allerdings muß dies nicht ein Isomorphismus in der Kategorie der Kähler-Mannigfaltigkeiten sein. D.h. ω kann verschieden von $i^*(\omega_{FS})$ sein. Da $c_1(L) = c_1(L')$ wissen wir lediglich, daß ihre Kohomologieklassen identisch sind. Im Fall der Gleichheit der Formen sind die beiden Kähler-Strukturen identisch, und wir können M als projektive Kähler-Untermannigfaltigkeit von \mathbb{P}^n auffassen.

Da natürlich ω mit der Metrik g zusammenhängt, hat dieses Problem mit der isometrischen Einbettung von komplexen Mannigfaltigkeiten zu tun, wie sie etwa von Calabi [48] studiert wurde. Dort zeigt er auch, daß nicht jede komplexe algebraische Mannigfaltigkeit isometrisch eingebettet werden kann.

(d) Berezins kohärente Zustände

F. Berezin entwickelte in den Jahren 1974-75 mit Hilfe seiner "kohärenten Zustände"³ einen interessanten Zugang zur Quantisierung. Die Grundlagen hierzu wurden in [12] entwickelt. Hauptsächlich erfolgte die Durchführung auf beschränkten symmetrischen Gebieten in \mathbb{C}^n , siehe [13]. Die Grundidee, welche ich im folgenden näher beschreiben werde, ist den klassischen Phasenraum mit einem Hilbert-Raum in Verbindung zu bringen. Dies geschieht mit Hilfe eines "überevllständigen Systems von Zuständen" aus diesem Hilbert-Raum. Dieses System von Zuständen sind die kohärenten Zustände. Sie werden durch die Punkte des Phasenraums parametrisiert. Nimmt man nun "Erwartungswerte" eines beschränkten Operators in Bezug auf die kohärenten Zustände, so erhält man eine komplexwertige Funktion auf dem Phasenraum. Für den Teilraum, der in dieser Art und Weise auftretenden Funktionen (den kovarianten Symbolen), erhält man eine Quantisierungsabbildung. Desweiteren kann man durch das Produkt der Operatoren auf den zugeordneten Symbolen eine nichtkommutative, assoziative Algebrenstruktur erhalten (siehe (5-44)). In gewisser Weise ist dies ein dualer Prozeß zur Berezin-Toeplitz-Quantisierung. Dies wird durch (5-50) präzise gemacht. In [13] führt Berezin dieses Programm für beschränkte symmetrische Gebiete U in \mathbb{C}^n aus. Der Hilbert-Raum ist hier der Raum der holomorphen Funktionen auf U (in Bezug auf ein geeignetes Maß). Durch eine von \hbar abhängige Modifikation des Maßes erhält man eine \hbar -Abhängigkeit der gesamten Situation. Für diese Beispiele kann er zeigen, daß das

³"Kohärente Zustände" in verschiedenen Fassungen haben in der Mathematik und in der Physik eine reichhaltige Geschichte. Es sei hierzu auf den Übersichtsartikel [2] verwiesen.

eingeführte Produkt tatsächlich den Regeln (3-1) und (3-2) genügt. Auch einige allgemeinere Kähler-Mannigfaltigkeiten werden von ihm betrachtet. Kann man durch Entfernung eines Divisors D (am Beispiel \mathbb{P}^1 etwa $D = \{\infty\}$) die obige Situation erreichen, so kann man versuchen wie oben vorzugehen. Das Verhalten der Funktionen entlang des Divisors wird über das Maß kontrolliert. So erhält man am Beispiel \mathbb{P}^1 , daß h nur die diskreten Werte $\frac{\alpha}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, mit $\alpha \neq 0$ einer feste Konstanten, annehmen kann.

Eine konzeptionellere Betrachtungsweise der allgemeinen Situation wurde von Rawnsley [174] (siehe auch [44]) entwickelt. Diese möchte ich hier darstellen. Hierbei konzentriere ich mich gleich auf kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten. Sei also (M, ω) eine quantisierbare kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und (L, h, ∇) ein zugehöriges Quantenbündel. Das Bündel L sei bereits als sehr ample angenommen.⁴ Sei $\pi : L \rightarrow M$ die Projektion und L_0 der Totalraum des Bündels ohne den Nullschnitt. Sei $q \in L_0$ festgehalten und s ein beliebiger holomorpher Schnitt des Bündels L . Durch die Auswertung des Schnitts

$$s \mapsto s(\pi(q)) = \hat{q}(s) \cdot q \quad (5-33)$$

ist eine Linearform

$$\hat{q} : \Gamma_{hol}(M, L) \rightarrow \mathbb{C}$$

definiert. Mit Hilfe des Skalarprodukts auf den globalen holomorphen Schnitten gibt es nach dem Satz von Riesz⁵ genau einen holomorphen Schnitt e_q mit

$$\langle e_q, s \rangle = \hat{q}(s), \quad \forall s \in \Gamma_{hol}(M, L) . \quad (5-34)$$

Ist s_j , $j = 1, \dots, k := \dim \Gamma_{hol}(M, L)$ eine Orthonormalbasis des Schnitttraums, so kann e_q explizit geschrieben werden als

$$e_q = \sum_{j=1}^k \overline{\hat{q}(s_j)} s_j . \quad (5-35)$$

Insbesondere ist also die Abbildung

$$L_0 \rightarrow \Gamma_{hol}(M, L), \quad q \mapsto e_q \quad (5-36)$$

⁴Siehe die Bemerkung zu Beginn von Abschnitt 6.

⁵Wie in [12], bzw. [174] gezeigt, funktioniert dies auch im Fall nichtkompakter Kählermannigfaltigkeiten.

eine C^∞ -Abbildung. In der Tat ist sie sogar antiholomorph. Sei $x = \pi(q)$ und $q' \in \pi^{-1}(x)$ mit $q' \neq 0$, dann gilt $q' = cq$ mit einem $c \in \mathbb{C}^*$. Aufgrund (5-33) folgt dann $\widehat{q}' = c^{-1}\widehat{q}$ und weiter mit (5-34)

$$e_{cq} = \bar{c}^{-1} \cdot e_q . \quad (5-37)$$

Wäre $e_q = 0$, so würde dies bedeuten $\widehat{q} = 0$, bzw. wegen (5-33), daß alle holomorphen Schnitte bei $\pi(q)$ verschwinden. Da L als sehr ampel vorausgesetzt war, ist dies nicht möglich. Geht man über zum projektivierten Vektorraum $\mathbb{P}(\Gamma_{hol}(M, L))$ bei dem skalare Vielfache der Schnitte identifiziert werden, so sieht man, daß die Zuordnung $x \mapsto [e_{\pi^{-1}(x)}]$ wohldefiniert ist.

Definition 5.6. Für $q \in L_0$ heißen die Schnitte $e_q \in \Gamma_{hol}(M, L)$ *kohärente Vektoren*. Für $x \in M$ heißen die $[e_{\pi^{-1}(x)}] \in \mathbb{P}(\Gamma_{hol}(M, L))$ *kohärente Zustände*.

In Bezug auf die ONB der Schnitte ist obige Zuordnung gegeben als

$$x \mapsto e_q \mapsto (\overline{\widehat{q}(s_1)} : \overline{\widehat{q}(s_2)} : \dots : \overline{\widehat{q}(s_k)}) = (\overline{s_1(x)} : \overline{s_2(x)} : \dots : \overline{s_k(x)}) ,$$

da $s_j(x) = s_j(\pi(q)) = \widehat{q}(s_j) \cdot q$ ist. Insbesondere ist dies gerade das antiholomorphe der "üblichen" holomorphen Einbettung von M in \mathbb{P}^{k-1} mit Hilfe der Basis der globalen holomorphen Schnitte des sehr ampel Bündels L . Also

Proposition 5.7. *Die Abbildung*

$$M \rightarrow \mathbb{P}(\Gamma_{hol}(M, L)), \quad x \mapsto [e_{\pi^{-1}(x)}] \quad (5-38)$$

ist eine antiholomorphe Einbettung.

Faßt man M als Phasenraum eines mechanischen Systems auf, so wird dieser dadurch eingebettet in einen projektivierten Hilbert-Raum. Die Dynamik kann ebenfalls in der Sprache dieser Einbettung beschrieben werden. Siehe hierzu etwa [162], [163], [10].

Wir benötigen noch den folgenden Operator

$$P_{\pi(q)} = \frac{|e_q \rangle \langle e_q|}{\langle e_q, e_q \rangle} . \quad (5-39)$$

Aufgrund (5-37) hängen die Operatoren nur von den Punkten auf M ab. Offensichtlich gilt $P_{\pi(q)} \cdot P_{\pi(q)} = P_{\pi(q)}$ und damit handelt es sich um einen Projektor. Die Operatoren werden wiederum durch die Punkte auf der Mannigfaltigkeit parametrisiert. Sie heißen *kohärente Projektoren*.

Von Rawnsley wurde die Funktion

$$\epsilon(\pi(q)) := |q|^2 \langle e_q, e_q \rangle, \quad \text{mit} \quad |q|^2 := h(\pi(q))(q, q) \quad (5-40)$$

eingeführt. Seien s_1 und s_2 zwei Schnitte. Für einen festen Punkt $x = \pi(q)$ gilt $s_1(x) = \hat{q}(s_1)q$ und $s_2(x) = \hat{q}(s_2)q$ und damit

$$h(s_1, s_2)(x) = \overline{\hat{q}(s_1)} \cdot \hat{q}(s_2) \cdot |q|^2 = \langle s_1, e_q \rangle \langle e_q, s_2 \rangle |q|^2 = \langle s_1, P_x s_2 \rangle \cdot \epsilon(x). \quad (5-41)$$

Also durch Integration

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_M \langle s_1, P_x s_2 \rangle \epsilon(x) \Omega(x). \quad (5-42)$$

Diese Eigenschaft heißt *Übervollständigkeit*.

Definition 5.8. Sei B ein linearer Operator in $\Gamma_{hol}(M, L)$. Das *kovariante (Berezin-)Symbol* $\sigma(B)$ ist definiert als die Abbildung

$$M \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sigma(B)(x) := \text{Tr}(B \cdot P_x) = \frac{\langle e_q, B e_q \rangle}{\langle e_q, e_q \rangle}. \quad (5-42)$$

Offensichtlich ist $\sigma(B) \in C^\infty(M)$. Mit (5-34) gilt $\langle e_q, e_q \rangle = \hat{q}(e_q)$, bzw. $\langle e_q, B e_q \rangle = \hat{q}(B e_q)$. Damit ist $\sigma(B)$ sogar reell-analytisch. Aus der Definition folgt sofort

$$\sigma(B^*) = \overline{\sigma(B)}. \quad (5-43)$$

Die Abbildung

$$\text{End}(\Gamma_{hol}(M, L)) \rightarrow C^\infty(M), \quad B \mapsto \sigma(B)$$

ist injektiv (siehe [44], bzw. Prop. 8.7 und die Bemerkung nach Prop. 8.8) und hat als Bild einen linearen Unterraum \mathcal{A} von $C^\infty(M)$. Auf diesem Unterraum der kovarianten Symbole kann ein assoziatives, nichtkommutatives Produkt durch

$$\sigma(A) * \sigma(B) = \sigma(A \cdot B) \quad (5-44)$$

eingeführt werden. Um das Produkt explizit beschreiben zu können, führen wir das kovariante 2-Punktsymbol

$$\sigma(B)(\pi(q), \pi(q')) = \frac{\langle e_{q'}, B e_q \rangle}{\langle e_{q'}, e_q \rangle} \quad (5-45)$$

ein. Es ist wohldefiniert auf einer dichten offenen Teilmenge von $M \times M$, welche die Diagonale enthält. Es ist die analytische Fortsetzung des reell-analytischen kovarianten Symbols. Es ist antiholomorph in der ersten und holomorph in der zweiten Variablen. Desweiteren sei die (reell-analytische) Zweipunktfunktion durch

$$\psi(\pi(q), \pi(q')) = \frac{\langle e_{q'}, e_q \rangle \langle e_q, e_{q'} \rangle}{\langle e_q, e_q \rangle \langle e_{q'}, e_{q'} \rangle} \quad (5-46)$$

definiert. Es sei $x = \pi(q)$ und $y = \pi(q')$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sigma(A \cdot B)(x) &= \frac{\langle e_q, A \cdot B e_q \rangle}{\langle e_q, e_q \rangle} = \frac{\langle A^* e_q, B e_q \rangle}{\langle e_q, e_q \rangle} \\ &= \int_M h(A^* e_q, B e_q)(y) \frac{\Omega(y)}{\langle e_q, e_q \rangle} = \int_M \langle A^* e_q, e_{q'} \rangle \langle e_{q'}, B e_q \rangle \frac{|q'|^2 \Omega(y)}{\langle e_q, e_q \rangle} \\ &= \int_M \sigma(A)(y, x) \sigma(B)(x, y) \cdot \psi(x, y) \cdot \epsilon(y) \Omega(y) . \end{aligned}$$

Hierbei wurde (5-41), (5-45) und (5-46) benutzt.

Um von diesem globalen Bild in das Bild zu kommen, das Berezin benutzt, wählt man einen Schnitt $s_0 \in \Gamma_{hol}(M, L)$, $s_0 \not\equiv 0$. Sei $U = M \setminus (s_0)$, die offene Teilmenge, auf der der Schnitt nicht verschwindet. Auf U kann jeder Schnitt s beschrieben werden als $s(x) = \hat{s}(x) s_0(x)$ mit einer holomorphen Funktion \hat{s} auf U . Die Zuordnung $s \rightarrow \hat{s}$ definiert eine Isometrie von $\Gamma_{hol}(M, L^m)$ auf den L^2 -Raum der holomorphen Funktionen auf U in Bezug auf das Maß $\mu = h(s_0, s_0) \Omega$.

Zurück zur globalen Beschreibung. Wir führen das modifizierte Maß

$$\Omega_\epsilon(x) = \epsilon(x) \cdot \Omega(x)$$

ein. Das *kontravariante (Berezin-)Symbol* $\check{\sigma}(B)$ eines Operators B ist definiert durch die Darstellung des Operators als Integral (falls diese Darstellung existiert)

$$B = \int_M \check{\sigma}(B)(x) P_x \Omega_\epsilon(x) . \quad (5-47)$$

Proposition 5.9. *Das kontravariante Symbol $\check{\sigma}(T_f)$ des Toeplitz-Operator T_f zur Funktion f ist die Funktion selbst*

$$\check{\sigma}(T_f) = f . \quad (5-48)$$

Beweis. Sei $B = \int_M f(x)P_x \Omega_\epsilon(x)$ der Operator mit kontravariantem Symbol f . Für zwei holomorphe Schnitte s_1 und s_2 gilt

$$\langle s_1, B s_2 \rangle = \int_M f(x) \langle s_1, P_x s_2 \rangle \Omega_\epsilon(x) .$$

Nach (5-41) und (5-9)

$$\begin{aligned} \langle s_1, B s_2 \rangle &= \int_M f(x) h(s_1(x), s_2(x)) \Omega(x) = \int_M h(s_1(x), f(x) s_2(x)) \Omega(x) \\ &= \langle s_1, f s_2 \rangle = \langle s_1, T_f s_2 \rangle . \end{aligned}$$

Also $B = T_f$. \square

Aufgrund ihrer Definition hängen die kovarianten und kontravarianten Symbole eines Operators B über die Zweipunktfunktion (5-46) in folgender Weise zusammen

$$\sigma(B)(x) = \int \check{\sigma}(B)(y) \psi(x, y) \Omega_\epsilon(y) . \quad (5-49)$$

Führt man auf $\text{End}(\Gamma_{hol}(M, L))$ die Hilbert-Schmidt-Norm $\langle B, C \rangle := \text{Tr}(B^* \cdot C)$ und auf dem Raum der Funktionen die L^2 -Norm in Bezug auf das Maß Ω_ϵ ein, so gilt

Proposition 5.10. *Die Toeplitzabbildung $f \rightarrow T_f$ und die kovariante Symbolabbildung $B \rightarrow \sigma(B)$ sind zueinander adjungiert:*

$$\langle B, T_f \rangle = \langle \sigma(B), f \rangle_\epsilon . \quad (5-50)$$

Beweis. Sei $B \in \text{End}(\Gamma_{hol}(M, L))$ so berechnet sich

$$\begin{aligned} \langle B, T_f \rangle &= \text{Tr}(B^* \cdot T_f) = \text{Tr}(B^* \int_M f(x) P_x \Omega_\epsilon(x)) = \int_M f(x) \text{Tr}(B^* \cdot P_x) \Omega_\epsilon(x) \\ &= \int_M f(x) \sigma(B^*) \Omega_\epsilon(x) = \int_M \overline{\sigma(B)}(x) f(x) \Omega_\epsilon(x) = \langle \sigma(B), f(x) \rangle_\epsilon . \quad \square \end{aligned}$$

Im nichtkompakten klassischen Fall siehe Unterberger und Upmeyer für das entsprechende Resultat [198]. In [11] findet sich über das Symbolkalkül mehr Information .

Weiter unten werde ich ein Kriterium dafür angeben, wenn die ϵ -Funktion von Rawnsley konstant ist. In diesem Fall ist die Modifikation des Maßes irrelevant. Es gilt allgemein (siehe [44, p.55])

$$\text{Tr } A = \int_M \sigma(A) \epsilon(x) \Omega(x) . \quad (5-51)$$

Spezialisieren wir dies für die Identität (hat Symbol 1), so erhalten wir

$$\dim \Gamma_{hol}(M, L) = \int_M \epsilon(x) \Omega(x) .$$

Insbesondere gibt die Hirzebruch-Riemann-Roch-Formel Aussagen über den Wert des Integrals (beachte L ist als sehr ampel vorausgesetzt). Ist ϵ konstant, so ergibt sich

$$\epsilon = \frac{\dim \Gamma_{hol}(M, L)}{\text{vol } M} . \quad (5-52)$$

Allgemein erhalten wir mit der Darstellung (5-35)

$$\epsilon(x) = |q|^2 \langle e_q, e_q \rangle = |q|^2 \sum_{j=1}^k |\hat{q}(s_j)|^2 = \sum_{j=1}^k |\hat{q}(s_j)|^2 h(x)(q, q) = \sum_{j=1}^k h(s_j, s_j)(x) . \quad (5-53)$$

Um einen zusätzlichen Parameter \hbar zu erhalten, führt man nun alles für die Tensorpotenzen L^m aus und setzt $\hbar = \frac{1}{m}$. Dies ergibt kohärente Vektoren $e_q^{(m)}$, Zustände $[e_q^{(m)}]$, Projektoren $P_x^{(m)}$, $\epsilon^{(m)}$, etc.. Die kohärenten Symbole definieren wiederum einen Unterraum \mathcal{A}_\hbar von $C^\infty(M)$. Auf diesem Unterraum ist ein entsprechendes Produkt $*_\hbar$ definiert. Man möchte jetzt wiederum ein Korrespondenzprinzip (3-1) und (3-2) wie bei den Sternprodukten erreichen. Für den Fall, daß eine quasiglobale Koordinatenumgebung existiert, wurde unter entsprechenden Voraussetzungen dies von Berezin in [13, Thm. 2.38 und Thm. 2.39] ausgeführt. Um durch diesen Prozeß Sternprodukte im kompakten Fall einführen zu können, erweist sich die Konstanz von ϵ als wichtige Voraussetzung. In diesem Fall zeigen Cahen, Gutt und Rawnsley [44],[45] daß für $m \leq m'$ der Raum $\mathcal{A}_{1/m}$ als Teilraum

von $\mathcal{A}_{1/m}$ aufgefaßt werden kann. Desweiteren ist $\mathcal{A} := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{1/m}$ eine dichte Unteralgebra (unter punktweiser Multiplikation) von $C^\infty(M)$.

Für den projektiven Raum (Abschnitt 5 (c), Bsp. 5) erhalten wir in Verallgemeinerungen der Rechnungen, die für die projektive Gerade ausgeführt wurden, daß $\epsilon(x)$ konstant ist. Zur Illustration ergibt sich etwa im Fall des \mathbb{P}^1 (siehe (5-23)) mit der Darstellung (5-53)

$$\epsilon^{(m)}(x) = \sum_{l=0}^m \frac{1}{(1+z\bar{z})^m} \frac{m+1}{2\pi} \binom{m}{l} \bar{z}^l \cdot z^l = \frac{m+1}{2\pi} .$$

Ist M eine projektive Kähler-Untermannigfaltigkeit mit der induzierten Kähler-Struktur, Metrik, etc., die vom \mathbb{P}^n herkommt, dann ist $\epsilon^{(m)}$ ebenfalls eine Konstante. Umgekehrt wurde in [44] gezeigt, daß falls $\epsilon^{(m)}$ eine Konstante ist, die Einbettung via der globalen Schnitte die Kähler-Struktur respektiert, also eine isometrische Einbettung ist. Deshalb ist es nicht weiter verwunderlich, daß ein Zusammenhang mit Calabis "diastatic function" besteht [45]. Es sei noch erwähnt, daß in [45] für kompakte, homogene Kähler-Mannigfaltigkeiten, in [46] für die Einheitskreisscheibe und in [47] für beschränkte symmetrische Bereiche mit dieser Methode Sternprodukte konstruiert werden. Siehe auch Karabegov [127],[129] in diesem Zusammenhang.

Beispiel 5.11. Zur Illustration seien die kohärenten Zustände für \mathbb{P}^1 berechnet. Wir arbeiten in der Trivialisierung durch die affine Standardkarte und betrachten das Bündel H^m . Es sei ψ der Schnitt, der durch die Funktion 1 repräsentiert wird. Desweiteren sei $q \in H_0^m$ über w immer so gewählt, daß $q = \psi(w)$. In Bezug auf ψ läßt sich die orthonormale Schnittbasis beschreiben durch

$$s_k(z) = \sqrt{\frac{m+1}{2\pi} \binom{m}{k}} z^k \psi . \quad (5-54)$$

Setzen wir in (5-54) $z = w$, so erhalten wir $\hat{q}(s_k) = \sqrt{\frac{m+1}{2\pi} \binom{m}{k}} w^k$. Also

$$e_{\psi(w)} = \frac{m+1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \bar{w}^k z^k \psi(z) = \frac{m+1}{2\pi} (1 + \bar{w}z)^m \psi(z) . \quad (5-55)$$

Für das Quadrat der Norm ergibt sich unter Benutzung von (5-23)

$$\begin{aligned} \langle e_{\psi(w)}, e_{\psi(w)} \rangle &= \left(\frac{m+1}{2\pi} \right)^2 \int_M \frac{(1+w\bar{z})^m (1+\bar{w}z)^m}{(1+\bar{z}z)^m} \Omega(z) \\ &= \left(\frac{m+1}{2\pi} \right)^2 \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 \bar{w}^k \bar{w}^k \int_M \frac{\bar{z}^k z^k}{(1+\bar{z}z)^m} \Omega(z) = \frac{m+1}{2\pi} (1+\bar{w}w)^m . \end{aligned}$$

6. Die Approximationssätze zur Berezin-Toeplitz-Quantisierung

(a) Die Resultate

In diesem Kapitel wollen wir Approximationssätze für die Berezin-Toeplitz-Quantenoperatoren $T_f^{(m)}$ herleiten. Dies sollen Approximationssätze sein in dem Sinne, daß für den "klassischen Limes" $m \rightarrow \infty$ (bzw. $\hbar_m := \frac{1}{m} \rightarrow 0$) die klassische Information über die Poisson-Algebra zurückerhalten wird. Der erste Satz besagt, daß asymptotisch die $T_f^{(m)}$ sich normmäßig wie f verhalten. Der zweite Satz bringt den Kommutator zweier Toeplitz-Operatoren $T_f^{(m)}$ und $T_g^{(m)}$ in Bezug zur Poisson-Klammer $\{f, g\}$. Im Abschnitt 7 werde ich diese Sätze weiter ausbauen und die Existenz eines induzierten Sternprodukts herleiten. Im Abschnitt 8 werde ich sie in Zusammenhang bringen mit einem generellen Approximationsschema, welches von Bordemann, Hoppe, Schaller und dem Autor in [A] vorgeschlagen wurde.

Es sei an die **Generalvoraussetzung** erinnert, daß (M, ω) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit amplem Quantenbündel (Q, h, ∇) ist. Zusätzlich möchte ich voraussetzen, daß L bereits sehr ample ist. D.h. L soll bereits die Einbettung von M in einen projektiven Raum über seine globalen Schnitte ermöglichen. Dies ist keine entscheidende Einschränkung. Ist L ample, so gibt es ein m_0 , so daß L^{m_0} sehr ample ist. Durch Reskalierung der Kähler-Form ist $(M, m_0 \omega)$ eine quantisierbare Kähler-Mannigfaltigkeit und $(L^{m_0}, h^{(m_0)}, \nabla^{(m_0)})$ ein zugehöriges Quantenbündel.¹ Damit sind wir in der angenommenen Situation. Für die globalen Schnitte $s_1, s_2 \in \Gamma_{hol}(M, L^m)$ haben wir das von $h^{(m)}$ induzierte Skalarprodukt $\langle \dots, \dots \rangle$ (5-2), bzw. die zugeordnete Norm $\|\dots\|$. Für die Funktionen $f \in C^\infty(M)$ haben wir die sup-Norm $\|f\|_\infty$. Für die Operatoren $A \in \text{End}(\Gamma_\infty(M, L^m))$, bzw. $A \in \text{End}(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ haben wir die zugeordnete Operatornorm (5-4). Die folgenden zwei Theoreme sind Ergebnisse einer gemeinsamen Arbeit mit Eckhard Mein-

¹Die zugrundegelegte komplexe Mannigfaltigkeit ändert sich nicht.

renken und Martin Bordemann [B].

Theorem 6.1. *Sei M eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$ eine beliebige Funktion. Dann existiert für die Familie der Toeplitz-Operatoren $T_f^{(m)}$ zu f ein $C > 0$ derart, daß*

$$\|f\|_\infty - \frac{C}{m} \leq \|T_f^{(m)}\| \leq \|f\|_\infty \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \quad (6-1)$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_f^{(m)}\| = \|f\|_\infty. \quad (6-2)$$

Theorem 6.2. *Sei M eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und $f, g \in C^\infty(M)$ beliebige Funktionen. Dann erfüllt die Familie der Kommutatoren der Toeplitz-Operatoren $T_f^{(m)}$ und $T_g^{(m)}$ die Asymptotik*

$$\|m i [T_f^{(m)}, T_g^{(m)}] - T_{\{f,g\}}^{(m)}\| = O\left(\frac{1}{m}\right) \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \quad (6-3)$$

Einen Weg diese Approximationssätze zu zeigen ist es, eine Orthonormalbasis der globalen holomorphen Schnitten von L^m explizit anzugeben, den Projektionsoperator hinzuschreiben und dann die Norm des Toeplitz-Operators explizit auszurechnen. In [A] wurde dies von Bordemann, Hoppe, Schaller und dem Autor im Fall der komplex n -dimensionalen Tori unter Benutzung von Thetafunktionen getan. Der Fall der Riemannschen Zahlenkugel wurde vom Autor ausgeführt (nicht publiziert). Den Fall kompakter Riemannscher Flächen vom Geschlecht $g \geq 2$ behandelten Klimek und Lesniewski [137] mit Hilfe automorpher Formen. In all diesen Fällen war es möglich die Objekte mit Hilfe von Funktionen auf Überlagerungen zu beschreiben und die expliziten Rechnungen dort auszuführen. Es ist nicht verwunderlich, daß diese Technik auch für nichtkompakte symmetrische Gebiete funktioniert. Entsprechende Approximationssätze wurden für den Fall der Einheitskreisscheibe \mathcal{D} von Klimek und Lesniewski [136] gezeigt. Dieselben Autoren studierten in [138] durch Überlagerungstechniken auch weitere offene Riemannsche Flächen mit abelscher Fundamentalgruppe. Für irreduzible, beschränkte symmetrische Gebiete wurden die Approximationssätze durch Borthwick, Lesniewski und Upmeyer in [34] gezeigt. Entsprechende Resultate für Hermitesch-symmetrische Supermannigfaltigkeiten wurden von Borthwick, Klimek, Lesniewski und Rinaldi [30],[32] gezeigt.

Für beliebige kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten gibt es keine Chance, in dieser Art zum Ziel zu kommen. Unser Zugang ist hier ein vollkommen anderer. Wir gruppieren die $T_f^{(m)}$ zu einem globalen Objekt zusammen und wenden die Theorie der Toeplitz-Operatoren, wie sie von Boutet de Monvel und Guillemin [35], [105] entwickelt wurde, an, um die beiden Theoreme zu beweisen. Dies wird in den nächsten beiden Unterabschnitten geschehen.

Proposition 6.3. *Es gilt*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|[T_f^{(m)}, T_g^{(m)}]\| = 0. \quad (6-4)$$

Beweis. Aus Thm. 6.2 folgt mit der linken Seite der Dreiecksungleichung

$$\left| m \|[T_f^{(m)}, T_g^{(m)}]\| - \|T_{\{f,g\}}^{(m)}\| \right| \leq \|m \mathbf{i} [T_f^{(m)}, T_g^{(m)}] - T_{\{f,g\}}^{(m)}\| = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Für $m \rightarrow \infty$ gilt nach Thm. 6.1 $\|T_{\{f,g\}}^{(m)}\| \rightarrow \|\{f, g\}\|_\infty$, bleibt also endlich. Damit muß $\|[T_f^{(m)}, T_g^{(m)}]\|$ eine Nullfolge sein. \square

Mit $\|\cdot\|_m$ bezeichnen wir die reskalierte Operatornorm $\frac{1}{m}\|\cdot\|$.

Theorem 6.4. *Für die reskalierten Operatoren der geometrischen Quantisierung $\widehat{Q}_f^{(m)}$ haben wir das folgende Approximationsverhalten:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\widehat{Q}_f^{(m)}\|_m = \|f\|_\infty, \quad (6-5)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\widehat{Q}_f^{(m)}, \widehat{Q}_g^{(m)}\|_m = 0. \quad (6-6)$$

Beweis. Aufgrund Prop. 5.4 haben wir den folgenden Zusammenhang zwischen den beiden Quantenoperatoren

$$\widehat{Q}_f^{(m)} = \mathbf{i} m T_f^{(m)} - \frac{\mathbf{i}}{2} T_{\Delta f}^{(m)}. \quad (6-7)$$

Für die Normen gilt damit die Abschätzung

$$\left| \|T_f^{(m)}\| - \frac{1}{2m} \|T_{\Delta f}^{(m)}\| \right| \leq \|\widehat{Q}_f^{(m)}\|_m \leq \|T_f^{(m)}\| + \frac{1}{2m} \|T_{\Delta f}^{(m)}\|.$$

Aufgrund Thm. 6.1 bleibt für $m \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten lediglich $\|f\|_\infty$. Also die Behauptung (6-5).

Es gilt

$$[\widehat{Q}_f^{(m)}, \widehat{Q}_g^{(m)}] = -m^2 [T_f^{(m)}, T_g^{(m)}] + \frac{m}{2} [T_f^{(m)}, T_{\Delta g}^{(m)}] + \frac{m}{2} [T_{\Delta f}^{(m)}, T_g^{(m)}] - \frac{1}{4} [T_{\Delta f}^{(m)}, T_{\Delta g}^{(m)}] .$$

Damit berechnet sich

$$\begin{aligned} & \| [\widehat{Q}_f^{(m)}, \widehat{Q}_g^{(m)}] - \widehat{Q}_{\{f,g\}}^{(m)} \|_m \leq \| -m [T_f^{(m)}, T_g^{(m)}] - i T_{\{f,g\}}^{(m)} \| + \| A^{(m)} \| \\ \text{mit } A^{(m)} & := \frac{1}{2} [T_f^{(m)}, T_{\Delta g}^{(m)}] + \frac{1}{2} [T_{\Delta f}^{(m)}, T_g^{(m)}] - \frac{1}{4m} [T_{\Delta f}^{(m)}, T_{\Delta g}^{(m)}] + \frac{i}{2m} T_{\Delta\{f,g\}}^{(m)} . \end{aligned}$$

Mit Thm. 6.2 (für den ersten Normanteil) und mit Prop. 6.3, bzw. Thm. 6.1 (für den zweiten Normanteil) folgt die Behauptung (6-6). \square

Dieses Theorem besagt, daß $\widehat{Q}^{(m)}$ "approximativ" ein Lie-Homomorphismus von $\mathcal{P}(M)$ nach $\text{End}(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ ist. Diesen Punkt werde ich in Abschnitt 8 vertiefen.

Über die Toeplitz-Operatoren kann noch mehr gesagt werden.

Proposition 6.5. *Seien $f_1, f_2, \dots, f_r \in C^\infty(M)$, dann gilt:*

(a)

$$\| T_{f_1 \dots f_r}^{(m)} - T_{f_1}^{(m)} \dots T_{f_r}^{(m)} \| = O(m^{-1}) \quad (\text{für } m \rightarrow \infty) . \quad (6-8)$$

(b) *Sind die f_i reellwertig, so gilt*

$$\frac{1}{\dim \Gamma_{hol}(M, L^m)} \text{Tr} (T_{f_1}^{(m)} \dots T_{f_r}^{(m)}) = \frac{1}{\text{vol}(M)} \int f_1 \dots f_r \Omega + O(m^{-1}) . \quad (6-9)$$

Hierzu werde ich in Abschnitt (b) ebenfalls den Beweis geben. Ohne Beweis möchte ich aus [B] zitieren

Proposition 6.6. *Sei zu $f \in C^\infty(M)$, der Zeitentwicklungsoperator gegeben als $U^{(m)}(t) = \exp(-i m t T_f^{(m)})$. Bezeichne F^t den Hamiltonschen Fluß zu f , dann gilt*

$$\| U^{(m)}(t) T_g^{(m)} U^{(m)}(-t) - T_{(F^t)_* g}^{(m)} \| = O(m^{-1}) \quad (\text{für } m \rightarrow \infty) . \quad (6-10)$$

(b) Beweis von Theorem 6.2

Vom Quantenbündel (L, h) gehen wir über zum dualen Bündel $(U, k) := (L^*, h^{-1})$. In Bezug auf die Metrik k haben wir im Totalraum U das *Kreisbündel*

$$Q := \{ \lambda \in U \mid k(\lambda, \lambda) = 1 \} ,$$

welches das *Diskbündel*

$$D := \{ \lambda \in U \mid k(\lambda, \lambda) < 1 \}$$

berandet. Wir bezeichnen die jeweiligen Projektionen $U \rightarrow M$, $Q \rightarrow M$, $D \rightarrow M$ mit τ falls klar ist, welche gemeint ist. Ansonsten benützen wir τ_U etc. . Für $M = \mathbb{P}^N$ ist U das tautologische Bündel, d.h. das Bündel dessen Faser über dem Punkt $z \in \mathbb{P}^N$ durch die Gerade gegeben ist, welche durch den Punkt z repräsentiert wird. Insbesondere kann der Totalraum U ohne Nullschnitt mit $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ identifiziert werden. Für den Totalraum eines Bündels E ohne den Nullschnitt werde ich die Notation $E \setminus 0$ benutzen.

Ist M eine quantisierbare Kähler-Mannigfaltigkeit mit sehr amplen Bündel L und dazu dualen Bündel U , so kann M durch die Schnitte von L eingebettet werden nach \mathbb{P}^N mit einem geeigneten N , $i : M \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Via dieser Einbettung kann der Totalraum U aufgefaßt werden als abgeschlossene komplexe Untermannigfaltigkeit des Totalraums des tautologischen Bündels $U_{\mathbb{P}^N}$ des \mathbb{P}^N . Somit kann $U \setminus 0$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ aufgefaßt werden. Bildet man den Nullschnitt ($\cong M$) auf $0 \in \mathbb{C}^{N+1}$ ab, so erhält man eine Untervarietät, den *affinen Kegel* zur Varietät $i(M)$. Die Singularität bei $\{0\}$ ist normal. Dies bedeutet, daß die Funktionentheorie auf der Einbettung $U \hookrightarrow U_{\mathbb{P}^N}$ bereits durch $U \setminus 0 \hookrightarrow U_{\mathbb{P}^N} \setminus 0 \hookrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ beschreibbar ist. Wie in Abschnitt 5 (c), Beispiel 6, ausgeführt, bedeutet die Einbettung jedoch nicht, daß die Metrik auf U mit der eingeschränkten Standardmetrik von $U_{\mathbb{P}^N}$ übereinstimmt. Im allgemeinen werden sogar die Krümmungsformen verschieden sein.

Die Funktion $\tilde{k}(\lambda) := k(\lambda, \lambda)$ ist eine reellwertige Funktion auf dem Totalraum U . Auf einer lokalen Trivialisierung des Bündels U kann \tilde{k} ausgedrückt werden als

$$\tilde{k}(\lambda)|_i = \hat{k}(z) \cdot \bar{s}s,$$

mit den (lokalen) Koordinaten z auf M , der (holomorphen) Koordinate s in Faserrichtung und der reellwertige Funktion \hat{k} auf M , welche die Metrik k in dem gewählten Koordinatensystem (z, s) beschreibt. Das Diskbündel ist ein strikt-pseudokonvexes Gebiet (zur Definition siehe etwa [108, p.262], [98, p.42]). Es gilt nämlich

$$\tilde{k}(\lambda) < 1 \iff \lambda \in D \setminus 0, \quad \tilde{k}(\lambda) = 1 \iff \lambda \in Q .$$

Desweiteren ist

$$\partial_{z_i} \tilde{k} = \partial_{z_i} \hat{k} \cdot \bar{s}s, \quad \partial_{\bar{z}_i} \tilde{k} = \partial_{\bar{z}_i} \hat{k} \cdot \bar{s}s, \quad \partial_s \tilde{k} = \hat{k} \bar{s} ds, \quad \partial_{\bar{s}} \tilde{k} = \hat{k} s d\bar{s} .$$

Da $\hat{k}(z) \neq 0$ und $\bar{s}s \neq 0$, kann $d\tilde{k}$ auf Q eingeschränkt nicht verschwinden.

In Bezug auf die komplexe Struktur von U setzen wir

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2i} (\partial \log \tilde{k} - \bar{\partial} \log \tilde{k}) . \quad (6-11)$$

Da \tilde{k} reell ist, ist dies eine reelle Form. In den Koordinaten (z, s) berechnet sich $\tilde{\alpha}$ zu

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2i} (\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \log \hat{k}(z) + \frac{1}{2i} \frac{1}{\bar{s}s} (\bar{s} ds - s d\bar{s}) .$$

Geht man in Faserrichtung über zu reellen Koordinaten $s = re^{i\varphi}$, so ergibt sich

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2i} (\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \log \hat{k}(z) + d\varphi . \quad (6-12)$$

Die Form $\tilde{\alpha}$ eingeschränkt auf Q sei mit α bezeichnet. Insbesondere ist α nicht ausgeartet. Sei $d = \partial_z + \partial_{\bar{z}} + \partial_\varphi$ der totale Ableitungsoperator auf der Mannigfaltigkeit Q . Wir berechnen

$$d\alpha = \frac{1}{2i} (\partial_z + \partial_{\bar{z}}) (\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \log \hat{k}(z) + \partial_\varphi (d\varphi) = -i \partial_{\bar{z}} \partial_z \log \hat{k}(z) . \quad (6-13)$$

Aufgrund der Quantisierungsbedingung hatten wir in (4-27)

$$\omega = i \bar{\partial} \partial \log \hat{h} = -i \bar{\partial} \partial \log \hat{k} .$$

Somit erhalten wir nach Zurückziehen via τ auf Q die Beziehung

$$d\alpha = \tau^* \omega . \quad (6-14)$$

Auf Q ist eine Volumenform gegeben durch²

$$\nu = \frac{1}{2\pi}(d\alpha)^n \wedge \alpha = \frac{1}{2\pi}\tau^*(\omega)^n \wedge \alpha = \frac{1}{2\pi}\tau^*\Omega \wedge \alpha . \quad (6-15)$$

Aus (6-12) folgt lokal $\nu|_U = \tau^*(\Omega|_U) \wedge d\varphi$, damit ist ν nirgends ausgeartet auf Q . Die Form α ist somit eine Kontaktform für Q . Wir betrachten den L^2 -vervollständigten Raum $L^2(Q, \nu)$ der Funktionen auf dem Kreisbündel in Bezug auf diese Volumenform. Der verallgemeinerte Hardy-Raum \mathcal{H} ist der Abschluß des Raums der Funktionen aus $L^2(Q, \nu)$, welche zu holomorphen Funktionen auf dem ganzen Diskbündel fortsetzbar sind. Der verallgemeinerte Szegő-Projektor ist die Projektion

$$\Pi : L^2(Q, \nu) \rightarrow \mathcal{H} . \quad (6-16)$$

Sei $w = (w_0, w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ und $c \in \mathbb{C}^*$, so operiert \mathbb{C}^* durch Multiplikation auf $c \cdot w = (cw_0, cw_1, \dots, cw_N)$ auf \mathbb{C}^{N+1} . Schränken wir die Aktion auf Q und auf $c \in S^1$ ein, wird Q ein S^1 -Bündel. In den lokalen holomorphen Koordinaten (z, s) für $U \setminus 0$ wird die Aktion durch $c \cdot (z, s) = (z, cs)$ gegeben. Die Tensorpotenzen von U können als assoziierte Geradenbündel aufgefaßt werden. Die Schnitte ϕ des Bündels $L^m = U^{-m}$ werden identifiziert mit den Funktionen $\tilde{\phi}$ auf Q , welche die Äquivarianzbedingung

$$\tilde{\phi}(c\lambda) = c^m \tilde{\phi}(\lambda)$$

erfüllen. Der Unterraum \mathcal{H} bleibt erhalten bei der S^1 -Aktion. Wir benutzen wiederum die lokalen holomorphen Koordinaten (z, s) und schreiben $s = r(z)e^{i\varphi}$. Die Punkte von Q sind gegeben durch $k(z, \lambda) = 1$. Dies bedeutet $\hat{k}(z)\bar{s}s = 1$, bzw.

$$\hat{k}(z) \cdot r^2(z) = 1 . \quad (6-17)$$

Sei $\tilde{\phi}$ eine Funktion auf Q . In diesen Koordinaten kann sie als Fourierreihe

$$\tilde{\phi}(\lambda)|_U = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_m(z, r(z))e^{im\varphi} \quad (6-18)$$

geschrieben werden. Sei $c = e^{i\psi} \in S^1$. Die Relation $\tilde{\phi}(c\lambda) = \alpha(c)\tilde{\phi}(\lambda)$ bedeutet

$$\tilde{\phi}(c\lambda)|_U = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_m(z, r(z))e^{im(\varphi+\psi)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(c)\tilde{a}_m(z, r(z))e^{im\varphi} .$$

² $(d\alpha)^n := d\alpha \wedge d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha$ (n -mal)

D.h. $\tilde{a}_m(z, r(z))e^{im\psi} = \alpha(c)\tilde{a}_m(z, r(z))$. Aus $\tilde{a}_m \neq 0$ folgt $\alpha(c) = c^m$. Dies bedeutet zum einen, daß nur solche $\alpha(c) = c^m$ auftreten können. Andererseits gibt $\alpha(c) = c^m$ aber auch vor, daß $\tilde{\phi}$ notwendigerweise von der Form $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_m(\lambda)| = \tilde{a}_m(z, r)e^{im\varphi}$ ist. Drücken wir $\tilde{\phi}_m$ mit Hilfe von s aus, erhalten wir die Darstellung

$$\tilde{\phi}_m(\lambda)| = \hat{a}_m(z) \cdot s^m .$$

Damit ist $\tilde{\phi}_m$ genau dann fortsetzbar auf das Diskbündel D , falls $m \geq 0$ ist. Die Funktion $\tilde{\phi}_m$ ist holomorph genau dann, wenn die $\hat{a}_m(z)$ holomorph in z ist. Der Unterraum der holomorph fortsetzbaren Funktionen läßt sich deshalb schreiben als die vervollständigte direkte Summe $\mathcal{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(m)}$. Dabei operiert $c \in S^1$ auf $\mathcal{H}^{(m)}$ durch Multiplikation mit c^m . Durch

$$\chi_m : \tilde{\phi}_m \mapsto \hat{a}_m(z) = \hat{\phi}_m$$

wird ein Schnitt ϕ_m des Bündels L^m durch seine lokalen Repräsentanten gegeben. Eingeschränkt auf die holomorphen Funktionen erhalten wir somit eine Isomorphie

$$\chi_m : \mathcal{H}^{(m)} \rightarrow \Gamma_{hol}(M, L^m) . \quad (6-19)$$

Im Fall \mathbb{P}^N ist diese Beziehung nichts anderes, als die Identifikation der globalen Schnitte in das m -fache des Hyperebenenbündels mit den homogenen Polynomfunktionen vom Grad m auf \mathbb{C}^{N+1} .

Beide Räume besitzen ein Skalarprodukt.

Proposition 6.7. (a) Die kanonische Abbildung $\chi_m : \mathcal{H}^{(m)} \rightarrow \Gamma_{hol}(M, L^m)$ ist eine Isometrie.

(b) Die Räume $\mathcal{H}^{(m)}$ und $\mathcal{H}^{(n)}$ für $n \neq m$ sind orthogonal in $L^2(Q, \nu)$.

Beweis. Sei $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 \in \mathcal{H}^{(m)}$. Wir haben zu zeigen

$$\int_Q \overline{\tilde{\phi}_1(\lambda)} \tilde{\phi}_2(\lambda) \nu(\lambda) = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle .$$

Schreiben wir wiederum alles in einer lokalen Karte (z, s) so gilt für den Integranden

$$\frac{1}{2\pi} \overline{\hat{\phi}_1(z)} \hat{\phi}_2(z) s^m (\tau^* \Omega \wedge \alpha) = \frac{1}{2\pi} \overline{\hat{\phi}_1(z)} \hat{\phi}_2(z) r^{2m} (\tau^* \Omega \wedge \alpha) . \quad (6-20)$$

Die explizite Form von α in den lokalen Koordinaten zeigt aber $\tau^*\Omega \wedge \alpha = \tau^*\Omega \wedge d\varphi$. Führen wir die φ -Integration aus, so verschwindet $1/2\pi$. Aufgrund (6-17) folgt $r^2(z) = (\hat{k}(z))^{-1} = \hat{h}(z)$. Also ergibt sich der Integrand der M -Integration zu

$$\overline{\hat{\phi}_1(z)}\hat{\phi}_2(z)r^{2m}\Omega = (\hat{h}(z))^m\overline{\hat{\phi}_1(z)}\hat{\phi}_2(z)\Omega = h^{(m)}(\phi_1, \phi_2)(z)\Omega .$$

Integration über M liefert nun das Ergebnis.

(b) Sei $\tilde{\phi}_1 \in \mathcal{H}^{(m)}$ und $\tilde{\phi}_2 \in \mathcal{H}^{(n)}$ mit $n \neq m$. Im Integranden (6-20) erhalten wir als zusätzlichen Term den Ausdruck $e^{i\varphi(n-m)}$. Bei der Integration über φ ergibt sich Null, d.h. die Orthogonalität. \square

Von Boutet de Monvel und Guillemin wurde in [35], [105] das Konzept einer *Toeplitz-Struktur* (Σ, Π) entwickelt. Unsere Situation ist ein Beispiel hierfür (siehe [35]). Ich möchte hier nicht die allgemeine Theorie darlegen, sondern nur darstellen, was gebraucht wird. Bei uns ist Σ der von α erzeugte positive Kegel in T^*Q

$$\Sigma = \{ t\alpha(\lambda) \mid \lambda \in Q, t > 0 \} \subset T^*Q \setminus 0 \quad (6-21)$$

und Π ist der obige Projektor (6-16). Auf dem Kotangentenbündel T^*Q haben wir die kanonische symplektische Struktur ω_0 . Diese wird in folgender invarianten Weise definiert:³ Sei N eine beliebige Mannigfaltigkeit, T^*N das Kotangentenbündel und $\pi : T^*N \rightarrow N$ die Projektion. Desweiteren sei $\pi^* : T^*N \rightarrow T^*(T^*N)$ die induzierte Abbildung. Die Zuordnung $x \mapsto \pi^*(x)$ definiert eine 1-Form θ auf T^*N . Sind $q_i, i = 1, \dots, n$ Koordinaten auf N , so können die Schnitte ins Kotangentenbündel gegeben werden als Differentiale

$$\alpha(q) = p_1(q)dq_1 + p_2dq_2 + \dots + p_ndq_n .$$

Die Elemente in T^*N können deshalb lokal beschrieben werden mit Hilfe der Koordinatentupel

$$((q_1, q_2, \dots, q_n), (p_1, p_2, \dots, p_n)) .$$

Diese Koordinaten heißen "kanonische Koordinaten". In Bezug auf diese kanonische Koordinaten ist die Form θ gegeben als

$$\theta| = \sum_{i=1}^n p_i dq_i .$$

³Ich benutzte die Konventionen von Abraham-Marsden [1].

Die kanonische 2-Form ω_0 ist definiert durch

$$\omega_0 := -d\theta, \quad (6-22)$$

mit d dem Differentialoperator der totalen Ableitung auf T^*N . In kanonischen Koordinaten berechnet sich

$$\omega_0 = - \sum_i dp_i \wedge dq_i = \sum_i dq_i \wedge dp_i .$$

Diese Form definiert die symplektische Struktur auf T^*N . Es sei daran erinnert (siehe Abschnitt 2), daß damit eine Poisson-Struktur auf T^*N induziert wird. In lokalen Koordinaten lautet sie

$$\{f, g\}_1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) .$$

Zurück zu unserer Situation. Da Q strikt-pseudokonvex ist, ist, wie in [105,p.249] ausgeführt, der Kegel Σ eine symplektische Untermannigfaltigkeit von T^*Q . D.h. die Einschränkung von ω_0 auf Σ ist nicht ausgeartet und definiert eine symplektische Struktur.

Proposition 6.8. *Sei $\tau_\Sigma : \Sigma \rightarrow Q \rightarrow M$ die zusammengesetzte Projektion, so gilt für alle $f, g \in C^\infty(M)$*

$$\{\tau_\Sigma^* f, \tau_\Sigma^* g\}_\Sigma = -\frac{1}{t} \tau_\Sigma^* (\{f, g\}) . \quad (6-23)$$

Beweis. Sei α die obige 1-Form auf Q . Wir können sie als Abbildung $\alpha : Q \rightarrow T^*Q$ auffassen. Es gilt $\alpha^*(\theta) = \alpha$ [1, p.179]. Somit

$$d(\alpha^*\theta) = \alpha^*(d\theta) = -\alpha^*(\omega_0) .$$

Insgesamt also $\alpha^*(\omega_0) = -d\alpha$. Sei t eine feste positive, reelle Zahl, so erhalten wir aufgrund (6-14) für $\lambda \in Q$

$$\omega_0(t\alpha(\lambda)) = (t\alpha)^*(\omega_0)(\lambda) = -d(t\alpha)(\lambda) = -t\tau_Q^*\omega(\lambda) .$$

Sei Q_t die Untermannigfaltigkeit $\{t\alpha(\lambda) \mid \lambda \in Q\}$ von Σ (t fest), so gilt somit

$$\omega_{\Sigma|Q_t} = -t\tau_{Q_t}^*\omega . \quad (6-24)$$

Für die Funktionen auf Σ , welche Pullbacks von Funktionen auf M sind, ergibt sich damit (6-23). Beachte, daß aus $\omega' = r \cdot \omega$ für die induzierten Poisson-Klammern folgt $\{\dots, \dots\}' = \frac{1}{r} \{\dots, \dots\}$. \square

Definition 6.9. (Boutet de Monvel, Guillemin [35]). Ein (verallgemeinerter) Toeplitz-Operator der Ordnung k zur Toeplitz-Struktur (Σ, Π) ist ein Operator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ der Form

$$A = \Pi \cdot R \cdot \Pi$$

mit einem Pseudodifferentialoperator R der Ordnung k auf Q und dem verallgemeinerten Szegö-Projektor $\Pi : L^2(Q, \nu) \rightarrow \mathcal{H}$.

Boutet de Monvel und Guillemin zeigen in [35] eine Reihe von Eigenschaften. Für uns sind die folgenden von besonderer Wichtigkeit. Die Toeplitz-Operatoren bilden einen Ring. Das Hauptsymbol $\sigma(A)$ eines Toeplitz-Operators $A = \Pi R \Pi$ ist definiert als die Einschränkung des Hauptsymbols des Pseudodifferentialoperators R auf Σ . Hierbei ist zu beachten, daß R nicht durch A fixiert ist. Trotzdem konnten sie zeigen, daß das Hauptsymbol in der Tat wohldefiniert ist und denselben Regeln wie die Hauptsymbole von Pseudodifferentialoperatoren genügt. Diese sind (wenn man die Symbolkonvention von Duistermaat verwendet [68])

$$\sigma(A_1 A_2) = \sigma(A_1) \sigma(A_2), \quad \sigma([A_1, A_2]) = i \{ \sigma(A_1), \sigma(A_2) \}_\Sigma. \quad (6-25)$$

In dieser Konvention ist das vollständige Symbol $\sigma_{comp}(R)$ eines Pseudodifferentialoperators R im Fall $M = \mathbb{R}^n$ definiert durch die Darstellung als Fourier-Integral

$$Ru(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i\langle x-y, \eta \rangle} \sigma_{comp}(R)(x, \eta) u(y) dy d\eta. \quad (6-26)$$

Das Hauptsymbol ist der führende Term. Für partielle Differentialoperatoren

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$$

(α ist ein Multiindex) ergibt sich das Symbol zu

$$\sigma_{comp}(P)(x, \eta) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\eta)^\alpha$$

und das Hauptsymbol zu

$$\sigma(P)(x, \eta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (i\eta)^\alpha.$$

Desweiteren gilt (wie bei den Pseudodifferentialoperatoren): Ist A ein Toeplitz-Operator von der Ordnung k mit verschwindendem Hauptsymbol, dann ist er ein Toeplitz-Operator von der Ordnung $k - 1$.

Hier haben wir es lediglich mit zwei Operatoren zu tun:

(1) Der Erzeuger der S^1 -Aktion ist

$$D_\varphi = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (6-27)$$

Das Symbol berechnet sich zu t und es handelt sich um einen Operator von erster Ordnung. Da die Elemente von $\mathcal{H}^{(m)}$ lokal als $\phi(\lambda) = \tilde{a}_m(z)e^{im\varphi}$ gegeben werden können gilt $D_\varphi \phi = m \cdot \phi$. Insbesondere läßt D_φ die Räume $\mathcal{H}^{(m)}$ und somit auch \mathcal{H} invariant. D.h. es gilt: $\Pi \cdot D_\varphi \cdot \Pi = D_\varphi \cdot \Pi$. Somit ist (6-27) ein Toeplitz-Operator der Ordnung 1. Eingeschränkt auf $\mathcal{H}^{(m)}$ operiert er als Multiplikation mit m .

(2) Für die Funktion $f \in C^\infty(M)$ sei M_f der Multiplikationsoperator auf $L^2(Q, \nu)$, d.h. es ist definiert

$$M_f(g)(\lambda) := f(\tau(\lambda)) \cdot g(\lambda) .$$

Wir betrachten den Toeplitz-Operator

$$T_f := \Pi \cdot M_f \cdot \Pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} . \quad (6-28)$$

Per Konstruktion ist M_f konstant entlang der Fasern in Q . Dies bedeutet T_f vertauscht mit der S^1 -Aktion. Somit kann T_f zerlegt werden in $T_f = \bigoplus_{m=0}^{\infty} T_f^{(m)}$, wobei $T_f^{(m)}$ die Einschränkung von T_f auf $\mathcal{H}^{(m)}$ ist. Nach der Identifikation von $\mathcal{H}^{(m)}$ mit dem Raum der holomorphen Schnitte $\Gamma_{hol}(M, L^m)$ und unter Benutzung der offensichtlichen Zerlegung $\Pi = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Pi^{(m)}$ sehen wir, daß die neu definierten $T_f^{(m)}$ in der Tat mit den $T_f^{(m)}$, welche in (5-7) definiert wurden, übereinstimmen. Per Konstruktion ist ein zugeordneter Pseudodifferentialoperator zu T_f der Multiplikationsoperator M_f . Dies ist ein Operator von der Ordnung Null. Sein Symbol ist die Funktion f auf M via τ auf Q und weiter auf T^*Q zurückgezogen. Für das Symbol erhalten wir

$$\sigma(T_f) = \tau_\Sigma^*(f) . \quad (6-29)$$

Beweis von Theorem 6.1. Wir betrachten den Operator

$$A := D_\varphi^2 [T_f, T_g] + i D_\varphi T_{\{f,g\}} .$$

Formal ist A ein Operator der Ordnung 1. Es gilt nach (6-23)

$$\sigma([T_f, T_g]) = i \{ \tau_\Sigma^* f, \tau_\Sigma^* g \}_\Sigma = -\frac{i}{t} \tau_\Sigma^* \{f, g\} .$$

Andererseits ist $\sigma(T_{\{f,g\}}) = \tau_\Sigma^* \{f, g\}$ und $\sigma(D_\varphi) = t$. Somit verschwindet das Hauptsymbol von der Ordnung 1 für A . Dies bedeutet A ist ein Operator von der Ordnung Null. Die Mannigfaltigkeit M und damit auch Q waren als kompakt vorausgesetzt. Pseudodifferentialoperatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten sind beschränkt, somit ist A beschränkt. Er kommutiert offensichtlich mit der S^1 -Aktion, d.h. wir können A zerlegen als

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} A^{(m)} .$$

Hierbei ist $A^{(m)}$ die Einschränkung von A auf $\mathcal{H}^{(m)}$

$$A^{(m)} = A|_{\mathcal{H}^{(m)}} = m^2 [T_f^{(m)}, T_g^{(m)}] + i m T_{\{f,g\}}^{(m)} .$$

Nun gilt allerdings $\|A^{(m)}\| \leq \|A\|$. Dies bedeutet

$$\|m [T_f^{(m)}, T_g^{(m)}] + i T_{\{f,g\}}^{(m)}\| \leq \frac{\|A\|}{m} ,$$

also nach Multiplikation mit i die Aussage (6-3). Hierbei ist zu beachten, daß aufgrund Prop. 6.7 die Norm von $A^{(m)}$ tatsächlich mit der Operatornorm zu $\Gamma_{hol}(M, L^m)$ übereinstimmt.

Beweis von Prop. 6.5. Teil (a): Die Notation sei wie oben und seien $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$. Wir betrachten den Operator

$$A := D_\varphi(T_{f_1 f_2} - T_{f_1} T_{f_2}) .$$

Formal handelt es sich hierbei um einen Toeplitz-Operator der Ordnung 1. Sein Hauptsymbol berechnet sich zu

$$\sigma(A) = t \cdot (\tau_\Sigma^*(f_1 f_2) - \tau_\Sigma^*(f_1) \tau_\Sigma^*(f_2)) .$$

Da

$$\tau_\Sigma^*(f_1 f_2) = \tau_\Sigma^*(f_1) \tau_\Sigma^*(f_2)$$

ist, folgt daß das Hauptsymbol dieser Ordnung verschwindet. Also handelt es sich um einen Operator der Ordnung Null, der somit beschränkt ist. Analog zum obigen Beweis vertauscht dieser mit der S^1 -Aktion und wir können ihn in seine Komponenten $A^{(m)}$ zerlegen. Wir erhalten

$$A^{(m)} = m \cdot (T_{f_1 f_2}^{(m)} - T_{f_1}^{(m)} T_{f_2}^{(m)}) .$$

Aus $\|A^{(m)}\| \leq \|A\|$ folgt die Aussage (6-8) für zwei Funktionen. Induktiv folgt sie dann für Produkte endlich vieler Funktionen.

Teil (b): Wir beginnen mit einer reellwertigen Funktion f . Der Operator T_f ist selbstadjungiert. Sei $d(m) = \dim \mathcal{H}^{(m)}$ und seien $\lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \dots, \lambda_{d(m)}^{(m)}$ die Eigenwerte der Einschränkung von T_f auf $\mathcal{H}^{(m)}$. Insbesondere sind dies auch die Eigenwerte von $T_f^{(m)}$ auf $\Gamma_{hol}(M, L^m)$. Wie in [35] ausgeführt ($n = \dim_{\mathbb{C}} M$) sei

$$\mu_m = \frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{d(m)} \delta(\lambda - \lambda_i^{(m)})$$

das diskrete Spektralmaß. Gemäß Theorem 13.13 aus [35] konvergiert es schwach zu einem Grenzmaß

$$\mu(g) = \gamma_M \int_M g(f(z)) \Omega(z)$$

mit einer universellen Konstante γ_M , welche nur von der Mannigfaltigkeit M abhängt. Setzen wir $g \equiv 1$, so erhalten wir

$$\frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{d(m)} \lambda_i^{(m)} = \frac{1}{m^n} \operatorname{Tr} T_f^{(m)} = \gamma_M \int_M f \Omega + O\left(\frac{1}{m}\right) .$$

(Die $O(\frac{1}{m})$ Asymptotik folgt aus dem Beweis des benützten Theorems.) Ausgewertet für $f \equiv 1$, d.h. $T_f^{(m)} = id$, ergibt sich

$$\gamma_M = \frac{\dim \Gamma_{hol}(M, L^m)}{m^n \cdot \text{vol}(M)} .$$

Beachte: Das Hirzebruch-Riemann-Roch-Theorem besagt

$$\dim \Gamma_{hol}(M, L^m) = A \cdot m^n + O(m^{n-1}) ,$$

D.h. $\frac{\dim \Gamma_{hol}(M, L^m)}{m^n} = O(1)$. Somit gilt

$$\frac{\text{Tr } T_f^{(m)}}{\dim \Gamma_{hol}(M, L^m)} = \frac{1}{\text{vol } M} \int_M f(z) \Omega(z) + O\left(\frac{1}{m}\right) .$$

Dies liefert die Aussage für eine Funktion. Seien nun zwei reellwertige Funktionen f_1 und f_2 gegeben. Aufgrund Teil (a) gilt

$$T_{f_1 f_2}^{(m)} - T_{f_1}^{(m)} T_{f_2}^{(m)} = C^{(m)} \quad \text{mit} \quad \|C^{(m)}\| = O\left(\frac{1}{m}\right) .$$

Damit ist aber $\frac{1}{\dim \Gamma_{hol}(M, L^m)} \text{Tr } C^{(m)} = O\left(\frac{1}{m}\right)$. Also

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dim \Gamma_{hol}(M, L^m)} \text{Tr} (T_{f_1}^{(m)} T_{f_2}^{(m)}) &= \frac{1}{\dim \Gamma_{hol}(M, L^m)} \text{Tr}(T_{f_1 f_2}^{(m)}) + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{\text{vol } M} \int f_1 f_2 \Omega + O\left(\frac{1}{m}\right) . \end{aligned}$$

Für beliebig viele Funktion folgt (b) durch triviale Induktion. \square

(c) Beweis von Theorem 6.1

Zuerst soll die **rechte Seite** der Ungleichung (6-1) gezeigt werden. Da die $\Pi^{(m)}$ Projektoren sind, gilt

$$\|T_f^{(m)}\| = \|\Pi^{(m)} M_f^{(m)} \Pi^{(m)}\| \leq \|M_f^{(m)}\| .$$

M_f ist der Multiplikationsoperator. Sei $\varphi \neq 0$, dann gilt

$$\frac{\|M_f^{(m)} \varphi\|^2}{\|\varphi\|^2} = \frac{\int_M h^{(m)}(f\varphi, f\varphi) \Omega}{\int_M h^{(m)}(\varphi, \varphi) \Omega} = \frac{\int_M \bar{f} f h^{(m)}(\varphi, \varphi) \Omega}{\int_M h^{(m)}(\varphi, \varphi) \Omega} \leq \|f\|_\infty^2 .$$

Daraus folgt

$$\|T_f^{(m)}\| \leq \|M_f^{(m)}\| = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|M_f^{(m)}\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \|f\|_\infty.$$

Für die **linke Seite** findet sich in [B] ein allgemeiner Beweis, der Fourier-Integraloperatoren, Hermite-Distributionen und kohärente Zustände benützt. Eine Darlegung der Methoden würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Weiter unten werde ich eine allgemeine Beweisskizze geben. Für den Fall, daß (M, ω_M) eine projektive Kähler-Untermannigfaltigkeit ist, haben wir allerdings einen einfacheren Beweis, der im Rahmen der vorgestellten Theorie bleibt. Es sei daran erinnert, daß für projektive Kähler-Untermannigfaltigkeiten $i : M \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ die, via der Einbettung zurückgezogene, Fubini-Study-Form ω_{FS} auf \mathbb{P}^N mit der Kähler-Form ω_M übereinstimmt. Der Pullback des tautologischen Bündels auf \mathbb{P}^N ist das Duale des Quantenbündels auf M . Dieses Bündel nennen wir (wie oben) U . Auf dem tautologischen Bündel haben wir die Hermitesche Standardmetrik $k(z, w) := \langle z, w \rangle = \bar{z}w$ in \mathbb{C}^{N+1} . Diese definiert auch eine Metrik auf U . Im allgemeinen wird diese Metrik nicht identisch sein mit der Metrik k , welche durch das Quantenbündel vorgegeben ist. Durch die Bedingung $i^*\omega_{FS} = \omega_M$ für den Fall der projektiven Kähler-Untermannigfaltigkeiten, können wir die zurückgezogene Metrik benutzen, um auf dem Quantenbündel eine äquivalente Metrik zu definieren, welche auch weiterhin die Quantisierungsbedingung $\omega_M = -i\bar{\partial}\partial \log \hat{k}$ (siehe (4-27)) erfüllt. Im folgenden sei k diese äquivalente Metrik. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß der Pullback hier nichts anderes ist, als das Einschränken der Objekte auf die Untermannigfaltigkeit M . Bezeichne $\tau : Q \rightarrow M$ die Bündelprojektion.

Definition 6.10. ([48], [45]). Die *Calabi diastatic function* ist definiert als

$$D : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, \quad D(\tau^{-1}(z), \tau^{-1}(w)) = -\log |k(\lambda, \mu)|^2. \quad (6-30)$$

Hierbei sind λ und μ über den Punkten z und w auf M derart zu wählen, daß gilt $k(\lambda, \lambda) = k(\mu, \mu) = 1$.

Man rechnet sofort nach, daß die Definition von der Wahl der λ und μ nicht abhängt. Desweiteren gilt

$$|k(\lambda, \mu)|^2 \leq k(\lambda, \lambda) \cdot k(\mu, \mu) = 1. \quad (6-31)$$

Somit ist $D(x, y) \geq 0$. Die Funktion D verschwindet genau auf der Diagonalen, denn nur für $\lambda = \alpha\mu$ mit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ folgt Gleichheit in (6-31).

Proposition 6.11. *Sei $z \in M$ ein fester Punkt. Die reellwertige Funktion*

$$D_z : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, \quad w \mapsto D_z(w) := D(z, w)$$

ist ≥ 0 und besitzt genau bei z eine Nullstelle. Es gilt $dD_z(z) = 0$ und $\det(\text{Hess}(D_z(w))|_{w=z}) \neq 0$.

Beweis. Alle Aussagen bis auf die letzte ergeben sich sofort. O.B.d.A. können wir annehmen, daß w und z in einer gemeinsamen trivialisierenden Umgebung liegen. Wir benutzen wiederum die Koordinaten

$$\lambda \leftrightarrow (z, s), \quad s = r_s e^{i\varphi}, \quad \mu \leftrightarrow (w, t), \quad t = r_t e^{i\psi},$$

und schreiben

$$k(\lambda, \mu) = \hat{k}(z, w) \cdot \bar{s} \cdot t.$$

Die Umgebung sei klein genug, daß $\hat{k}(z, w) \neq 0$. Damit

$$D(z, w) = -\log |k(\lambda, \mu)|^2 = -\log(\hat{k}(z, w) \cdot \overline{\hat{k}(z, w)} \cdot \bar{s}s \cdot \bar{t}t).$$

Mit $r_s^2 \hat{k}(z, z) = 1$, $r_t^2 \hat{k}(w, w) = 1$ und $\overline{\hat{k}(z, w)} = \hat{k}(w, z)$ kann man $D(z, w)$ in den lokalen Koordinaten schreiben als

$$D(z, w) = -\log \frac{\hat{k}(z, w) \hat{k}(w, z)}{\hat{k}(z, z) \hat{k}(w, w)} = \log \hat{k}(z, z) + \log \hat{k}(w, w) - \log(\hat{k}(z, w) \hat{k}(w, z)).$$

Für die Ableitung ergibt sich (beachte \hat{k} ist antiholomorph in seinem ersten Argument)

$$\partial_{w_i} D_z(w) = \frac{\partial_{w_i} \hat{k}(w, w)}{\hat{k}(w, w)} - \frac{\partial_{w_i} \hat{k}(z, w)}{\hat{k}(z, w)}.$$

Damit berechnet sich

$$\partial_{w_j} \partial_{w_i} D_z(w)|_{w=z} = 0$$

und

$$\partial_{\bar{w}_j} \partial_{w_i} D_z(w)|_{w=z} = \partial_{\bar{z}_j} \partial_{z_i} \log \hat{k}(z, z) = i g_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j. \quad (6-32)$$

Somit ist die Hesse-Matrix bis auf einen Faktor i identisch mit der Matrix der Metrikkoeffizienten. Deren Determinante verschwindet aber nicht. \square

Sei als z ein Punkt $x_0 \in M$ gewählt an dem $|f(x_0)|$ maximal wird. Sei $\lambda_0 \in \tau^{-1}(x_0)$ mit $k(\lambda_0, \lambda_0) = 1$ gewählt. Das Paar (x_0, λ_0) sei festgehalten. Wir betrachten die holomorphen Funktionen $\tilde{\Phi}^{(m)}$ auf U gegeben durch $\tilde{\Phi}^{(m)}(\lambda) = k(\lambda_0, \lambda)^m$. Eingeschränkt auf das Kreisbündel Q sehen wir, daß $|\tilde{\Phi}^{(m)}(\lambda)| \leq 1$ ist. Es gilt $|\tilde{\Phi}^{(m)}(\lambda)| = 1$ genau dann, wenn λ über x_0 liegt. Mit wachsendem m zentrieren sich die $\tilde{\Phi}^{(m)}$ immer mehr um den Punkt x_0 . Es gilt

$$\tilde{\Phi}^{(m)}(c\lambda) = c^m k(\lambda_0, \lambda)^m = c^m \tilde{\Phi}^{(m)}(\lambda) ,$$

d.h. $\tilde{\Phi}^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}$ und definiert somit einen Schnitt $\Phi^{(m)} \in \Gamma_{hol}(M, L^m)$. Aufgefaßt als Funktionen von λ_0 sind die $\Phi^{(m)} = \Phi_{\lambda_0}^{(m)}$ im wesentlichen gerade die kohärenten Zustände, wie sie in Abschnitt 5(d) diskutiert wurden (siehe etwa die Formel (5-55)).

Wir berechnen (siehe den Beweis von Prop 6.7)

$$h^m(\Phi^{(m)}, \Phi^{(m)})(x) = \overline{\tilde{\Phi}^{(m)}(\lambda)} \tilde{\Phi}^{(m)}(\lambda) = \overline{k(\lambda_0, \lambda)}^m k(\lambda_0, \lambda)^m = \exp(-mD(x_0, x)) .$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwartz-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \|T_f^{(m)}\| &= \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|T_f^{(m)} \varphi\|}{\|\varphi\|} \geq \frac{\|T_f^{(m)} \Phi^{(m)}\|}{\|\Phi^{(m)}\|} \geq \frac{|\langle \Phi^{(m)}, T_f^{(m)} \Phi^{(m)} \rangle|}{\langle \Phi^{(m)}, \Phi^{(m)} \rangle} \\ &= \frac{|\int_M f(x) h^m(\Phi^{(m)}, \Phi^{(m)})(x) \Omega(x)|}{\int_M h^m(\Phi^{(m)}, \Phi^{(m)})(x) \Omega(x)} = \frac{|\int_M f(x) e^{-mD(x_0, x)} \Omega(x)|}{\int_M e^{-mD(x_0, x)} \Omega(x)} . \end{aligned} \quad (6-33)$$

Uns interessiert der $m \rightarrow \infty$ Limes. Sei U eine Koordinatenumgebung des Punkts x_0 und K eine kompakte Teilmenge welche x_0 im Innern enthält. Wir spalten die Integrale jeweils in ein Integral über K und ein Integral über das Komplement auf. Da $D(x_0, x) > 0$ verschwinden die Integrale über das Komplement exponentiell für $m \rightarrow \infty$. Falls die Integrale über K nicht auch verschwinden, müssen wir für die Asymptotik lediglich diese betrachten. Hier sind wir in der lokalen Situation und können das Theorem der stationären Phase anwenden. Wir verwenden die Fassung von Hörmander [115, Vol.I, Thm.7.7.5]. Die Phasenfunktion lautet $\psi(x) = iD(x_0, x)$. Sie erfüllt aufgrund Prop. 6.11 die Voraussetzungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \psi &\geq 0, & \operatorname{Im} \psi(x_0) &= 0, & d\psi(x_0) &= 0, \\ \det(\operatorname{Hess}(\psi))(x_0) &\neq 0 & \text{und} & & d\psi(x) &\neq 0 \quad \text{für } x \neq x_0 . \end{aligned}$$

Um die letzte Bedingung zu erreichen, verkleinere man eventuell K entsprechend. Somit folgt für $k = 1$ in Hörmanders Notation (und mit $\Omega(x) = \varphi(x)dx$)

$$\left| \int f(x)e^{-mD(x_0,x)}\varphi(x)dx - A \cdot f(x_0) \right| = O\left(\frac{1}{m}\right)$$

mit einer Konstanten $A \neq 0$, die nicht von f abhängt. Somit

$$\left| \int f(x)e^{-mD(x_0,x)}\varphi(x)dx \right| = |A| |f(x_0)| + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Für das Integral im Nenner erhalten wir das entsprechende mit $f \equiv 1$. Somit gilt

$$\frac{\left| \int_M f(x)e^{-mD(x_0,x)}\Omega(x) \right|}{\int_M e^{-mD(x_0,x)}\Omega(x)} = \frac{|f(x_0)| + O(m^{-1})}{1 + O(m^{-1})} = |f(x_0)| + O(m^{-1}).$$

Also

$$\|T_f^{(m)}\| \geq |f(x_0)| + O(m^{-1}) = \|f\|_\infty + O(m^{-1}). \quad \square$$

Skizze des allgemeinen Beweisganges. Auch hier ist die Methode die, eine Sequenz von $\Phi^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}$ zu konstruieren⁴, welche das asymptotische Verhalten

$$\frac{\|T_f^{(m)}\Phi^{(m)}\|}{\|\Phi^{(m)}\|} = \|f\|_\infty + O(m^{-1}) \quad (6-34)$$

hat. Die Grundidee hierbei ist es, die Gesamtheit der $\Phi^{(m)}$ als Fourier-Moden (bezüglich der S^1 -Aktion) einer einzigen Distribution $\Phi \in D'(Q)$ aufzufassen. Sei also $x_0 \in M$ ein Punkt mit $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$ und $\lambda_0 \in \tau^{-1}(x_0) \in Q$ sei festgewählt. Sei α die Kontaktform (6-12). Für $\lambda \in Q$ sei

$$\Xi_\lambda := \{ t\alpha(\lambda) \in T^*Q \mid t > 0 \} \quad (6-35)$$

der Strahl durch $\alpha(\lambda)$ in Σ . Wir suchen geeignete Distributionen, welche Singularitäten bei λ_0 in Richtung von α haben. Dies bedeutet, wir betrachten Distributionen deren Wellenfront (zur Definition siehe etwa [104]) in Ξ_{λ_0} liegen.

⁴Zur Vereinfachung der Notation werde ich nicht mehr zwischen den Funktionen $\tilde{\Phi}^{(m)}$ und den assoziierten Schnitten $\Phi^{(m)}$ unterscheiden.

Eine wichtige Klasse von Distributionen mit dieser Eigenschaft sind die *Hermite-Distributionen* $I^r(Q, \Xi)$, welche in [104, p.221] bzw. in [35] studiert werden. Für uns genügt, daß man sie wie folgt beschreiben kann. Seien lokale Koordinaten $y = (y_1, \dots, y_q)$, $q = \dim Q$ um λ gewählt derart, daß in den zugeordneten Kotangentenkoordinaten (y, η) , der Strahl Ξ_λ durch die Gleichungen $y_1 = \dots = y_q = 0$, $\eta_2 = \dots = \eta_q = 0$, $\eta_1 > 0$ gegeben wird. Wir schreiben $y' = (y_2, \dots, y_q)$, $\eta' = (\eta_2, \dots, \eta_q)$. Dann besteht der Raum $I^r(Q, \Xi_\lambda)$ aus den Distributionen Φ , die mod $C^\infty(Q)$ als oszillatorische Integrale

$$\Phi(y) = (2\pi)^{-q} \int e^{iy\eta} a(\eta_1, \frac{\eta'}{\sqrt{|\eta_1|}}) d^q \eta \quad (6-36)$$

geschrieben werden können. Hierbei ist die Amplitude $a(\eta_1, \eta')$ eine C^∞ -Funktion, welche für $\eta_1 < \epsilon$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$ verschwindet und eine asymptotische Entwicklung

$$a(\eta_1, \eta') \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\eta_1, \eta'), \quad (6-37)$$

mit Funktionen a_j , die positiv-homogen⁵ vom Grad $r - \frac{j+q}{2}$ in η_1 für $\eta_1 \gg 0$ sind und Schwartz-Funktionen in η' sind, besitzt. Es kann gezeigt werden, daß diese Definition nicht von der speziellen Wahl der Koordinaten abhängt. Insbesondere können wir diese so wählen, daß $\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ gilt.

Lemma 6.12. [B]. (a) Für alle $\Phi \in I^r(Q, \Xi_\lambda)$ haben die Fourier-Moden $\Phi^{(m)}$ endliche Norm, besitzen eine asymptotische Entwicklung

$$\|\Phi^{(m)}\|^2 \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j m^{2r - \frac{j+q+1}{2}} \quad (6-38)$$

für $m \rightarrow \infty$ und verschwinden schneller als jede Potenz für $m \rightarrow -\infty$.

(b) Der führende Term b_0 hängt nur von der Äquivalenzklasse von Φ in $I^r(Q, \Xi_\lambda)/I^{r-\frac{1}{2}}(Q, \Xi_\lambda)$ (d.h. von seinen "Hauptsymbol") ab.

Der Raum $I^r(Q, \Xi_\lambda)$ ist invariant unter dem Szegö-Projektor Π und unter Pseudodifferentialoperatoren nullter Ordnung. Dies bedeutet insbesondere, daß $I^r(Q, \Xi_\lambda)$ invariant ist unter den Toeplitz-Operatoren T_f . Ist $\Phi \in I^r(Q, \Xi)$ und P

⁵Eine Funktion f heißt positiv-homogen vom Grad k falls $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ für $\lambda > 0$.

ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung k mit Symbol p , so besagt die Transportgleichung (siehe [35, §10],[104]), daß $P\Phi \in I^{r+k}(Q, \Xi)$. Verschwindet das Symbol p auf Ξ , so gilt $P\Phi \in I^{r+k-1/2}(Q, \Xi)$. Ist in diesem Fall das Hamiltonsche Vektorfeld des Symbols p tangential zu ganz Ξ , so haben wir sogar $P\Phi \in I^{r+k-1}(Q, \Xi)$. Wenden wir dieses auf $P = (f - f(x_0))$ an, so erhalten wir, da die Funktion $(f - f(x_0))$ und ihre Ableitung bei x_0 verschwindet,

$$(f - f(x_0))\Phi \in I^{r-1}(Q, \Xi) \quad \text{für } \Phi \in I^r(Q, \Xi) . \quad (6-39)$$

Sei T_λ^*Q die Faser des Kotangentialbündels über dem Punkt $\lambda \in Q$ und Σ die symplektische Untermannigfaltigkeit (6-21), dann gilt $T_\lambda^*Q \cap \Sigma = \Xi_\lambda$. Sei $J^r(Q, T_\lambda^*Q - \{0\})$ der Raum der Fourier-Integraldistributionen mit Wellenfront in $T_\lambda^*Q - \{0\}$. Da das Symbol des Szegö-Projektor (zu der Toeplitz-Struktur) lediglich Träger Σ hat, bildet der Szegö-Projektor $J^r(Q, T_\lambda^*Q - \{0\})$ nach $I^r(Q, \Xi_\lambda)$ ab (siehe [35], [100, Lemma 7.2]). Die Dirac-Distribution δ_λ mit Träger λ liegt in $\delta_\lambda \in J^{q/2}(Q, T_\lambda^*Q - \{0\})$. Wenden wir den Projektor darauf an, so erhalten wir

$$e_\lambda := \Pi \delta_\lambda \in I^{q/2}(Q, \Xi_\lambda) . \quad (6-40)$$

Zerlegen wir e_λ in die Fourier-Moden $e_\lambda^{(m)}$, so haben diese gemäß Lemma 6.12 endliche Norm. Insbesondere liegen sie in $\mathcal{H}^{(m)}$. Wir erhalten

$$\langle e_\lambda^{(m)}, \Psi^{(m)} \rangle = \langle \Pi^{(m)} \delta_\lambda, \Psi^{(m)} \rangle = \langle \delta_\lambda, \Pi^{(m)} \Psi^{(m)} \rangle = \langle \delta_\lambda, \Psi^{(m)} \rangle = \Psi^{(m)}(\lambda) . \quad (6-41)$$

Diese Gleichung ist aber auch die definierende Gleichung (5-34) für die kohärenten Zustände.

Beachte $q = 2n + 1$ ist die reelle Dimension des Kreisbündels. Insbesondere haben wir nach Lemma 6.12 die asymptotische Entwicklung

$$\|e_\lambda^{(m)}\|^2 = b_0(e_\lambda)m^n + b_1m^{n-1/2} + \dots .$$

Es kann gezeigt werden (siehe [B, Lemma 2]) daß $b_0(e_\lambda) = A \neq 0$. Wir wählen $\Phi = e_{\lambda_0}$, bzw. $\Phi^{(m)} = e_{\lambda_0}^{(m)}$. Die Distribution $(T_f^{(m)} - f(x_0))\Phi^{(m)}$ liegt in $I^{q-1}(Q, \Xi_{\lambda_0})$ und besitzt deshalb die Asymptotik $Bm^{n-1} + O(m^{n-1-1/2})$. Die Distribution $\Phi^{(m)}$ selbst besitzt die Asymptotik $Am^n + O(m^{n-1/2})$. Da $A \neq 0$ ist, gilt

$$\frac{\|T_f^{(m)}\Phi^{(m)} - f(x_0)\Phi^{(m)}\|}{\|\Phi^{(m)}\|} = O(m^{-1}) .$$

Also

$$\left| \frac{\|T_f^{(m)}\Phi^{(m)}\|}{\|\Phi^{(m)}\|} - \frac{\|f(x_0)\Phi^{(m)}\|}{\|\Phi^{(m)}\|} \right| = \left| \frac{\|T_f^{(m)}\Phi^{(m)}\|}{\|\Phi^{(m)}\|} - \|f\|_\infty \right| = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Dies impliziert die linke Seite der Ungleichung (6-1). \square

7. Ein Sternprodukt via Berezin-Toeplitz-Quantisierung

Setzt man in der Formulierung des Theorems 6.2 in der Gleichung (6-3) $\hbar = \frac{1}{m}$, so erhält man

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left\| \frac{i}{\hbar} [T_f^{(1/\hbar)}, T_g^{(1/\hbar)}] - T_{\{f,g\}}^{(1/\hbar)} \right\| = 0. \quad (7-1)$$

Die Ähnlichkeit dieses Ausdrucks mit der Poisson-Bedingung auf der 1. Stufe der formalen \hbar -Entwicklung des Sternprodukts fällt auf. Natürlich ist hier unser \hbar kein formaler Parameter, sondern nimmt die diskreten Werte $\{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ an. In der Tat ist es aber möglich, durch Verschärfung der Methoden des letzten Abschnitts ein formales Sternprodukt zu definieren. Dies soll in diesem Abschnitt geschehen.

Zur Definition eines Sternproduktes sei auf Abschnitt 3 verwiesen. Um auf $\mathcal{A} = C^\infty(M)[[\hbar]]$ ein formales Sternprodukt einzuführen, müssen wir eine Multiplikation \star definieren. Genauer gilt $f \star g = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(f, g) \hbar^i$ mit \mathbb{C} -bilinearen Abbildungen $C_i : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ derart, daß \star assoziativ ist und daß die beiden Bedingungen

$$C_0(f, g) = f \cdot g, \quad \text{und} \quad C_1(f, g) - C_1(g, f) = -i\{f, g\} \quad (7-2)$$

erfüllt sind.

Theorem 7.1. *Sei M eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit, dann induziert die Berezin-Toeplitz-Quantisierung ein eindeutiges (formales) Sternprodukt auf $C^\infty(M)$*

$$f \star g := \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j C_j(f, g), \quad C_j(f, g) \in C^\infty(M) \quad (7-3)$$

derart, daß für $f, g \in C^\infty(M)$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\left\| \sum_{0 \leq j < N} \left(\frac{1}{m}\right)^j T_{C_j(f,g)}^{(m)} - T_f^{(m)} T_g^{(m)} \right\| = K_N(f, g) \left(\frac{1}{m}\right)^N \quad (7-4)$$

für $m \rightarrow \infty$, mit geeigneten Konstanten $K_N(f, g)$ gilt.

Es wird hier nicht die Konvergenz dieser Sternprodukte untersucht. Insbesondere wird nicht behauptet, daß man eine “strikte Deformationsquantisierung” im Sinne von Rieffel [175] erhält.

Beweis. Die Notation sei wie im Beweis von Theorem 6.2 im letzten Abschnitt. Insbesondere verwende ich hier wieder den globalen Toeplitz-Operator T_f , den Rotationsoperator D_φ , nebst deren Projektionen $T_f^{(m)}$, bzw. $(m \cdot)$ auf die Eigenräume $\mathcal{H}^{(m)} = \Gamma_{hol}(M, L^m)$.

(a) Die Definition der $C_j(f, g) \in C^\infty(M)$. Die Konstruktion erfolgt induktiv, derart daß

$$A_N = D_\varphi^N T_f T_g - \sum_{j=0}^{N-1} D_\varphi^{N-j} T_{C_j(f,g)} \quad (7-5)$$

ein Toeplitz-Operator von der Ordnung Null ist. Der Operator A_N ist S^1 -invariant, d.h. es gilt $D_\varphi \cdot A_N = A_N \cdot D_\varphi$. Da er von nullter Ordnung ist, ist sein Hauptsymbol σ eine Funktion auf Q . Wegen der Invarianz ist es sogar durch eine Funktion auf M gegeben. Diese Funktion sei $C_N(f, g)$. Der Operator $A_N - T_{C_N(f,g)}$ ist dann von Ordnung -1 und $A_{N+1} = D_\varphi(A_N - T_{C_N(f,g)})$ ist von Ordnung 0 und somit genau von der Form wie in (7-5) angegeben. Die Induktion beginnt mit

$$A_0 = T_f T_g, \quad \text{und} \quad \sigma(A_0) = \sigma(T_f)\sigma(T_g) = f \cdot g = C_0(f, g) .$$

Als ein Operator von der Ordnung Null auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist A_N beschränkt. Somit gilt dies auch für seine Komponenten $A_N^{(m)}$. Wir erhalten

$$\|m^N T_f^{(m)} T_g^{(m)} - \sum_{j=0}^{N-1} m^{N-j} T_{C_j(f,g)}^{(m)}\| = \|A_N^{(m)}\| \leq \|A_N\| . \quad (7-6)$$

Nach Division durch m^N ergibt sich die asymptotische Aussage (7-4). Aus der Konstruktion ergibt sich sofort die Bilinearität.

(b) Die Poisson-Struktur. Daß $C_0(f, g) = f \cdot g$ gilt, ergab sich bereits oben. Um die zweite Formel in (7-2) zu zeigen, schreiben wir (7-6) explizit für $N = 2$ und das Paar (f, g) :

$$\|m^2 T_f^{(m)} T_g^{(m)} - m^2 T_{f \cdot g}^{(m)} - m T_{C_1(f,g)}^{(m)}\| \leq K .$$

Einen entsprechenden Ausdruck erhalten wir auch für das Paar (g, f) . Subtrahiert man die beiden Operatoren unter der Norm, so erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\|m^2(T_f^{(m)}T_g^{(m)} - T_g^{(m)}T_f^{(m)}) - m(T_{C_1(f,g)}^{(m)} - T_{C_1(g,f)}^{(m)})\| \leq 2K .$$

Nach Division durch m und Multiplikation mit i erhält man

$$\|m i (T_f^{(m)}T_g^{(m)} - T_g^{(m)}T_f^{(m)}) - T_{i(C_1(f,g)-C_1(g,f))}^{(m)}\| = O\left(\frac{1}{m}\right) .$$

Vergleichen wir den ersten Summanden in dem Operator unter der Norm mit dem Toeplitz-Operator der Poisson-Klammer, so haben wir aufgrund von Theorem 6.2 aber bereits eine $O(\frac{1}{m})$ -Asymptotik. Dies impliziert

$$\|T_{\{f,g\}-i(C_1(f,g)-C_1(g,f))}^{(m)}\| = O\left(\frac{1}{m}\right) .$$

Theorem 6.1 besagt aber, daß die linke Seite für $m \rightarrow \infty$ den Limes

$$\|\{f, g\} - i(C_1(f, g) - C_1(g, f))\|_\infty$$

besitzt. Somit gilt $\{f, g\} = i(C_1(f, g) - C_1(g, f))$. Damit ist (7-2) gezeigt.

(c) Die Eindeutigkeit. Sie läßt sich aufgrund der Asymptotik (7-4) durch vollständige Induktion beweisen. Seien $C_j(f, g)$, bzw. $\tilde{C}_j(f, g)$ zwei solcher Systeme bilinearer Abbildungen, welche die Voraussetzungen erfüllen. Gelte $C_j = \tilde{C}_j$ für $j \leq N - 2$, so erhält man durch Subtraktion der entsprechenden Ausdrücke in (7-4) und unter Benutzung der Tatsache, daß $T^{(m)}$ linear in den Funktionen ist

$$\left\| \frac{1}{m^{N-1}} T_{(C_{N-1}(f,g)-\tilde{C}_{N-1}(f,g))}^{(m)} \right\| \leq \frac{K}{m^N} .$$

Nach Multiplikation mit m^{N-1} folgt somit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_{(C_{N-1}(f,g)-\tilde{C}_{N-1}(f,g))}^{(m)}\| = 0 .$$

Mit Hilfe von Theorem 6.1 folgt wiederum $C_{N-1}(f, g) = \tilde{C}_{N-1}(f, g)$. Die Induktion startet mit $N = 1$. Nach Voraussetzung ist $C_0(f, g) = \tilde{C}_0(f, g) = f \cdot g$.

(d) Die Assoziativität. Der Beweis baut auf denselben Grundgedanken auf. Schreibt man die Assoziativität des formalen Sternprodukts $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ in Bedingungen für die Abbildungen C_j um, so erhält man für $k = 0, 1, \dots$ die Bedingungen

$$\sum_{l=0}^k C_l(f, C_{k-l}(g, h)) = \sum_{l=0}^k C_l(C_{k-l}(f, g), h) . \quad (7-7)$$

Aufgrund Theorem 6.1 wissen wir

$$f = g \quad \longleftrightarrow \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_f^{(m)} - T_g^{(m)}\| = 0 .$$

Es genügt also den Toeplitz-Operator $T^{(m)}$ auf die Relation (7-7) anzuwenden und die Asymptotik von $T_{\text{linke Seite}} - T_{\text{rechte Seite}}$ zu betrachten.

Ich zeige die Assoziativität durch vollständige Induktion über k .

$k = 0$: $C_0(f, C_0(g, h)) = C_0(C_0(f, g), h)$ ist richtig, da $C_0(f, g) = f \cdot g$.

Sei also die Behauptung richtig bis zum Level $k - 1$. Für $0 \leq r \leq k$ wird die Asymptotik (7-4) mit m^r ($N = r + 1$) multipliziert und ergibt

$$T_{C_r(f, g)}^{(m)} = m^r T_f^{(m)} T_g^{(m)} - \sum_{s=0}^{r-1} m^{r-s} T_{C_s(f, g)} + O\left(\frac{1}{m}\right) . \quad (7-8)$$

Hier soll das Symbol $O\left(\frac{1}{m}\right)$ bedeuten, daß der Operator, welcher durch die Differenz der linken und der rechten Seite gegeben ist, ein Operator ist, dessen Norm sich wie $O\left(\frac{1}{m}\right)$ für $m \rightarrow \infty$ verhält. Insbesondere erhalten wir also für $l = 0, 1, \dots, k$

$$T_{C_l(f, C_{k-l}(g, h))}^{(m)} = m^l T_f^{(m)} T_{C_{k-l}(g, h)}^{(m)} - \sum_{s=0}^{l-1} m^{l-s} T_{C_s(f, C_{k-l}(g, h))} + O\left(\frac{1}{m}\right) . \quad (7-9)$$

Dies summieren wir über diese l und erhalten

$$T_{\text{linke Seite}}^{(m)} = \sum_{l=0}^k m^l T_f^{(m)} T_{C_{k-l}(g, h)}^{(m)} - \sum_{l=0}^k \sum_{s=0}^{l-1} m^{l-s} T_{C_s(f, C_{k-l}(g, h))} + O\left(\frac{1}{m}\right) .$$

Schauen wir uns nur die zweite Summe an, so können wir diese umformen zu

$$- \sum_{r=1}^k m^r \sum_{l=r}^k T_{C_{l-r}(f, C_{k-l}(g, h))}^{(m)} = - \sum_{r=1}^k m^r T_{\sum_{s=0}^{k-r} C_s(f, C_{k-r-s}(g, h))}^{(m)} .$$

Diese Summen sind aber genau die Summen von denen wir per Induktion bereits die Gültigkeit von (7-7) wissen. Führen wir dieselbe Umformung auch für die rechte Seite aus und subtrahieren wir $T_{\text{rechte Seite}}^{(m)}$ von $T_{\text{linke Seite}}^{(m)}$, so bleibt als Differenz

$$\sum_{l=0}^k m^l T_f^{(m)} T_{C_{k-l}(g,h)}^{(m)} - \sum_{l=0}^k m^l T_{C_{k-l}(f,g)}^{(m)} T_h^{(m)} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Spalten wir die erste Summe auf in $l = 0$ und $l \geq 1$ und verwenden wir für den $l = 0$ Term die Asymptotik (7-8), so erhalten wir

$$\begin{aligned} m^0 \left(T_f^{(m)} m^k T_g^{(m)} T_h^{(m)} - \sum_{s=0}^{k-1} m^{k-s} T_f^{(m)} T_{C_s(g,h)}^{(m)} + O\left(\frac{1}{m}\right) \right) + \sum_{l=1}^k m^l T_f^{(m)} T_{C_{k-l}(g,h)}^{(m)} \\ = m^k T_f^{(m)} (T_g^{(m)} T_h^{(m)}) + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Einen entsprechenden Ausdruck ergibt sich für die zweite Summe. Als Differenz bleibt somit

$$m^k (T_f^{(m)} (T_g^{(m)} T_h^{(m)}) - (T_f^{(m)} T_g^{(m)}) T_h^{(m)}) + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Hierbei handelt es sich um Operatoren, welche natürlich assoziativ sind. Dies bedeutet, daß der Operator bei m^k identisch verschwindet. Somit folgt mit Theorem 6.1 die behauptete Assoziativität. \square

Durch die Methode der Berezin-Toeplitz-Quantisierung erhält man somit auf beliebigen kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten ein Sternprodukt, das geometrisch induziert ist. Dessen Existenz wird also nicht aufgrund kohomologischer Resultate bewiesen. Eine wichtige geometrische Methode Sternprodukte zu erhalten wurde auch von Fedosov [75],[76] gegeben. Wie von Deligne [59] vorgeschlagen, ist es interessant den Zusammenhang beider Sternprodukte zu untersuchen. Dies trifft auch zu in Bezug auf die Sternprodukte, die man bislang konstruiert hatte. Siehe Abschnitt 3 für weitere Referenzen. Es sei erwähnt, daß von Coburn und Xia in [53] mit Hilfe der Berezin-Toeplitz-Operatoren für den \mathbb{C}^n ein Sternprodukt konstruiert wurde. In einem kürzlich erschienenen Artikel skizziert Guillemin [106] wie man direkt aus dem Symbolkalkül für die globalen Toeplitz-Operatoren heraus ein Sternprodukt erhalten kann. Vermutlich wird sich dadurch dasselbe ergeben, wie hier, wenn man die komplexen Strukturen entsprechend wählt.

Es erhebt sich die Frage inwieweit die Zusatzforderungen (5), (6) und (7) aus Def. 3.1 erfüllt sind. Für $f \equiv 1$ gilt $T_f = id$, bzw. $T_f^{(m)} \equiv id$. Es ist $C_0(1, g) = g$. Weiter ist mit (7-5)

$$A_1 = D_\varphi T_f T_g - D_\varphi T_{fg} = D_\varphi T_g - D_\varphi T_g .$$

Somit verschwindet das Hauptsymbol von A_1 und es gilt $C_1(1, g) = 0$. Durch triviale Induktion folgt

$$C_k(1, g) = C_k(g, 1) = 0, \quad \text{für } k > 1, \quad (7-10)$$

also die Bedingung (3-6).

Konkrete (nichttriviale) Berechnungen¹ für den \mathbb{P}^1 -Fall von mir (nicht publiziert) zeigen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|m \left(T^{(m)}(f) T^{(m)}(g) - T^{(m)}(fg) \right) + T^{(m)} \left((1 + z\bar{z})^2 \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right)\| = 0 . \quad (7-11)$$

Daraus folgt

$$C_1(f, g) = -(1 + z\bar{z})^2 \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} . \quad (7-12)$$

Für den Fall der Riemannschen Flächen von Geschlecht $g \geq 2$ beschäftigt sich der Artikel von Klimek und Lesniewski [137] im wesentlichen damit, die (7-11) entsprechende Beziehung zu zeigen. Sie erhalten²

$$C_1(f, g) = -\frac{1}{2}(1 - z\bar{z})^2 \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} . \quad (7-13)$$

In den Beispielrechnungen gilt $C_1(g, f) = \overline{C_1(\bar{f}, \bar{g})}$. Insbesondere folgt für reellwertige Funktionen f und g : $C_1(g, f) = \overline{C_1(f, g)}$. Dies bedeutet, daß die Paritätseigenschaft (3-7') für $k = 1$ erfüllt ist. Vermutlich läßt sich die Parität allgemein durch eine etwas genauere Analyse des Konstruktionsprozesses zeigen. Gleichzeitig geben diese Berechnungen zur folgenden Vermutung Anlaß.

Vermutung 7.2. *Für das obige Sternprodukt sind die $C_k(f, g)$ Bidifferentialoperatoren vom Bigrad $\leq (k, k)$.*

Hierzu ist die Lokalität der C_k zu zeigen. Mit Hilfe von Peetres Theorem [166], [43], [142] folgt dann, daß es sich um Differentialoperatoren handelt. Für den Bigrad

¹Bei diesen Berechnungen wird nicht entlang des Beweises des Theorems vorgegangen. Es wird mit einer Basis der Schnitte gearbeitet. Siehe hierzu die Bemerkung nach Formel (6-3).

²Die Potenz r in der Referenz [137] entspricht hier $2m$.

müssen dann entsprechende Abschätzungen gefunden werden. Hierzu sind die Untersuchungen noch nicht abgeschlossen. Aus der vermuteten Struktur würde auch folgen, daß es sich um eine Deformationsquantisierung mit Separation der Variablen im Sinne von Karabegov [128] handelt.

Beispiel 7.3. Für die projektive Gerade \mathbb{P}^1 ergibt sich (siehe (7-12))

$$f \star g = f \cdot g - (1 + z\bar{z})^2 \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \cdot \hbar + O(\hbar^2) .$$

8. \mathfrak{L}_α -Approximation

(a) Die Definition

Die Quantisierung, wie sie in den vorherigen Abschnitten dargestellt wurde, gibt eine Zuordnung einer Familie von (endlichdimensionalen) Operatoralgebren zu der festen Poisson-Algebra $\mathcal{P}(M)$. Diese Familie wird durch $\hbar = \frac{1}{m}$ parametrisiert. Für $\hbar \rightarrow 0$, bzw. $m \rightarrow \infty$ können wir Informationen über die Algebra $\mathcal{P}(M)$ zurückgewinnen. Ein Schema um diese Approximation zu beschreiben, wurde vom Autor zusammen mit Bordemann, Hoppe und Schaller 1991 in [A] unter dem Namen \mathfrak{L}_α -Approximation entwickelt. Ausgangspunkt war die Beobachtung, daß im Zusammenhang mit der Quantentheorie der Membranen die relevanten Lie-Algebren der divergenzfreien Vektorfelder der Sphäre S^2 [116], bzw. des Torus [72],[117],[118] als "Grenzwert" von $su(N)$, $N \rightarrow \infty$ Lie-Algebren beschrieben werden können. In manchen Artikeln der Physiker wurde vorschnell daraus geschlossen, daß diese Algebren isomorph zu $su(\infty)$ sein müssen. In der Arbeit [A] wird jedoch gezeigt, daß diese drei Algebren (genauer gewisse Unteralgebren, für welche die Approximation funktioniert) paarweise nicht isomorph sind. Wie dort gezeigt, siehe auch Abschnitt (c), kann die Algebra der divergenzfreien Vektorfelder in Bezug zur Poisson-Algebra gebracht werden. Über die Quantisierung erhält man somit die Zuordnung endlichdimensionaler Algebren. Es war die Vermutung in [A], daß für kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten diese Zuordnung genau die Bedingung einer \mathfrak{L}_α -Approximation mit $\alpha = m$, $m \in \mathbb{N}$ erfüllt. Für den Fall des komplexen n -dimensionalen Torus, waren wir in der Lage die Vermutung zu zeigen. Nach der Definition der \mathfrak{L}_α -Approximation werde ich zeigen, wie die Vermutung allgemein sich als eine Folgerung aus Theorem 6.1, 6.2 und 6.4 ergibt. Insbesondere wird sich ergeben, daß die Poisson-Algebren kompakter Kähler-Mannigfaltigkeiten (nur die Lie-Struktur betrachtet) immer $u(N)$, $N \rightarrow \infty$ Grenzwerte sind.

Sei $(\mathcal{L}, [\dots])$ eine (reelle oder komplexe) Lie-Algebra und $(\mathfrak{L}_\alpha, [\dots]_\alpha)$ eine Familie von (reellen, bzw. komplexen) Lie-Algebren indiziert mit $\alpha \in I$. Die Indexmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ sei derart beschaffen, daß $\lim_{\alpha \rightarrow \infty}$ sinnvoll ist. Typischerweise ist bei uns $I = \mathbb{N}$. Die Lie-Algebren \mathfrak{L}_α seien mit Metriken d_α versehen (bei uns handelt es sich immer um Normen). Sei weiter eine Familie von linearen Abbildungen $p_\alpha : \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{L}_\alpha$ gegeben.

Definition 8.1. Die Familie $(\mathfrak{L}_\alpha, [\dots]_\alpha, d_\alpha, \alpha \in I)$ heißt approximierende Folge für $(\mathcal{L}, [\dots])$ induziert durch $(p_\alpha, \alpha \in \mathbb{N})$ und \mathcal{L} heißt \mathfrak{L}_α -Quasilimes falls gilt:

- (1) Die Abbildungen p_α sind surjektiv.
- (2) Seien $x, y \in \mathcal{L}$. Aus $d_\alpha(p_\alpha(x), p_\alpha(y)) \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow \infty$ folgt $x = y$.
- (3) Für alle $x, y \in \mathcal{L}$ gilt

$$d_\alpha(p_\alpha([x, y]), [p_\alpha(x), p_\alpha(y)]_\alpha) \rightarrow 0, \quad \text{für } \alpha \rightarrow \infty. \quad (8-1)$$

Bemerkung 8.2. Setzen wir $y = 0$ in Bedingung 8.1(2) und sei $x \in \mathcal{L}$, dann folgt aus $d_\alpha(p_\alpha(x), 0) \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow \infty$ bereits $x = 0$. D.h. die Elemente die "asymptotisch" verschwinden, verschwinden bereits in \mathcal{L} .

Bemerkung 8.3. Insbesondere gibt es für jedes $x \in \mathcal{L}, x \neq 0$ mindestens ein α mit $p_\alpha(x) \neq 0$. Somit ist die lineare Abbildung

$$\mathcal{L} \rightarrow \prod_{\alpha \in I} \mathfrak{L}_\alpha, \quad x \mapsto (p_\alpha(x))_{\alpha \in I}$$

injektiv, da

$$\ker((p_\alpha)_{\alpha \in I}) = \bigcap_{\alpha \in I} \ker p_\alpha.$$

Damit kann \mathcal{L} als Unterraum des direkten Produkts aufgefaßt werden.

Bemerkung 8.4. Bedingung 8.1(3) besagt, daß approximativ die Familie von linearen Abbildungen ein Lie-Homomorphismus wird.

Bemerkung 8.5. Ebenfalls aus 8.1(3) folgt daß, falls die $\mathfrak{L}_\alpha, p_\alpha$ und d_α gegeben sind, es nur eine Lie-Struktur auf \mathcal{L} gibt, so daß \mathcal{L} ein \mathfrak{L}_α -Quasilimes ist. Dies ist

ein schwacher Eindeutigkeitsatz. Seien nämlich $[.., ..]$ und $[.., ..]'$ zwei Lie-Strukturen auf \mathcal{L} und $x, y \in \mathcal{L}$ gegeben, dann gilt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$d_\alpha(p_\alpha([x, y]), p_\alpha([x, y]')) \leq d_\alpha(p_\alpha([x, y]), [p_\alpha(x), p_\alpha(y)]_\alpha) + d_\alpha([p_\alpha(x), p_\alpha(y)]_\alpha, p_\alpha([x, y]')) .$$

Ist nun \mathcal{L} sowohl bezüglich $[.., ..]$ als auch bezüglich $[.., ..]'$ ein \mathfrak{L}_α -Quasilimes, so stehen auf der rechten Seite zwei Nullfolgen für $\alpha \rightarrow \infty$. Somit steht links auch eine Nullfolge. Aufgrund 8.1(2) folgt daraus aber $[x, y] = [x, y]'$.

Bemerkung 8.6. Ob eine \mathfrak{L}_α -Approximation vorliegt, kann durchaus von den gewählten Metriken d_α, d'_α abhängen. Gibt es allerdings uniforme Konstanten $a, b > 0$, so daß für alle $\alpha \in I$ und alle $x, y \in \mathcal{L}$ gilt

$$a \cdot d_\alpha(x, y) \leq d'_\alpha(x, y) \leq b \cdot d_\alpha(x, y) ,$$

dann sind diese auch im Sinne der \mathfrak{L}_α -Approximation äquivalent.

(b) \mathfrak{L}_α -Approximation und Quantisierung

Sei $gl(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ die Lie-Algebra der Endomorphismen des Raums $\Gamma_{hol}(M, L^m)$ der globalen holomorphen Schnitte der Tensorpotenzen des Quantenbündels L . Das Lie-Produkt ist gegeben durch den Kommutator $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$. Da wir ein Skalarprodukt auf $\Gamma_{hol}(M, L^m)$ haben, ist der zu A adjungierte Operator durch die Bedingung

$$\langle A^* s, t \rangle = \langle s, At \rangle, \quad \text{für alle } s, t \in \Gamma_{hol}(M, L^m)$$

wohldefiniert. Der Unterraum der antiselbstadjungierten Operatoren

$$u(n) := \{ A \in gl(\Gamma_{hol}(M, L^m)) \mid A^* = -A \} \quad (8-2)$$

ist eine reelle Lie-Algebra. Wie üblich bezeichne

$$su(n) := \{ A \in u(n) \mid \text{Tr } A = 0 \} \quad (8-3)$$

die reelle Lie-Algebra der spurlosen Endomorphismen. Wählt man eine Orthonormalbasis der Schnitte, so werden die jeweiligen Algebren identifiziert mit allen

Matrizen, den schief-Hermiteschen Matrizen und den spurlosen schief-Hermiteschen Matrizen.

Auf $gl(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ wählen wir die reskalierte Operatornorm

$$\|A\|_m = \frac{1}{m} \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|}. \quad (8-4)$$

Es sei $m \in I = \mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M, \mathbb{R})$. Wir betrachten die Familie von Abbildungen

$$(\mathcal{P}(M), \{ \cdot, \cdot \}) \rightarrow (u(\Gamma_{hol}(M, L^m)), [\cdot, \cdot], \|\cdot\|_m), \quad q_m : f \mapsto \widehat{Q}_f^{(m)}, \quad (8-5)$$

$$(\mathcal{P}(M), \{ \cdot, \cdot \}) \rightarrow (u(\Gamma_{hol}(M, L^m)), [\cdot, \cdot], \|\cdot\|_m), \quad p_m : f \mapsto i m \cdot T_f^{(m)}. \quad (8-6)$$

Es sei daran erinnert, daß $\widehat{Q}_f^{(m)} = m \cdot Q_f$ der reskalierte Quantenoperator ist. Gemäß Prop. 5.2 ist für reellwertige Funktionen f der Toeplitz-Operator $T_f^{(m)}$ selbstadjungiert. Somit ist $i m T_f^{(m)}$ antiselbstadjungiert. Aufgrund des Zusammenhangs $\widehat{Q}_f^{(m)} = i m T_{f - \frac{1}{2m} \Delta f}^{(m)}$ ist $\widehat{Q}_f^{(m)}$ ebenfalls antiselbstadjungiert. Dies bedeutet, daß die Abbildungen p_m , bzw. q_m nach $u(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ gehen.

Für komplexwertige Funktionen erhalten wir entsprechende Abbildungen

$$\mathcal{P}(M, \mathbb{C}) \rightarrow gl(\Gamma_{hol}(M, L^m)), \quad q_m : f \mapsto \widehat{Q}_f^{(m)}, \quad \text{bzw.} \quad p_m : f \mapsto i m T_f^{(m)}. \quad (8-7)$$

Wir zerlegen die linke Seite in $\mathcal{P}(M) \oplus i\mathcal{P}(M)$ (als reelle Vektorräume) und die rechte Seite als $u(\Gamma_{hol}(M, L^m)) \oplus i u(\Gamma_{hol}(M, L^m))$. Es gilt $T_{if}^{(m)} = i T_f^{(m)}$ und $\widehat{Q}_{if}^{(m)} = i \widehat{Q}_f^{(m)}$. Dies bedeutet, daß die Abbildung p_m (bzw. q_m) zerlegbar sind in

$$p_m(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) = p_m(\operatorname{Re} f) \oplus i p_m(\operatorname{Im} f).$$

Somit gilt: Ist p_m für die reellwertigen Funktionen surjektiv auf $u(\Gamma_{hol}(M, L^m))$, so ist p_m für die komplexwertigen Funktionen surjektiv auf $gl(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ und umgekehrt. Die folgenden zwei Propositionen und das Theorem ist [B] entnommen.

Proposition 8.7. *Die kanonische lineare Abbildung*

$$s^{(m)} : \text{End}(\Gamma_{hol}(M, L^m)) \rightarrow C^\infty(M), \quad s^{(m)}(|\psi \rangle \langle \varphi|) := h^{(m)}(\varphi, \psi) \quad (8-8)$$

ist eine Injektion.

Beweis. Sei s_1, s_2, \dots, s_d eine Basis von $\Gamma_{hol}(M, L^m)$. Eine Basis von $\text{End}(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ ist dann durch $|s_i \rangle \langle s_j|$, $i, j = 1, \dots, d$ gegeben. Per Definition ist $s^{(m)}(|s_i \rangle \langle s_j|) = h^{(m)}(s_i, s_j)$. Sei V eine trivialisierende Karte mit der holomorphen Koordinate z . Repräsentieren wir sowohl die Schnitte als auch die Metrik lokal durch Funktionen, so erhalten wir

$$s^{(m)}(|s_i \rangle \langle s_j|)(z) = h(z) \overline{s_j(z)} \cdot s_i(z)$$

mit einer festen positiven Funktion h (die nicht von i und j abhängt). Wir nehmen an, diese d^2 Funktionen seien linear abhängig. D.h. es gibt eine nichttriviale Relation

$$\sum_{i,j} a_{ij} h(z) \overline{s_j(z)} s_i(z) = 0, \quad \forall z \in V .$$

Die Relation wird durch h dividiert. Danach kann sie analytisch ausgedehnt werden auf $V \times V$. Dies ergibt

$$0 = \sum_{i,j} a_{ij} \overline{s_i(z)} s_j(w) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \overline{s_j(z)} \right) s_i(w), \quad \forall z, w \in V .$$

Wir betrachten zuerst die Koordinate w . Würden nicht alle Koeffizienten vor den s_i verschwinden, so wäre die lokale Relation auf V auch eine globale Relation (wegen der analytischen Fortsetzung). Dies wäre aber ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit. Also $\sum_j a_{ij} \overline{s_j(z)} = 0$ für alle i und alle $z \in V$. Das gleiche Argument zeigt weiter $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, \dots, n$. Somit ist $s^{(m)}$ injektiv. \square

Proposition 8.8. *Sei $\text{End}(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ mit dem Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt ausgestattet und $C^\infty(M)$ mit dem L^2 -Skalarprodukt bezüglich des symplektischen Volumens, dann ist die Abbildung $s^{(m)}$ adjungiert zu $T^{(m)}$. D.h. es gilt*

$$\langle A, T_f^{(m)} \rangle_{HS} = \langle s^{(m)}(A), f \rangle . \quad (8-9)$$

Beweis. Sei s_1, s_2, \dots, s_d wiederum eine Orthonormalbasis der Schnitte. Es berechnet sich

$$\langle A, T_f^{(m)} \rangle_{HS} = \text{Tr}(A^* \cdot T_f^{(m)}) = \sum_i \langle s_i, A^* T_f^{(m)} s_i \rangle = \sum_i \langle A s_i, f \cdot s_i \rangle .$$

Sei nun $A = \sum_{j,k} a_{jk} |s_j \rangle \langle s_k|$. Dann gilt

$$s^{(m)}(A) = \sum_{j,k} a_{jk} h^{(m)}(s_k, s_j), \quad A s_i = \sum_j a_{ji} |s_j \rangle .$$

Damit

$$\langle A, T_f^{(m)} \rangle_{HS} = \sum_i \int_M h^{(m)}(A s_i, f s_i) \Omega = \int_M \sum_{i,j} \bar{a}_{ji} f h^{(m)}(s_j, s_i) \Omega .$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \langle s^{(m)}(A), f \rangle &= \int_M \overline{s^{(m)}(A)} \cdot f \Omega \\ &= \int_M \sum_{j,k} \bar{a}_{jk} \overline{h^{(m)}(s_k, s_j)} \cdot f \Omega = \int_M \sum_{j,i} \bar{a}_{ji} h^{(m)}(s_j, s_i) \cdot f \Omega . \quad \square \end{aligned}$$

Man vergleiche diese Proposition mit der Proposition 5.10 . Dort zeigte ich, daß in Bezug auf eine deformierte L^2 -Norm $T^{(m)}$ adjungiert zu der Berezinschen kovarianten Symbolabbildung ist. Für den Fall, daß die Rawnsleysche ϵ -Funktion konstant ist, stimmen beide Normen bis auf einen Konstante überein. Daraus folgt, daß die obige Abbildung $s^{(m)}$ in diesem Fall bis auf einen Faktor die kovariante Symbolabbildung ist.

Proposition 8.9. *Die Quantisierungsabbildungen*

$$T^{(m)}, \widehat{Q}^{(m)} : C^\infty(M, \mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(\Gamma_{hol}(M, L^m))$$

sind surjektiv.

Beweis. Die Surjektivität von $T^{(m)}$ folgt aus der Injektivität der adjungierten Abbildung wie folgt: Sei A orthogonal zu $\text{Bild } T^{(m)}$. Dies bedeutet

$$\langle A, T_f^{(m)} \rangle = 0, \quad \forall f \in C^\infty(M) .$$

Damit folgt aus (8-9) $s^{(m)}(A) = 0$. Wegen Prop. 8.7 folgt $A = 0$, also folgt die Surjektivität von $T^{(m)}$.

Es gilt $\widehat{Q}^{(m)} = mT^{(m)} \circ (id - \frac{1}{2m}\Delta)$. Wegen der Surjektivität von $T^{(m)}$ gibt es zu jedem Operator A ein $g \in C^\infty(M)$ mit $A = mT_g^{(m)}$. Da $(id - \frac{1}{2m}\Delta)$ ein positiver elliptischer Operator ist, gibt es zu g auch ein f mit $(id - \frac{1}{2m}\Delta)f = g$. Somit $\widehat{Q}_f^{(m)} = A$. Also ist auch $\widehat{Q}^{(m)}$ surjektiv. \square

Damit sind auch die Abbildungen p_m , bzw. q_m aus (8-5) und (8-6) surjektiv.

Schauen wir die Approximationssätze aus Abschnitt 6 an (Thm. 6.1, Thm. 6.2, bzw. Thm. 6.4) so gilt erstens

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|mT_f^{(m)}\|_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_f^{(m)}\| = \|f\|_\infty,$$

bzw.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\widehat{Q}_f^{(m)}\|_m = \|f\|_\infty.$$

Damit kann der Limes nur dann verschwinden, falls f selbst verschwindet. Somit ist die Bedingung (2) aus der Definition 8.1 einer \mathfrak{L}_α -Approximation erfüllt. Desweiteren gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|[imT_f^{(m)}, imT_g^{(m)}] - imT_{\{f,g\}}^{(m)}\|_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \|im[T_f^{(m)}, T_g^{(m)}] - T_{\{f,g\}}^{(m)}\| = 0.$$

Damit ist auch die Bedingung (3) erfüllt. (Für $\widehat{Q}^{(m)}$ steht sie bereits in (6-6).) Somit folgt die Vermutung aus [A]:

Theorem 8.10. [Bordemann, Meinrenken, Schlichenmaier [B]] *Sei (M, ω) eine kompakte, quantisierbare Kähler-Mannigfaltigkeit mit sehr amplem Quantenbündel L . Sei $\mathcal{P}(M)$ die Poisson-Algebra der reellwertigen Funktionen auf M . Dann ist $\mathcal{P}(M)$ sowohl in Bezug auf die Quantisierungsabbildung der geometrischen Quantisierung als auch der Berezin-Toeplitz-Quantisierung ein $u(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ -Quasilimes.*

Möchte man eine $su(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ -Approximation, so muß man sich zuerst auf die reellwertigen Funktionen mit $\int_M f \Omega = 0$ beschränken (siehe hierzu Teilabschnitt (c)). Leider folgt dann immer noch nicht, daß $\text{Tr} T_f^{(m)} = 0$, d.h.

$T_f^{(m)} \in su(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ ist. Prop. 6.5 (b) gibt allerdings eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Spur. Sei $d(m) := \dim \Gamma_{hol}(M, L^m)$. Wir setzen

$$\tilde{T}_f^{(m)} := T_f^{(m)} - \frac{1}{d(m)} (\text{Tr } T_f^{(m)}) \cdot id . \quad (8-10)$$

Per Konstruktion gilt $\text{Tr } \tilde{T}_f^{(m)} = 0$. Andererseits folgt wegen der Voraussetzung $\int_M f \Omega = 0$ mit Prop 6.5(b)

$$\frac{|\text{Tr } T_f^{(m)}|}{d(m)} = O\left(\frac{1}{m}\right) .$$

Damit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{T}_f^{(m)}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_f^{(m)}\| = \|f\|_\infty .$$

Desweiteren gilt $[\tilde{T}_f^{(m)}, \tilde{T}_g^{(m)}] = [T_f^{(m)}, T_g^{(m)}]$ und damit weiter

$$\|\text{im}[\tilde{T}_f^{(m)}, \tilde{T}_g^{(m)}] - \tilde{T}_{\{f,g\}}^{(m)}\| = \|\text{im}[T_f^{(m)}, T_g^{(m)}] - T_{\{f,g\}}^{(m)}\| + O\left(\frac{1}{m}\right) .$$

Auf diese Weise erhält man einen $su(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ -Quasilimes. Dasselbe funktioniert auch für den entsprechend modifizierten Operator der geometrischen Quantisierung

$$\tilde{Q}_f^{(m)} = \hat{Q}_f^{(m)} - \frac{1}{d(m)} \text{Tr } \hat{Q}_f^{(m)} \cdot id .$$

(c) Der Zusammenhang mit den divergenzfreien Vektorfeldern

In der Quantentheorie der Membranen (dies sind zweidimensionale symplektischen Mannigfaltigkeiten, bzw. eventuell auch deren höherdimensionale Verallgemeinerungen) sind die volumenerhaltenden Diffeomorphismen von besonderer Bedeutung. Auf infinitesimaler Ebene entsprechen ihnen die divergenzfreien Vektorfelder. Hierbei ist die Divergenz in Bezug auf die vorgegebene Volumenform zu nehmen. Sei L_X die Lie-Ableitung in Richtung des Vektorfelds X und Ω die symplektische Volumenform, dann ist die Divergenz $\text{div}(X)$ die skalare Funktion definiert durch

$$L_X \Omega = \text{div}(X) \cdot \Omega . \quad (8-11)$$

Bezeichne $Vect(M)$ die Lie-Algebra der C^∞ -Vektorfelder auf M . Der Unterraum der *diverzenzfreien Vektorfelder* ist definiert als

$$diff_V M := \{ X \in Vect(M) \mid L_X \Omega = 0 \} . \quad (8-12)$$

Da $[L_X, L_Y] \Omega = L_{[X, Y]} \Omega$ gilt, ist $diff_V(M)$ eine Lie-Unteralgebra. Genauso ist

$$LHam(M) := \{ X \in Vect(M) \mid L_X \omega = 0 \} \quad (8-13)$$

ebenfalls eine Unteralgebra. Diese Unteralgebra heißt die Algebra der *lokal-Hamiltonschen Vektorfelder*. Da die Lie-Ableitung eine Derivation (auch in Bezug auf das äußere Produkt) ist, folgt aus der Definition des symplektischen Volumens $\Omega = \alpha \cdot (\omega \wedge \dots \wedge \omega)$

$$LHam(M) \leq diff_V(M) .$$

Im Fall der Dimension 2, d.h. für die zweidimensionalen Membranen, haben wir natürlich Gleichheit. Die *Hamiltonschen Vektorfelder* sind gegeben als

$$Ham(M) := \{ X \in Vect(M) \mid \exists f \in C^\infty(M) : X = X_f \} . \quad (8-14)$$

Da gilt $[X_f, X_g] = X_{-\{f, g\}}$ (4-32), bilden diese eine Unteralgebra von $Vect(M)$. Für die Lie-Ableitung gilt

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X . \quad (8-15)$$

Mit $d\omega = 0$ folgt daraus $L_X \omega = di_X \omega = d(\omega(X, \cdot))$. Ist X_f ein Hamiltonsches Vektorfeld, so gilt

$$L_{X_f} \omega = d(\omega(X_f, \cdot)) = d(df) = 0 . \quad (8-16)$$

Wir erhalten somit die Kette von Vektorfeldalgebren

$$0 \leq Ham(M) \leq LHam(M) \leq diff_V(M) \leq Vect(M) .$$

Proposition 8.11. *Seien X und Y Vektorfelder mit $L_X \omega = L_Y \omega = 0$, dann gilt*

$$[X, Y] = -X_{\omega(X, Y)} . \quad (8-17)$$

Beweis. Zu zeigen ist, daß für alle Vektorfelder Z gilt

$$\omega(-[X, Y], Z) = d(\omega(X, Y))(Z), \quad \text{d.h.} \quad i_{[X, Y]} = di_X i_Y \omega .$$

Nun gilt [1, p.121]

$$i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X .$$

Wegen den Voraussetzungen bleibt nur $L_X i_Y \omega$ auf der rechten Seite. Unter Benutzung von (8-15) erhalten wir

$$d i_X i_Y \omega = L_X i_Y \omega - i_X d i_Y \omega .$$

Aus $L_Y \omega = 0$ ergibt sich wiederum mit (8-15) $d i_Y \omega = 0$ und somit die Behauptung. \square

Dies bedeutet, daß $Ham(M)$ ein Ideal in $LHam(M)$ ist. Die Faktorabbildung ist gegeben durch

$$LHam(M)/Ham(M) \cong H^1(M, \mathbb{R}), \quad X \mapsto i_X \omega . \quad (8-18)$$

Aufgrund von (8-17) ist die Lie-Struktur auf dem Quotienten abelsch.

Die Poisson-Algebra $\mathcal{P}(M)$ steht selbst in Beziehung zu $Ham(M)$. Es sei die Abbildung

$$\Psi : \mathcal{P}(M) \rightarrow Ham(M), \quad f \mapsto -X_f \quad (8-19)$$

gegeben. Per Definition ist Ψ surjektiv und wegen (4-32) ein Lie-Homomorphismus. $X_f = 0$ bedeutet $df = 0$, d.h. $\ker \Psi = \mathbb{R}$. Wir erhalten die exakte Sequenz von Lie-Algebren

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(M) \longrightarrow Ham(M) \longrightarrow 0 . \quad (8-20)$$

Für kompaktes M spaltet diese Sequenz. Wir haben in diesem Fall nämlich den Isomorphismus

$$\hat{\Psi} : \mathcal{P}(M) \cong \mathbb{R} \oplus Ham(M), \quad f \longrightarrow \left(\int_M f \Omega, -X_f \right) . \quad (8-21)$$

Hierzu haben wir lediglich zu zeigen, daß $\int_M \{f, g\} \Omega = 0$ gilt. Dies ist richtig, da für beliebige Vektorfelder gilt [1, p.153]

$$\int_M df(X) \cdot \Omega = - \int_M f \operatorname{div} X \cdot \Omega . \quad (8-22)$$

Somit

$$\int_M \{f, g\} \Omega = \int_M df(X_g) \Omega = - \int_M \operatorname{div}(X_g) \Omega = 0 ,$$

da Hamiltonsche Vektorfelder divergenzfrei sind.

Für kompakte Mannigfaltigkeiten kann also $Ham(M)$ identifiziert werden mit der Unteralgebra der Funktionen, deren Integral über M verschwindet. Somit kann durch die oben ausgeführte Quantisierung für den wesentlichen Teil der lokal-Hamiltonschen Vektorfelder eine $su(\Gamma_{hol}(M, L^m))$ -Approximation erhalten werden. Es sei daran erinnert, daß im Fall der reellen Dimension 2 die lokal-Hamiltonschen Vektorfelder mit den divergenzfreien zusammenfallen.

(d) Weitere Beispiele. Die Quantentorusalgebra.

In der theoretischen Physik, etwa im Rahmen der Gitterapproximation von kontinuierlichen Feldtheorien, der Hydrodynamik, der Theorie der integrablen Systeme spielen $gl(N), u(N), su(N)$, $N \rightarrow \infty$ Grenzwerte eine wichtige Rolle. Meist hat man es mit unendlichdimensionalen Lie-Algebren zu tun, welche man durch endlichdimensionale approximieren möchte. Das Theorem 8.10 hat gezeigt, daß mit Hilfe der Quantisierung (bei geeigneten Voraussetzungen an die Mannigfaltigkeit) solch ein Limes existiert. Es liefert somit eine strukturelle Aussage über diese Theorien. Andererseits besagt es auch, daß aus der Tatsache allein, daß ein $gl(N)$ -Limes vorliegt (bei dem man die Projektionsabbildungen nicht mit betrachtet), nicht viel Information über die spezielle Situation herausgeholt werden kann, da es sich um ein generelles Prinzip handelt.

Wegen seiner Bedeutung, möchte ich noch einige weitere Beispiele von \mathfrak{L}_α -Quasilimites aus [A] hier behandeln.

Beispiel 8.12. Die Algebren $gl_+(\infty)$, bzw. $gl(\infty)$ sind definiert als

$$\begin{aligned} gl_+(\infty) &:= \{(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \mid a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{ij} = 0 \text{ für fast alle } i, j\} \\ gl(\infty) &:= \{(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{ij} = 0 \text{ für fast alle } i, j\} \end{aligned} \quad (8-23)$$

Als Lie-Produkt sei der üblichen Matrizenkommutator genommen. Dies bedeutet: Ist E_{ij} die Matrix mit Eintrag 1 an der Position (i, j) und 0 sonst, dann bilden die E_{ij} mit $i, j \in \mathbb{N}$, bzw. $i, j \in \mathbb{Z}$ eine Basis und es gilt

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{j,k} E_{il} - \delta_{i,l} E_{k,j} . \quad (8-24)$$

Jede Bijektion $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$ vermittelt über die Numerierung der Standardbasis einen Isomorphismus. Es gibt allerdings keinen kanonischen Isomorphismus. Da jede Matrix nur endlich viele nichtverschwindende Einträge besitzt, ist die Spur wohldefiniert. Dies bedeutet wir können die Unteralgebren

$$sl_+(\infty) := \{ A \in gl_+(\infty) \mid \text{Tr } A = 0 \}, \quad sl(\infty) := \{ A \in gl(\infty) \mid \text{Tr } A = 0 \}$$

definieren. Sei $gl(N)$ die übliche Matrix der $N \times N$ -Matrizen, so ist durch

$$i_N : gl(N) \rightarrow gl_+(\infty), \quad E_{ij} \mapsto E_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

eine Einbettung gegeben. Offensichtlich gilt

$$gl(N) \subset gl(N+1) \subset gl(N+2) \subset \dots \subset gl_+(\infty) = \bigcup_{N=1}^{\infty} gl(N).$$

Genauer ist $gl_+(\infty)$ der direkte Limes der $gl(N)$ im kategoriellen Sinne, wenn man die Standardeinbettung $gl(N) \rightarrow gl(N+1)$ zugrundelegt. Setzt man

$$p_N : gl_+(\infty) \rightarrow gl(N), \quad p_N(E_{ij}) = \begin{cases} E_{ij}, & 1 \leq i, j \leq N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und nimmt man als Metrik d_N die Metrik, welche vom Skalarprodukt

$$\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = \delta_{i,k} \delta_{j,l} = \text{Tr}({}^t E_{ij} E_{kl})$$

herkommt, so erhält man eine Zuordnung

$$gl_+(\infty) \rightarrow (gl(N), p_N, d_N, N \in \mathbb{N}).$$

Da sich alles aus $gl_+(\infty)$ in den Unteralgebren $gl(N)$, für N jeweils geeignet groß gewählt, ausdrücken läßt, sind die Bedingungen der \mathfrak{L}_α -Approximation 8.1 trivialerweise erfüllt.

Beispiel 8.13. Die *Quantentorusalgebra* L_Λ (auch *Sine-Algebra* genannt). Sei

$$V = \langle T_m \mid m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

der Vektorraum mit den Basiselementen T_m . Für $\Lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir auf V eine Lie-Algebrenstruktur \tilde{L}_Λ in der folgenden Weise. Für $\Lambda \neq 0$ sei

$$[T_m, T_n] := \frac{1}{2\pi\Lambda} \sin(2\pi\Lambda(m \times n)) T_{m+n} \quad (8-25)$$

und für $\Lambda = 0$

$$[T_m, T_n] := (m \times n) T_{m+n} , \quad (8-26)$$

gesetzt, mit der Vorgabe

$$m \times n := m \wedge n := m_1 n_2 - m_2 n_1 .$$

Diese Algebren wurden von Fairlie, Fletcher und Zachos [72] eingeführt. Sie heißen (für $\Lambda \neq 0$) *Quantentorusalgebren*. Da aus $m + n = (0, 0)$ $m \times n = 0$ folgt, spalten die Algebren \tilde{L}_Λ (als Lie-Algebren)

$$\tilde{L}_\Lambda = \langle T_{(0,0)} \rangle \oplus \langle T_m \mid m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \rangle_{\mathbb{C}} .$$

Den zweiten Summanden nennen wir L_Λ . Für den Fall $\Lambda = 0$ hat sich auch die Bezeichnung $\text{diff}'_V T^2$ eingebürgert [A]. In der Tat besteht der folgende Zusammenhang mit den Hamiltonschen Vektorfeldern (und somit divergenzfreien Vektorfeldern) auf dem Torus. Parametrisieren wir den reellen 2-dimensionalen Torus T^2 durch $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi$, so können die Funktionen auf T^2 durch ihre Fourier-Darstellung in Bezug auf die Funktionen

$$H_m = H_{(m_1, m_2)} = -\exp(im_1\varphi_1 + im_2\varphi_2) \quad (8-27)$$

gegeben werden. Legen wir die standardsymplektische Form $\omega = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ zugrunde, so berechnet sich

$$\{H_m, H_{m'}\} = \frac{\partial H_m}{\partial \varphi_1} \frac{\partial H_{m'}}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial H_m}{\partial \varphi_2} \frac{\partial H_{m'}}{\partial \varphi_1} = (m \times m') H_{m+m'} .$$

Dies bedeutet, daß die Algebra \tilde{L}_0 mit der Poisson-(Lie-)Unteralgebra der Funktionen identifiziert werden kann, welche eine endliche Fourier-Entwicklung in Bezug auf

die Fourier-Moden (8-27) haben. Für $m \neq (0, 0)$ gilt $\int_{T^2} H_m \omega = 0$. Läßt man somit die Konstanten außer Acht, so erhält man auf der einen Seite die Identifikation mit einer Unteralgebra der Hamiltonschen Vektorfelder und auf der anderen Seite mit der Algebra $L_0 = \text{diff}'(T^2)$.

Berechnet man die Moyal-Klammer (3-12) der erzeugenden Elemente $\{H_m, H_{m'}\}_*$, so erhält man, daß die Algebren \tilde{L}_Λ (bis auf Reskalierung) gerade erhalten werden, indem man $\hbar = 2\pi\Lambda$ setzt. Die Bezeichnung Quantentorusalgebra ist also sinnvoll.

In [120] wird gezeigt, daß die Algebren L_Λ und $L_{\Lambda'}$ für $\Lambda \neq \Lambda'$ im allgemeinen nicht isomorph sind.

Sei nun $\Lambda = 1/N$ und $\tilde{L}^N = \tilde{L}_{1/N}$. Da $\sin(\frac{2\pi}{N}(m + Na) \times n) = \sin(\frac{2\pi}{N}m \times n)$, ist der Unterraum

$$J^N := \langle T_m - T_{m+Na} \mid m, a \in \mathbb{Z}^2 \rangle_{\mathbb{C}} \quad (8-28)$$

ein Lie-Ideal. Insbesondere können wir die Faktoralgebra $L^{(N)} := \tilde{L}^N / J^N$ bilden. Sei $\varphi_N : \tilde{L}^N \rightarrow L^{(N)}$ die kanonische Abbildung. Die Faktoralgebra besitzt die Dimension N^2 . Eine Basis ist durch die Elemente

$$\varphi_N(T_m), \quad m = (p, q), \quad 0 \leq p, q < N$$

gegeben. Es gilt

$$[\varphi_N(T_m), \varphi_N(T_n)] = \frac{N}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{N}(m \times n) \varphi_N(T_{m+n \bmod N}) . \quad (8-29)$$

Proposition 8.14. *Für N ungerade ist die Algebra $L^{(N)}$ isomorph zu $gl(N)$.*

Beweis. Sei allgemein $\{T_a \mid a = 1, 2, \dots, N^2\}$ eine beliebige Basis von $gl(N)$. Die Strukturkonstanten sind in Bezug auf diese Basis $(f_{a,b}^c)$, d.h. es gilt

$$[T_a, T_b] = \sum_{c=1}^{N^2} f_{a,b}^c T_c . \quad (8-30)$$

Desweiteren sei

$$T_a = \sum_{i,j=1}^{N^2} C_{a,ij} E_{ij} \quad a = 1, 2, \dots, N^2 \quad (8-31)$$

der Basiswechsel. Dadurch ist die $N^2 \times N^2$ -Matrix C definiert. Sei $C^{-1} = (C_{ij,a}^{-1})$ die inverse Matrix. Mit (8-24) berechnet man

$$f_{ab}^c = \sum_{i,j,k} (C_{a,ij} C_{b,jk} (C^{-1})_{ik,c} - C_{b,ij} C_{a,jk} (C^{-1})_{ik,c}) . \quad (8-32)$$

Zurück zur vorgegebenen Situation. Sei $\mu = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ eine N -te primitive Einheitswurzel. Wir definieren die $N^2 \times N^2$ -Matrix C mit den Indizes

$$a = (m_1, m_2), \quad m_1, m_2 = -\frac{N-1}{2}, \dots, +\frac{N-1}{2}; \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$C_{m,i,j} := \frac{iN}{4\pi} \mu^{\frac{1}{2}m_1 m_2 + (i-1)m_1} \delta_{i+m_2, j \bmod N} \quad (8-33)$$

wobei $\delta_{k,l \bmod N}$ gleich 1 ist falls $k \equiv l \pmod{N}$ und 0 sonst. Die inverse Matrix berechnet sich zu

$$(C^{-1})_{ij,m} = \frac{-4\pi i}{N^2} \mu^{m_1(m_2/2-j+1)} \delta_{m_2, j-i \bmod N} . \quad (8-34)$$

Die Existenz des Inversen bedeutet, daß es sich tatsächlich um einen Basiswechsel handelt. Die Strukturkonstanten berechnen sich gemäß (8-32) zu

$$f_{m,n}^a = \frac{N}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{N} (m \times n) \delta_{m+n, a \bmod N} . \quad (8-35)$$

Dies bedeutet aber, daß $T_m \mapsto \varphi_N(T_m)$ ein Lie-Homomorphismus ist. Siehe hierzu auch (8-49) für eine strukturellere Interpretation. \square

Prop 8.14 besagt, daß auf jedem Level N der Bildbereich identifiziert werden kann mit $gl(N)$. Wie man jedoch (8-33) entnimmt, macht der Basiswechsel für $N \rightarrow \infty$ keinen Sinn. D.h. die Folgerung daß $gl(\infty) \cong \tilde{L}_\Lambda$ ist, ist ein offensichtlicher Fehlschluß. Die beschriebene Situation paßt aber in dem Rahmen der approximierenden Folgen. In $L^{(N)}$, bzw. $gl(N)$ nehmen wir das Skalarprodukt

$$\langle \varphi_N(T_m), \varphi_N(T_n) \rangle = \delta_{m_1, n_1} \cdot \delta_{m_2, n_2} . \quad (8-36)$$

Die Identität $\tilde{L}_0 \rightarrow \tilde{L}_\Lambda$ ist eine lineare Abbildung. Dies definiert eine Familie von linearen Abbildungen

$$p_N : \tilde{L}_0 \rightarrow \tilde{L}_{1/N} \rightarrow L^{(1/N)}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad N \text{ ungerade} .$$

In [A] wird gezeigt, daß es sich hierbei um einen $gl(2M+1)$, $M \rightarrow \infty$ Quasilimes handelt. Desweiteren wird durch Modifikation des Ansatzes (8-33) auch für $\Lambda = \frac{M}{N}$ eine entsprechende Konstruktion durchgeführt. Da jedes irrationale Λ' durch Elemente $\frac{M_k}{N_k}$ mit N_k ansteigend angenähert werden kann, ist jedes $\tilde{L}_{\Lambda'}$ ein solcher Limes.

Beispiel 8.15. Die Sphärenalgebra (siehe Hoppe [116]). Sie wird erzeugt als Vektorraum von den Elementen

$$Y_{lm}, \quad \text{mit } l \in \mathbb{N}, \quad m = -l, \dots, 0, \dots, +l \quad (8-37)$$

und besitzt das Lie-Produkt

$$[Y_{lm}, Y_{l'm'}] = \sum_{l'', m''} g_{lm, l'm'}^{l'' m''} Y_{l'' m''} . \quad (8-38)$$

Die Strukturkonstanten sind gegeben durch

$$g_{lm, l'm'}^{l'' m''} = i(-1)^{m''} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \dot{Y}_{l'' m''} \left(\frac{\partial \dot{Y}_{lm}}{\partial \theta} \frac{\partial \dot{Y}_{l'm'}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \dot{Y}_{l'm'}}{\partial \theta} \frac{\partial \dot{Y}_{lm}}{\partial \varphi} \right) . \quad (8-39)$$

Hierbei sind die $\dot{Y}_{l,m}(\theta, \varphi)$ die gewöhnlichen Kugelflächenfunktionen. Die Strukturkonstanten verschwinden außerhalb des Bereichs

$$m'' = m + m' \quad \text{und} \quad |l - l'| \leq l'' \leq l + l' - 1 . \quad (8-40)$$

Dadurch ist auch klar, daß die Gleichung (8-38) wohldefiniert ist. Betrachtet man auf S^2 die Poisson-Klammer (siehe auch [88])

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \cos \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial g}{\partial \cos \theta} , \quad (8-41)$$

so gilt wegen (8-39), daß diese Algebra isomorph zur Poisson-Algebra der Funktionen ist, welche sich als endliche Linearkombinationen der Kugelflächenfunktionen $\dot{Y}_{lm}(\theta, \varphi)$, $l \in \mathbb{N}$, $m = -l, \dots, l$ schreiben lassen. Wegen des Zusammenhangs dieser Algebra mit den (komplexifizierten) Hamiltonschen (und somit divergenzfreien) Vektorfeldern wird sie auch mit $\text{diff}'_V S^2$ bezeichnet. Manchmal ist es bequemer auch die triviale zentrale Erweiterung $L := \text{diff}'_A S^2 \oplus \mathbb{C} \cdot Y_{00}$ durch ein zusätzliches Element Y_{00} , das \dot{Y}_{00} entspricht, zu betrachten.

Sei N wiederum eine ungerade Zahl. Es sei in Analogie zum Beweis der Proposition 8.14 die Matrix $C = (C_{lm, ij})$ wie folgt definiert. Der Bereich für das erste Indexpaar sei

$$l = 0, 1, \dots, N - 1 , \quad m = -l, \dots, 0, \dots, +l$$

und für das zweite Paar $i, j = 1, \dots, N$. Das Matrixelement lautet

$$C_{lm,ij} = (-1)^{N-i} \begin{pmatrix} \frac{N-1}{2} & l & \frac{N-1}{2} \\ -i + \frac{N+1}{2} & m & j - \frac{N+1}{2} \end{pmatrix} \cdot \delta_{i-m,j} \cdot R_N(l), \quad (8-42)$$

mit

$$R_N(l) = \sqrt{\frac{2l+1}{16\pi}} \sqrt{\frac{(N+l)!}{(N-l-1)!}} \cdot (N^2-1)^{\frac{1-l}{2}} \quad (8-43)$$

und dem $3j$ -Symbol [??] $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$. Wiederum definiert C einen Basiswechsel in $gl(N)$. Die Strukturkonstanten in Bezug auf diese Basis T_{ml} wurden von Hoppe [116] berechnet. Es sei die Abbildung $p_N : L \rightarrow gl(N)$ gegeben durch

$$p_N(Y_{lm}) = \begin{cases} T_{lm}^N, & \text{für } l < N \\ 0, & \text{für } l \geq N. \end{cases} \quad (8-44)$$

Als Skalarprodukt nehmen wir

$$\langle T_{lm}^N, T_{l'm'}^N \rangle = \delta_{l,l'} \cdot \delta_{m,m'}. \quad (8-45)$$

Es wurde von Hoppe [116],[118] gezeigt, daß die in dieser Weise erhaltenen Strukturkonstanten in $gl(N)$ für $N \rightarrow \infty$ gegen die Strukturkonstanten von L gehen. Wie in [A] ausgeführt, wird hierdurch L ein $gl(2M+1)$, $M \rightarrow \infty$ Quasilimes.

Wir sahen in allen drei Fällen, daß die Algebren $gl(2N+1)$, $N \rightarrow \infty$ Quasilimites sind. Es gilt jedoch wie in [A, App.A] bewiesen wird

Proposition 8.16. *Die Algebren $gl_+(\infty)$, $diff'_V(T^2)$ und $diff'_V(S^2)$ sind paarweise nicht isomorph.*

Die Quantentorusalgebren L_Λ , bzw. \tilde{L}_Λ haben eine reichhaltige mathematische Struktur. Wie von Floratos [86] gezeigt, können sie für generisches Λ in $\overline{gl}(\infty)$ eingebettet werden. Die Algebra $\overline{gl}(\infty)$ ist die Algebra der beidseitig unendlichen Matrizen mit "nur endlich vielen Diagonalen"

$$\overline{gl}(\infty) := \{ (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{ij} = 0 \text{ für } |i-j| \gg 0 \}. \quad (8-46)$$

Diese Algebra wird auch im zweiten Teil dieser Schrift von Bedeutung sein. Bevor ich die Einbettung angebe, möchte ich die Identifikation von $L^{(N)}$ mit $gl(N)$ aus Prop. 8.14 etwas konzeptioneller beschreiben. Sei auch hier N ungerade.

Sei $\varepsilon = e^{(4\pi i)/N}$ und seien G und $H \in gl(N)$ gegeben durch¹

$$G = \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{N-1}), \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (8-47)$$

Es berechnet sich

$$H \cdot G = \varepsilon \cdot G \cdot H. \quad (8-48)$$

Wir setzen für $m = (m_1, m_2)$

$$\hat{T}_m = \frac{iN}{4\pi} \varepsilon^{\frac{1}{2}m_1 m_2} G^{m_1} H^{m_2}. \quad (8-49)$$

Diese \hat{T}_m mit $0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1$ bilden eine Basis von $gl(N)$. Es berechnet sich mit Hilfe von (8-48)

$$[\hat{T}_m, \hat{T}_n] := \frac{N}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{N}(m \times n)\right) \hat{T}_{m+n \bmod N}, \quad (8-50)$$

d.h. die Strukturgleichung (8-29). Wir betrachten nun statt $\Lambda = 1/N$ beliebige reelle Λ . Es sei $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda) = e^{4\pi i \Lambda}$. Ich verwende dieselben Symbole G und H . Allerdings bezeichnen diese nun die beidseitig unendlichen Matrizen

$$G := \text{diag}(\dots, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots), \\ H := \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i, i+1} \quad (8-51)$$

aus $\overline{gl}(\infty)$. Es sei ebenfalls

$$\hat{T}_m = \frac{i}{4\pi\Lambda} \varepsilon^{\frac{1}{2}m_1 m_2} G^{m_1} H^{m_2}. \quad (8-52)$$

Auch hier gilt

$$[\hat{T}_m, \hat{T}_n] := \frac{1}{2\pi\Lambda} \sin(2\pi\Lambda(m \times n)) \hat{T}_{m+n}. \quad (8-53)$$

¹Diese Matrizen wurden bereits von Hermann Weyl [209, Kap. IV, §.15] benutzt.

Somit ist durch $T_m \rightarrow \hat{T}_m$ ein Lie-Homomorphismus $\phi_\Lambda : \tilde{L}_\Lambda \rightarrow \overline{\mathfrak{gl}}(\infty)$ gegeben. Für $\Lambda \in \mathbb{Q}$, d.h. $\Lambda = \frac{M}{N}$ gilt offensichtlich $\hat{T}_{(m_1,0)} = \hat{T}_{(m_1+N,0)}$. Damit ist ϕ_Λ im allgemeinen nicht injektiv. Für irrationales Λ liegt Injektivität vor [87]. Dem eingeweihten Leser mag nicht entgangen sein, daß die Benutzung der G und H im $\Lambda = \frac{1}{N}$ Fall zu tun hat mit der diskreten Heisenberg-Gruppe. Die $su(N)$ -Approximation wird in diesem Bild von Floratos benutzt um den diskretisierten Torus zu quantisieren [86].

Sind die Algebren \tilde{L}_Λ in $\overline{\mathfrak{gl}}(\infty)$ eingebettet, so kann die weit entwickelte Darstellungstheorie dieser Algebra (Vertexoperator-Darstellungen, Spin-Darstellungen, Wedge-Darstellungen, etc.) benutzt werden, um Darstellungen von \tilde{L}_Λ , bzw. von zentralen Erweiterungen von \tilde{L}_Λ zu konstruieren [87], [96], [95], [97], [119].

Diese Algebren und deren endlichdimensionalen Approximationen werden in der Theorie des integrablen Systeme, Solitentheorie, KP-Hierarchien usw. genutzt. Siehe hierzu [27], [119], [97], [191].

Neben diesen Anwendungen spielen die Algebren der divergenzfreien Vektorfelder, bzw. deren Quantendeformation, bzw. deren endlichdimensionalen "Approximationen" auch eine Rolle in der Hydrodynamik einer idealen Flüssigkeit auf der vorgegebenen (symplektischen) Mannigfaltigkeit M . Die Bewegung, gegeben durch die Eulerschen Bewegungsgleichungen des starren Körpers, kann als Bewegung entlang geodätischer in der Rotationsgruppe des 3-dimensionalen Raums beschrieben werden. Wie von Arnold ausgeführt [8, App.2], [7] (siehe auch Ebin-Marsden [69]) kann die Hydrodynamik in formaler Weise dadurch beschrieben werden, daß man die (endlichdimensionale) Rotationsgruppe durch die (unendlichdimensionale) Gruppe der volumenerhaltenden Diffeomorphismen der Mannigfaltigkeit M ersetzt. Geht man über zu den Lie-Algebren, so sind wir wiederum bei der Algebra der divergenzfreien Vektorfelder, bzw. bei der Poisson-Algebra, wie in Abschnitt (c) ausgeführt. Die $su(N)$, $N \rightarrow \infty$ Approximation wurde unter anderem von Dowker und Wolski [67] zum Studium der Hydrodynamik auf dem Torus verwendet. Siehe hierzu auch Zeitlin [214].

Teil II: Konforme Feldtheorie

9. Die Mehrpunktalgebren der konformen Feldtheorie

(a) Die geometrische Situation

Die Virasoro-Algebra und ihre Darstellungen sind von fundamentaler Bedeutung in der zweidimensionalen konformen Feldtheorie. Sie tauchen dort in verschiedener Weise auf (siehe [180] für einige Beispiele). Eine Art sie zu realisieren ist die folgende. Man geht aus von den komplexen Vektorfeldern auf S^1 , die eine endliche Fourier-Darstellung haben, d.h. die man als endliche Linearkombination der Elemente ($\varphi \in S^1$)

$$l_m := -ie^{im\varphi} \frac{d}{d\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9-1)$$

schreiben kann. Der Kommutator der Basiselemente berechnet sich zu

$$[l_n, l_m] = (m - n) l_{n+m} . \quad (9-2)$$

Diese Algebra heißt *Witt-Algebra* \mathcal{W} . Die *Virasoro-Algebra* \mathcal{V} ist die universelle zentrale Erweiterung der Witt-Algebra. In gewisser Weise entspricht dieses Bild der infinitesimalen Situation an einem festen Punkt der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit. Im folgenden steht jedoch das globale Bild, wie es von Krichever und Novikov entwickelt wurde, im Vordergrund. Hierzu beschreibe ich zuerst eine andere Realisierung der Virasoro-Algebra. Geht man über zur komplexen Koordinate $z = e^{i\varphi}$, so kann man (9-1) als Einschränkung des, auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphen, Vektorfelds

$$l_m := z^{m+1} \frac{d}{dz}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9-3)$$

auffassen, bzw. umgekehrt (9-3) als die analytische Fortsetzung von (9-1). Die Relation (9-2) bleibt hierbei erhalten. Die, in dieser Art und Weise fortgesetzten, Vektorfelder sind holomorph außerhalb der Punkte 0 und ∞ . Die möglichen Pole an

diesen Punkten sind von algebraischer Natur. Wir gehen nun aus von den meromorphen Vektorfeldern auf \mathbb{P}^1 ($\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), die holomorph außerhalb der Punktmenge $\{0, \infty\}$ sind. Diese können in Bezug auf die quasiglobale Koordinate z beschrieben werden als $p(z)\frac{d}{dz}$ mit einem beliebigen Laurentpolynom $p \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Die Vektorfelder bilden eine Lie-Algebra unter dem Lie-Produkt

$$\left[p(z)\frac{d}{dz}, r(z)\frac{d}{dz} \right] = \left(p(z)\frac{dr}{dz}(z) - r(z)\frac{dp}{dz}(z) \right) \frac{d}{dz}. \quad (9-4)$$

Offensichtlich ist eine Basis durch die Elemente (9-3) gegeben. Die Virasoro-Algebra \mathcal{V} ist die universelle zentrale Erweiterung mit eindimensionalem Zentrum

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow 0. \quad (9-5)$$

Als Vektorraum ist $\mathcal{V} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{W}$. Eine Basis ist gegeben durch die Lifts $L_n = (0, l_n)$ von l_n und einem zentralen Element $t = (1, 0)$. Die Strukturgleichungen lauten

$$[L_n, L_m] = (m - n)L_{m+n} + \delta_{-n}^m \frac{n^3 - n}{12} \cdot t, \quad [L_n, t] = 0 \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (9-6)$$

Diese Darstellung des 2-Kozykels ist die übliche Konvention. Selbstverständlich kann er kohomolog abgeändert werden und mit einer Konstanten $\neq 0$ multipliziert werden.

Sei $w = 1/z$ der Koordinatenwechsel in die affine Karte um $z = \infty$, so gilt $\frac{d}{dz} = -w^2 \frac{d}{dw}$. Ist v ein globales holomorphes Vektorfeld auf \mathbb{P}^1 mit Repräsentanten (v_z, v_w) in Bezug auf die Standardkoordinaten, so gilt $v_w(w) = -w^2 v_z(\frac{1}{w})$. Insbesondere folgt

$$v \in \langle l_{-1}, l_0, l_1 \rangle_{\mathbb{C}}. \quad (9-7)$$

Man rechnet leicht nach, daß der Unterraum (9-7) eine Unter algebra von \mathcal{W} ist. Diese Unter algebra ist isomorph zu $sl(2, \mathbb{C})$. Der Vorfaktor des zentralen Term, der Kozykel, ist so gewählt, daß bereits seine Einschränkung auf $sl(2, \mathbb{C})$ verschwindet und nicht erst nach kohomologer Abänderung. Dies ist im Einklang mit der Tatsache, daß diese Lie-Algebra keine nichttrivialen zentralen Erweiterungen besitzt.

Ein wichtiger Punkt ist, daß die Virasoro-Algebra \mathcal{V} streng genommen erst die obige Algebra zusammen mit der Graduierung

$$\deg(L_n) = n, \quad \deg(t) = 0 \quad (9-8)$$

ist. Man rechnet sofort nach, daß es sich hierbei um eine graduierte Lie-Algebra handelt. Die Graduierung ist eine entscheidende Eigenschaft, die es einem überhaupt erst erlaubt, Höchstgewichtsdarstellungen zu definieren.

Möchte man die Situation in der Stringtheorie (ein Beispiel einer konformen Feldtheorie) geometrisch interpretieren, so handelt es sich hierbei um eine *Weltfläche* (“*world-sheet*”) vom Geschlecht Null (also mit trivialer Topologie). Der Punkt $P = \{z = 0\}$ entspricht einem ankommenden String und $Q = \{z = \infty\}$ einem ausgehenden String. Siehe hierzu das Bild 1.

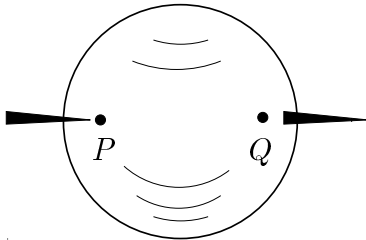


Bild 1: Virasoro Situation
($g = 0$, $N = 2$)

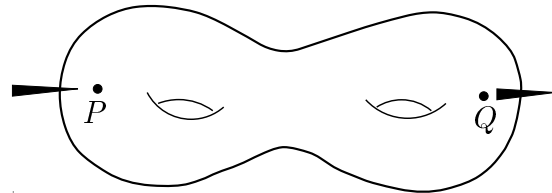


Bild 2: Ein Beispiel einer Krichever-Novikov Situation

Von diesem Standpunkt aus ist es ganz natürlich die Situation auf Riemannsche Flächen beliebigen Geschlechts g und beliebige endliche aber festgehaltene Anzahlen von ankommenden und ausgehenden Strings zu verallgemeinern. Für einen ankommenden und einen ausgehenden String wurde dies von Krichever und Novikov 1987/1988 (siehe Bild 2) [146], [147], [148] gemacht. Für beliebige Anzahlen (siehe Bild 3) wurde dies vom Autor beginnend mit dem Jahr 1989 gemacht [H], [G]. Die Situation wurde auch in die Richtung verallgemeinert, daß ich Differentialoperatoren beliebigen Grads betrachte. Die Vektorfelder entsprechen hierbei dem Grad 1.

Es sei noch erwähnt, daß die Mehrpunktsituation unabhängig auch von R. Dick [61], [62], [63] von Guo, Na, Shen, Wang, Yu, Wu, Chang (siehe etwa [109]) und von Bremner (für 3 Punkte und Geschlecht 0) [37] studiert wurde. Die notwendigen beinahe-graduierten Strukturen (siehe weiter unten) wurden jedoch nicht eingeführt. Lediglich Sadov [177] führte Untersuchungen durch, die mit meinem Zugang verwandt sind.

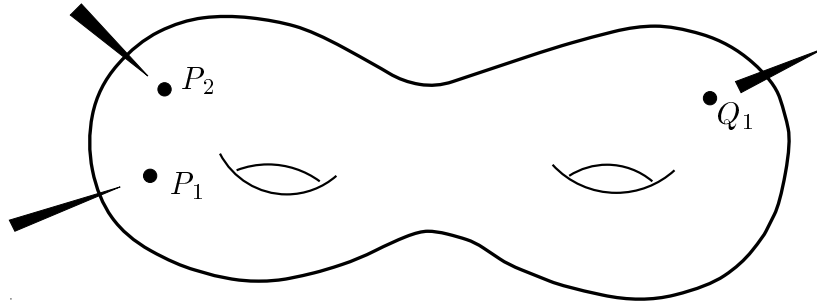


Fig. 3: Ein Beispiel einer verallgemeinerten Situation
($N = 3$, 2 Eintrittspunkte, 1 Austrittspunkte)

Sei M eine kompakte Riemannsche Fläche von beliebigem Geschlecht g .¹ Im folgenden möchte ich die Resultate aus [H], [E], [F], [G] referieren, soweit sie für das Gesamtverständnis notwendig sind. Beweise finden sich dort. Sei A eine festgewählte endliche Punktmenge auf M . Sie sei disjunkt zerlegt in zwei nichtleere Teilmengen I und O ,

$$A = I \cup O, \quad \#I = K \geq 1, \quad \#O = L \geq 1, \quad N = K + L. \quad (9-9)$$

Die Elemente in I nenne ich "Eintrittspunkte", die Elemente in O "Austrittspunkte". Die nichtkompakte Riemannsche Fläche $M \setminus A$ werde ich im folgenden meist mit M^* bezeichnen, wenn klar ist welche Punktmenge A zu nehmen ist.

Sei ρ ein meromorphes Differential, das holomorph auf M^* ist. An den Punkten in A habe ρ die exakte Polordnung 1, vorgegebene positive Residuen bei I , vorgegebene negative Residuen bei O mit

$$\sum_{P \in I} \operatorname{res}_P(\rho) + \sum_{Q \in O} \operatorname{res}_Q(\rho) = 0$$

und rein imaginäre Perioden. Durch die Vorgabe der Residuen und die obigen Bedingungen ist ρ eindeutig festgelegt (siehe [H, p.24]). Es sei ein Punkt $Q \in M^*$ fixiert. Die Funktion

$$u(P) = \operatorname{Re} \int_Q^P \rho \quad (9-10)$$

¹In der Tat ist es möglich, alles in der Art zu formulieren, daß M eine nichtsinguläre, projektive Kurve über dem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} mit $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ ist. In diesem Fall sind die im folgenden auftretenden Kurvenintegrale als Residuen zu interpretieren.

ist eine wohldefinierte harmonische Funktion da die Perioden, welche die Mehrdeutigkeit des Integrals ausmachen, rein imaginär sind. Die *Niveaulinien* der Funktion

$$C_\tau = \{P \in M^* \mid u(P) = \tau\}, \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (9-11)$$

definieren eine “Faserung” von M^* (siehe Bild 4).

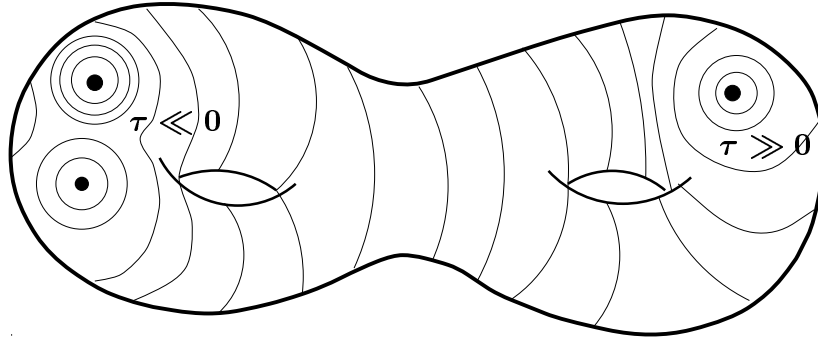


Bild 4: Die Faserung durch Niveaulinien

Jede Niveaulinie C_τ trennt die Eintritts- von den Austrittspunkten. Für $\tau \ll 0$ ist die Niveaulinie C_τ eine disjunkte Vereinigung deformierter Kreise um die Punkte aus I . Für $\tau \gg 0$ ist die Niveaulinie C_τ eine disjunkte Vereinigung deformierter Kreise um die Punkte aus O . Mit variierendem τ können die (deformierten) Kreise zusammengehen und wieder aufspalten. Insbesondere wird dadurch die Topologie erzeugt. In der Stringtheorie kann man τ interpretieren als die “Eigenzeit des Strings”. An einem Punkt an dem die Niveaulinie nichtsingulär ist, sind lokale Koordinaten auf der Weltfläche durch τ und durch eine lokale Koordinate σ , welche die Niveaulinie C_τ lokal parametrisiert, gegeben.

(b) Die geometrischen Algebren und Moduln

Sei \mathcal{K} das kanonische Bündel, d.h. das Geradenbündel dessen lokale Schnitte die lokalen holomorphen Differentiale sind. Für jedes $\lambda \in \mathbb{Z}$ betrachten wir das Bündel $\mathcal{K}^\lambda := \mathcal{K}^{\otimes \lambda}$. Hierbei sei die übliche Konvention vorausgesetzt. D.h. es ist $\mathcal{K}^0 := \mathcal{O}$, das triviale Bündel, $\mathcal{K}^{-1} := \mathcal{K}^*$, das zu \mathcal{K} duale Bündel, und $\mathcal{K}^\lambda := (\mathcal{K}^*)^{-\lambda}$ für negative λ . Die lokalen Schnitte von \mathcal{K}^λ sind die Formen oder auch Differentiale vom Gewicht λ . Speziell für $\lambda = -1$ erhalten wir die lokalen holomorphen Vektorfelder.

Mit \mathcal{F}^λ sei der Vektorraum der globalen meromorphen Schnitte von \mathcal{K}^λ , die holomorph auf M^* sind, bezeichnet. Spezialfälle, welche von besonderer Bedeutung sind, sind die quadratischen Differentiale ($\lambda = 2$), die Differentiale ($\lambda = 1$), die Funktionen ($\lambda = 0$) und die Vektorfelder ($\lambda = -1$). Der Raum der Funktionen sei auch mit \mathcal{A} , der Raum der Vektorfelder mit \mathcal{L} bezeichnet. Wäre $A = \emptyset$ (was hier nicht erlaubt ist), so wären die \mathcal{F}^λ endlichdimensionale Vektorräume. Deren Dimension wird durch den Satz von Riemann-Roch bestimmt. Da allerdings $A \neq \emptyset$ sind die \mathcal{F}^λ alle unendlichdimensional.²

Nachdem man eine "Quadratwurzel" T des kanonischen Bündels, d.h. $T^{\otimes 2} = \mathcal{K}$, fixiert hat (eine *Thetacharakteristik*), kann auch $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ betrachtet werden. Die Formen vom Gewicht $1/2$ heißen auch *Spinoren*. Allerdings hängen für nicht ganzes λ alle im folgenden betrachteten Objekte von der gewählten Thetacharakteristik, d.h. von der Spinorstruktur ab. Der Einfachheit halber sei im folgenden immer ganzzahliges λ vorausgesetzt.

Ist E ein holomorphes Geradenbündel, so ist die Garbe seiner Schnitte eine lokalfreie Garbe vom Rang 1. Ist s ein globaler meromorpher Schnitt von E und $P \in M$ ein Punkt, so kann s lokal bei P durch eine meromorphe Funktion \hat{s} repräsentiert werden. Die (Nullstellen-)Ordnung des Schnittes s bei P ist durch $\text{ord}_P(s) := \text{ord}_P(\hat{s})$ definiert. Der Divisor des Schnittes ist gegeben als die formale endliche Summe

$$(s) = \sum_{P \in M} \text{ord}_P(s)[P]. \quad (9-12)$$

Es ist wohlbekannt, daß sich die Isomorphieklassen von Geradenbündel, die Isomorphieklassen von lokalfreien Garben vom Rang 1 und die Divisorenklassen durch die obige Beziehung in natürlicher Weise identifizieren (auch mit ihrer Gruppenstruktur).³ Deshalb werde ich auch dem allgemeinen Gebrauch folgen und nicht immer zwischen dem Bündel, seiner Garben, seiner Divisorenklasse, bzw. sogar einem Divisor eines meromorphen Schnittes unterscheiden. Ebenso ist wohlbekannt, daß die kompakte Riemannsche Fläche M komplex isomorph zu einer projektiven nichtsingulären Kurve in einem starken Sinne ist (Kodairascher Einbettungssatz und der Satz von Chow). Dies bedeutet M kann in einen geeigneten projektiven

² M^* ist eine affine Kurve, siehe weiter unten.

³Siehe [D, §9.] für eine kurze Zusammenfassung dieser Beziehung, bzw. [112, II.,6.16] für detaillierte Beweise.

Raum eingebettet werden und unter der Einbettung wird M eine nichtsinguläre Varietät der Dimension 1. Jede meromorphe Funktion wird eine rationale Funktion, jedes holomorphe (meromorphe) Differential wird zu einem regulären (rationalen) Differential, die holomorphen Bündel werden algebraische Bündel, etc.. Auch hier werde ich, je nachdem was vorteilhafter ist, das komplex-analytische Bild oder das algebraisch-geometrische Bild in den Vordergrund stellen. Ein Beispiel dieses Überganges findet sich in Abschnitt 14. An manchen Stellen wird auch nützlich sein, daß $M^* = M \setminus A$ (unter dieser Identifikation) eine affine Varietät ist [112, p.297].

Die natürliche Abbildung (der lokalfreien Garben)

$$\mathcal{K}^\lambda \times \mathcal{K}^\mu \rightarrow \mathcal{K}^\lambda \otimes \mathcal{K}^\mu \cong \mathcal{K}^{\lambda+\mu}, \quad (s, t) \mapsto s \otimes t \quad (9-13)$$

definiert eine assoziative Verknüpfung

$$\mathcal{F}^\lambda \times \mathcal{F}^\mu \rightarrow \mathcal{F}^{\lambda+\mu} .$$

In den lokalen Trivialisierungen bedeutet dies gerade die Multiplikation der Repräsentanten. Der Vektorraum

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^\lambda, \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathcal{F}^\lambda \quad (9-14)$$

wird dadurch zu einer assoziativen, kommutativen Algebra. Die Funktionen (d.h. die Elemente von $\mathcal{A} = \mathcal{F}^0$) bilden selbst eine assoziative Algebra. Sie operieren auf jedem \mathcal{F}^λ separat und machen diese zu \mathcal{A} -Moduln.

Daneben operieren die Vektorfelder (d.h. die Elemente von $\mathcal{L} = \mathcal{F}^{-1}$) durch die Lie-Ableitung auf \mathcal{F}^λ . In lokalen Koordinaten kann die Lie-Ableitung beschrieben werden durch

$$\nabla_e(g)_| := L_e(g)_| := \left(e(z) \frac{d}{dz} \right) \cdot (g(z) dz^\lambda) := \left(e(z) \frac{dg}{dz}(z) + \lambda g(z) \frac{de}{dz}(z) \right) dz^\lambda . \quad (9-15)$$

Hierbei ist e ein Vektorfeld und g eine Form vom Gewicht λ . Zur Notationsvereinfachung habe ich dasselbe Symbol für den Schnitt und den lokalen Repräsentanten verwendet. Falls keine Unklarheiten entstehen, werde ich dies auch im folgenden tun. Man rechnet nach, daß der Raum \mathcal{F}^λ unter (9-15) auf \mathcal{F}^λ abgebildet wird.

Läßt man \mathcal{L} via (9-15) auf sich selbst operieren, so wird \mathcal{L} zu einer Lie-Algebra. Für $e, f \in \mathcal{L}$ verwende ich auch $[e, f] := \nabla_e(f)$. Die Algebra \mathcal{L} nenne ich *verallgemeinerte Krichever-Novikov-Vektorfeldalgebra*. Man rechnet direkt nach, daß auf \mathcal{F}^λ

$$[L_e, L_f] = L_{[e, f]} \quad (9-16)$$

gilt. Dies bedeutet, daß die \mathcal{F}^λ Lie-Moduln über der Lie-Algebra \mathcal{L} sind. Auf ganz \mathcal{F} operiert \mathcal{L} als Derivation, d.h. es gilt

$$L_e(f \otimes g) = f \otimes L_e(g) + L_e(f) \otimes g . \quad (9-17)$$

Ist R eine assoziative Algebra, so kann auf dem unterliegenden Vektorraum eine Lie-Algebra LR eingeführt werden dadurch, daß man den Kommutator $[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$ als Lie-Produkt nimmt. Wenn klar ist, daß die Lie-Struktur gemeint ist, werde ich oft R statt LR verwenden. Offensichtlich ist LA eine abelsche Lie-Algebra und die \mathcal{A} -Moduln \mathcal{F}^λ werden zu LA -Moduln.

Da \mathcal{L} auf \mathcal{A} als Derivation operiert, kann das semi-direkte Produkt $\mathcal{D}^1 = \mathcal{A} \times \mathcal{L}$ gebildet werden. Diese Lie-Algebra ist die Algebra der *Differentialoperatoren vom Grad ≤ 1* , welche meromorph auf M und holomorph auf M^* sind. Als Vektorraum gilt $\mathcal{D}^1 = \mathcal{A} \oplus L$ und das Lie-Produkt ist per Definition gegeben als

$$[(g, e), (h, f)] := (L_e h - L_f g, [e, f]) . \quad (9-18)$$

Wir haben die kurze exakte Sequenz von Lie-Algebren

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0 . \quad (9-19)$$

Offensichtlich kann auch \mathcal{L} via $e \mapsto (0, e)$ als Unter algebra von \mathcal{D}^1 aufgefaßt werden. Die Moduln \mathcal{F}^λ werden zu \mathcal{D}^1 -Moduln durch die Vorgabe

$$(g, e) \cdot f = g \cdot f + L_e(f) . \quad (9-20)$$

Im folgenden wollen wir auch Differentialoperatoren beliebigen Grads betrachten. Hierzu haben wir universelle Konstruktionen vorzunehmen. Es sei definiert

$$\mathcal{D} = U\mathcal{D}^1/J, \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{D}^{(\lambda)} = U\mathcal{D}^1/J_\lambda , \quad (9-21)$$

mit UD^1 der universellen einhüllenden Algebra von \mathcal{D}^1 (mit Multiplikation \odot und Einselement $\mathbf{1}$) und den zweiseitigen Idealen

$$J := (a \odot b - a \cdot b, \mathbf{1} - 1 \mid a, b \in \mathcal{A}),$$

$$J_\lambda := (a \odot b - a \cdot b, \mathbf{1} - 1, a \odot e - a \cdot e + \lambda L_e(a) \mid a, b \in \mathcal{A}, e \in L).$$

Alle \mathcal{F}^λ sind aufgrund der universellen Konstruktion Moduln über UD^1 . Die Relationen aus J sind erfüllt. Damit sind für jedes λ die \mathcal{F}^λ Moduln über \mathcal{D} . Für ein festes λ sind aber auch die Relationen in J_λ erfüllt. Somit wird dieses feste \mathcal{F}^λ ein Modul über $\mathcal{D}^{(\lambda)}$.

Definition 9.1. ([103, IV,16.8,16.11] und [17]) Eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $D : \mathcal{F}^\lambda \rightarrow \mathcal{F}^\lambda$ heißt (algebraischer) Differentialoperator vom Grad $\leq n$ mit $n \geq 0$, falls gilt:

- (1) Ist $n = 0$, so ist $D = b$, die Multiplikation mit einer Funktion $b \in \mathcal{A}$.
- (2) Ist $n > 0$, so gilt für alle $a \in \mathcal{A}$ (aufgefaßt als Multiplikationsoperator)

$$[D, a] : \mathcal{F}^\lambda \rightarrow \mathcal{F}^\lambda$$

ist ein Differentialoperator vom Grad $\leq (n - 1)$.

Es sei $\text{Diff}^{(n)}(\mathcal{F}^\lambda)$ der Unterraum aller Differentialoperatoren von \mathcal{F}^λ vom Grad $\leq n$. Durch das Hintereinanderausführen wird

$$\text{Diff}(\mathcal{F}^\lambda) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \text{Diff}^{(n)}(\mathcal{F}^\lambda)$$

eine assoziative Algebra. Man rechnet leicht nach, daß jedes Element D von \mathcal{D} bzw. von $\mathcal{D}^{(\lambda)}$ als (algebraischer) Differentialoperator auf \mathcal{F}^λ operiert. D.h. wir haben Ringhomomorphismen

$$\mathcal{D} \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F}^\lambda), \quad \mathcal{D}^{(\lambda)} \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F}^\lambda). \quad (9-22)$$

Da $M^* = M \setminus A$ eine affine Varietät ist, kann jeder algebraische Differentialoperator von \mathcal{F}^λ durch solch ein D aus \mathcal{D} repräsentiert werden [103]. Die Elemente in \mathcal{D} nenne ich *kohärente Differentialoperatoren* und die Elemente in $\mathcal{D}^{(\lambda)}$ die Differentialoperatoren von \mathcal{F}^λ .

(c) Die beinahe-graduierte Struktur

Wie oben bereits bemerkt ist die graduierte Struktur der Algebren wichtig, um Höchstgewichtsdarstellungen zu konstruieren, ja sogar um sie zu definieren. Nun sind leider im allgemeinen die in (b) eingeführten Algebren nicht graduiert. Glücklicherweise ist es aber möglich mit einem schwächeren Konzept auszukommen, der Beinahe-Graduierung wie sie von Krichever und Novikov [146] eingeführt wurde.

Definition 9.2. (a) Sei \mathcal{L} eine (Lie-)Algebra mit $\mathcal{L} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_n$ einer direkten Vektorraumzerlegung. \mathcal{L} heißt *beinahe-graduierte* (almost-graded, quasi-graded, generalized-graded) (Lie-)Algebra, falls gilt:

- (1) $\dim \mathcal{L}_n < \infty$.
- (2) Es gibt Konstanten R und S mit

$$\mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_m \subseteq \bigoplus_{h=n+m-R}^{n+m+S} \mathcal{L}_h, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \quad (9-23)$$

Die Elemente aus \mathcal{L}_n heißen *homogene Elemente vom Grad n* .

(b) Sei \mathcal{L} eine beinahe-graduierte (Lie-)Algebra und \mathcal{M} ein \mathcal{L} -Modul mit $\mathcal{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_n$ einer direkten Vektorraumzerlegung. \mathcal{M} heißt *beinahe-graduierter* (almost-graded, quasi-graded, generalized-graded) Modul, falls gilt:

- (1) $\dim \mathcal{M}_n < \infty$.
- (2) Es gibt Konstanten R und S mit

$$\mathcal{L}_m \cdot \mathcal{M}_n \subseteq \bigoplus_{h=n+m-R}^{n+m+S} \mathcal{M}_h, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \quad (9-24)$$

Die Elemente aus \mathcal{M}_n heißen *homogene Elemente vom Grad n* .

Die obige Definition macht sowohl Sinn für Lie-Algebren und deren Moduln als auch für assoziative Algebren und deren Moduln. Darüberhinaus kann man auch allgemeinere Gradbereiche statt \mathbb{Z} zulassen. Es kann sinnvoll sein, auf die Forderung nach der Endlichdimensionalität zu verzichten. Im folgenden werde ich sie jedoch immer voraussetzen.

Es soll nun solch eine Beinahe-Graduierung auf den \mathcal{F}^λ eingeführt werden

$$\mathcal{F}^\lambda = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n^\lambda . \quad (9-25)$$

Dies geschieht durch Angabe der Elemente, welche ein Basis von \mathcal{F}_n^λ bilden. Dies wird ausführlich in [H, §5.], [G] gemacht. Hierbei spielt die Zerlegung von A in I und O eine entscheidende Rolle. Hier möchte ich lediglich ein Beispiel geben. Es sei $K = L$, d.h. wir haben dieselbe Anzahl von Eintritts- wie Austrittspunkten. Desweiteren sei das Geschlecht $g = 0$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ beliebig oder $g \geq 2$ und $\lambda \neq 0, 1$. Die Punkte $I = \{P_1, P_2, \dots, P_K\}$, $O = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_K\}$ seien für $g \geq 2$ in generischer Lage. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jedes $p = 1, \dots, K$ bis auf Multiplikation mit einem Skalar ein eindeutiges Element $f_{n,p}^\lambda \in \mathcal{F}^\lambda$ mit

$$\begin{aligned} \text{ord}_{P_i}(f_{n,p}^\lambda) &= (n + 1 - \lambda) - \delta_i^p, & i = 1, \dots, K, \\ \text{ord}_{Q_i}(f_{n,p}^\lambda) &= -(n + 1 - \lambda), & i = 1, \dots, K - 1, \\ \text{ord}_{Q_K}(f_{n,p}^\lambda) &= -(n + 1 - \lambda) + (2\lambda - 1)(g - 1) . \end{aligned} \quad (9-26)$$

Dies kann entweder mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch [H], [E] oder durch explizite Konstruktionen [H],[F] gezeigt werden. Hierbei ist für $g \geq 2$ die generische Lage der Punkte wichtig. Nachdem man Koordinaten z_i an den Punkten P_i gewählt hat, kann die skalare Konstante durch die weitere Vorschrift

$$f_{n,p}^\lambda(z_p) = z_p^{n-\lambda} (1 + O(z_p)) (dz_p)^\lambda \quad (9-27)$$

fixiert werden. Die Elemente $f_{n,p}^\lambda$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $p = 1, \dots, K$ bilden eine Basis von \mathcal{F}^λ .

Die Basiselemente erfüllen eine wichtige Dualitätsrelation (nachdem man die Skalare wie oben fixiert hat)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f_{n,p}^\lambda \cdot f_{m,r}^{1-\lambda} = \delta_{-n}^m \cdot \delta_p^r . \quad (9-28)$$

Hierbei ist C_τ eine nichtsinguläre Niveaulinie. Dieses Integral ist unabhängig vom gewählten τ . Sei nämlich etwa $\tau_1 < \tau_2$ und

$$M_{\tau_1, \tau_2} := \{ P \in M \mid \tau_1 \leq u(P) \leq \tau_2 \}$$

dann berandet die Kurve $C_{\tau_1} - C_{\tau_2}$ die Fläche M_{τ_1, τ_2} . Ist $\omega \in \mathcal{F}^1$, so ist ω auf M_{τ_1, τ_2} holomorph. Mit dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{C_{\tau_1}} \omega = \int_{M_{\tau_1, \tau_2}} d\omega + \int_{C_{\tau_2}} \omega = \int_{C_{\tau_2}} \omega .$$

Da $f_{n,p}^\lambda \cdot f_{m,r}^{1-\lambda} \in \mathcal{F}^1$, folgt die Unabhängigkeit. Die Berandungseigenschaft zeigt auch, daß die Homologieklassse $[C_\tau] \in H_1(M^*, \mathbb{Z})$ des, durch die Niveaulinie C_τ gegebenen, Zyklus unabhängig von τ ist. Dasselbe Argument zeigt auch, daß die Klasse $[C_\tau]$ und damit das Integral unabhängig von den gewählten Residuen von ρ ist, solange die Vorzeichenverteilung erhalten bleibt.

Ist $g \geq 2$ und $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$, so sind die Vorgaben für endlich viele $f_{n,p}^\lambda$ zu modifizieren. Genauso sind für $K \neq L$ die Vorgaben für alle $f_{n,p}^\lambda$ an den Punkten aus O zu modifizieren. In all den Modifikationen bleibt allerdings sowohl die Vorgabe bei I als auch die Dualität (9-28) bestehen.

Der Torusfall ($g = 1$) ist insofern ein spezieller Fall, da hier dz ein globales holomorphes Differential ohne Nullstellen ist. Dies bedeutet, daß das kanonische Bündel trivial ist, $K \cong \mathcal{O}$. Damit sind aber auch alle Tensorpotenzen trivial. Dies bedeutet, haben wir eine Basis $\{f_{n,p}^0\}$ von \mathcal{A} gefunden, so ist

$$f_{n,p}^\lambda = f_{n-\lambda,p}^0 dz^\lambda \tag{9-29}$$

eine Basis von \mathcal{F}^λ . Um eine Basis von \mathcal{A} zu bestimmen, sind wiederum Modifikationen der obigen Vorgaben für endlich viele n notwendig. Allerdings ist keine Voraussetzung an die generische Lage der Punkte notwendig.⁴

Aufgrund der Dualität führe ich nun folgende Notation⁵ ein

$$f_\lambda^{*,(n,p)} = f_{-n,p}^\lambda, \quad A_{n,p} = f_{n,p}^0, \quad e_{n,p} = f_{n,p}^{-1}, \quad \omega_{n,p} = f_1^{*,(n,p)}, \quad \Omega_{n,p} = f_2^{*,(n,p)} \tag{9-30}$$

Die homogenen Elemente sind definiert als die Elemente der Räume

$$\mathcal{F}_n^\lambda := \langle f_{n,p}^\lambda \mid p = 1, \dots, K \rangle . \tag{9-31}$$

⁴Im Torusfall sind alle Divisorenklassen vom Grad ≥ 1 nichtspeziell und unter den Divisorenklassen vom Grad 0 ist nur die Hauptdivisorklasse speziell.

⁵Da die Verwendung von ω und Ω aus Teil I hier keine Rolle mehr spielt, dürfte keine Verwechslungsgefahr bestehen.

Es gilt $\dim \mathcal{F}_n^\lambda = K$. Für die Algebren definieren wir entsprechend

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n &:= \langle e_{n,p} \mid p = 1, \dots, K \rangle, & \mathcal{A}_n &:= \langle A_{n,p} \mid p = 1, \dots, K \rangle, \\ \mathcal{D}_n^1 &:= \langle A_{n,p}, e_{n,p} \mid p = 1, \dots, K \rangle, \end{aligned} \quad (9-32)$$

Ein wesentliches Resultat aus [H], [G] ist

Satz 9.3. *In Bezug auf die obige Graduierung sind die Algebren \mathcal{A} , \mathcal{L} und \mathcal{D}^1 beinahe-graduirt und die Moduln \mathcal{F}^λ beinahe-graduirt Moduln über den Algebren. Genauer gilt*

$$\mathcal{A}_n \cdot \mathcal{A}_m \subseteq \bigoplus_{h=n+m}^{n+m+R_1} \mathcal{A}_h, \quad \mathcal{A}_n \cdot \mathcal{F}_m^\lambda \subseteq \bigoplus_{h=n+m}^{n+m+R_2} \mathcal{F}_h^\lambda, \quad (9-33)$$

$$[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] \subseteq \bigoplus_{h=n+m}^{n+m+R_3} \mathcal{L}_h, \quad \mathcal{L}_n \cdot \mathcal{F}_m^\lambda \subseteq \bigoplus_{h=n+m}^{n+m+R_4} \mathcal{F}_h^\lambda, \quad (9-34)$$

$$[\mathcal{D}_n^1, \mathcal{D}_m^1] \subseteq \bigoplus_{h=n+m}^{n+m+R_5} \mathcal{D}_h^1, \quad \mathcal{D}_n^1 \cdot \mathcal{F}_m^\lambda \subseteq \bigoplus_{h=n+m}^{n+m+R_6} \mathcal{F}_h^\lambda, \quad (9-35)$$

mit, nicht von n und m abhängenden, Werten R_1, R_2, \dots, R_6 .

Es sei noch darauf hingewiesen, daß \mathcal{F} durch die Definition $\mathcal{F}_n = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n^\lambda$ ebenfalls zu einer beinahe-graduirt Algebra wird, falls man in der Definition 9.2 die Forderung der Endlichdimensionalität wegläßt.

In [H] werden explizite Formeln für die Schranken R_i in Abhängigkeit vom Geschlecht g der Riemannschen Fläche und der Aufspaltung $N = K + L$ gegeben. Um einen Eindruck von den Schranken zu geben, sei für $K = L$ die Schranke für die Vektorfeldalgebra gegeben. Es ist

$$R_3 = \begin{cases} 0, & g = 0, K = L = 1 \\ 3, & g = 0, K > 1 \\ 3g, & g \geq 2. \end{cases} \quad (9-36)$$

Für $g = 1$ handelt es sich hierbei um die generische Schranke. (Siehe weiter unten auch den Fall $N = 2 = 1 + 1$.)

Die Definition der \mathcal{F}^λ hängt nur von den Punkten, an denen Pole erlaubt sind, ab. Die Aufspaltung $A = I \cup O$ geht wesentlich in die Theorie ein, indem sie

eine Graduierung festlegt. Genau genommen wird die Graduierung erst durch die Numerierung der Punkte in I und O fixiert. Hierbei ist die Numerierung der Punkte aus I ohne Bedeutung. Wie man allerdings (9-26) entnehmen kann, hängt die Graduierung von der Numerierung innerhalb O ab. Wie in [H] gezeigt, gilt für die induzierte Filtrierung

$$\mathcal{F}_{(n)}^\lambda := \langle f_{m,p}^\lambda \mid m \in \mathbb{Z}, m \geq n, p = 1, \dots, K \rangle = \{ f \in \mathcal{F}^\lambda \mid \text{ord}_P(f) \geq n - \lambda, \forall P \in I \} \quad (9-37)$$

und ist somit invariant unter Umnummerierung. Sie hängt also lediglich von der Aufspaltung $I \cup O$ ab. Dort wird ebenfalls gezeigt, daß wesentlich verschiedene Aufspaltung, d.h. Aufspaltungen, welche sich nicht nur durch eine Vertauschung der Rollen von I und O unterscheiden, nichtäquivalente Filtrierungen erzeugen. Solch eine Vertauschung der Rollen von I und O wird dadurch erreicht, daß das Differential ρ mit einer negative Zahl multipliziert wird.

Bemerkung. Sei eine andere Numerierung der Punkte in O gegeben und die damit konstruierten Basiselemente mit $g_{n,p}^\lambda$ bezeichnet. Man berechnet (siehe im Vorgriff die Formel (9-48))

$$g_{n,p}^\lambda = f_{n,p}^\lambda + \sum_{h=n+1}^{n+R} \sum_{s=1}^K \alpha_{(n,p)(h,s)} f_{h,s}^\lambda .$$

Hierbei ist R eine Konstante, welche nur von g und der Zerlegung $N = K + L$ abhängt. Betrachtet man die beiden dadurch induzierten Beinahe-Graduierungen auf \mathcal{F}^λ , so besagt diese Formel gerade, daß die Identität ein "Isomorphismus beinahe-graduierter Algebren" ist. Siehe hierzu auch die Definition 14.7.

Will man die Struktur der Algebra \mathcal{A} , bzw. \mathcal{L} durch die Strukturkonstanten in Bezug auf die Basiselemente $\{A_{n,p}\}$ bzw. $\{e_{n,p}\}$ angeben, so erhält man

$$A_{n,p} \cdot A_{m,r} = \sum_{h=n+m}^{n+m+R_1} \sum_{s=1}^K \alpha_{(n,p)(m,r)}^{(h,s)} A_{h,s}, \quad (9-38)$$

$$[e_{n,p}, e_{m,r}] = \sum_{h=n+m}^{n+m+R_3} \sum_{s=1}^K C_{(n,p)(m,r)}^{(h,s)} e_{h,s} . \quad (9-39)$$

Die Strukturkonstanten sind aufgrund der Dualität (9-28) berechenbar aus

$$\alpha_{(n,p)(m,r)}^{(h,s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} A_{n,p} A_{m,r} \omega^{h,s}, \quad C_{(n,p)(m,r)}^{(h,s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} ([e_{n,p}, e_{m,r}]) \cdot \Omega^{h,s} . \quad (9-40)$$

Für die Berechnung [H] benutzt man, daß die Integrale durch Residuen gegeben sind, führt Abschätzungen der Ordnung sowohl bei I als auch bei O durch und benutzt, daß das Gesamtresiduum verschwindet. In dieser Weise wird auch der Satz 9.3 gezeigt. Für die niedrigsten auftretenden Koeffizienten erhält man durch explizites Berechnen des Residuums

$$\alpha_{(n,p)(m,r)}^{(n+m,s)} = \delta_p^s \delta_r^s, \quad C_{(n,p)(m,r)}^{(n+m,s)} = (m-n) \cdot \delta_p^s \delta_r^s. \quad (9-41)$$

Seien $\alpha_{(n,p)(m,r)}^{(h,s)}(\lambda)$ bzw. $C_{(n,p)(m,r)}^{(h,s)}(\lambda)$ die Strukturkonstanten des \mathcal{A} -Moduls bzw. des \mathcal{L} -Moduls \mathcal{F}^λ , so gilt in Verallgemeinerung von (9-41)

$$\alpha_{(n,p)(m,r)}^{(n+m,s)}(\lambda) = \delta_p^s \delta_r^s, \quad C_{(n,p)(m,r)}^{(n+m,s)}(\lambda) = (m+\lambda n) \cdot \delta_p^s \delta_r^s. \quad (9-42)$$

Im 2-Punktfall ist die Aufspaltung und Numerierung eindeutig. Dieser Fall wird uns speziell im Abschnitt 11 im Zusammenhang mit der Sugawara-Konstruktion interessieren. Für diesen Fall wurden diese Basiselemente von Krichever und Novikov eingeführt [146] (siehe auch [149] für einen Überblick über deren Ergebnisse, bzw. [D, § 9(b)]). Obige Formeln seien für diesen Fall spezialisiert. Hierbei sei der zweite Index immer weggelassen. Desweiteren sei $I = \{P_+\}$ und $O = \{P_-\}$ (um in der Notation von Krichever und Novikov zu bleiben). Die lokalen Koordinaten um P_\pm seien z_\pm . Das Differential ρ sei so skaliert, daß $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \rho = 1$ ist. Im generischen Fall sind die Ordnungsvorgaben⁶

$$\text{ord}_{P_+}(f_n^\lambda) = n - \lambda, \quad \text{ord}_{P_-}(f_n^\lambda) = -n + (\lambda - 1) + (2\lambda - 1)(g - 1) \quad (9-43)$$

und

$$f_n^\lambda(z_+)| = z_+^{n-\lambda}(1 + O(z_+)) dz^\lambda. \quad (9-44)$$

Die Dualität schreibt sich als

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} A_n \omega^m = \delta_n^m, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} e_n \Omega^m = \delta_n^m. \quad (9-45)$$

In den anderen Fällen ist eine Modifikation für $-g \leq n \leq 0$ notwendig. Zuerst setzen wir $A_0 = 1$ und $\omega^0 = \rho$. Für $-g \leq n \leq -1$ fordern wir

$$\begin{aligned} \text{ord}_{P_+}(A_n) &= n, & \text{ord}_{P_-}(A_n) &= -n - g - 1, \\ \text{ord}_{P_+}(w^n) &= -n - 1, & \text{ord}_{P_-}(w^n) &= n + g. \end{aligned} \quad (9-46)$$

⁶Die hier verwendete Ordnung unterscheidet sich durch eine Verschiebung von der, von Krichever und Novikov verwendeten.

Um die Elemente zu fixieren fordern wir, daß die Dualität (9-28) erfüllt ist. Aufgrund der Sonderrolle der Indexmenge $\{-g, \dots, -1, 0\}$, bezeichne ich diesen Bereich als *kritischen Streifen*. Für $g \neq 1$ gilt immer $R_3 = 3g$. Ist $g = 0$ (im 2-Punktfall) so gilt $R_1 = 0$. Im allgemeinen kann man auch explizite Formeln für R_1 angeben. Für uns von Bedeutung ist lediglich, daß, falls sowohl n als auch m auf derselben Seite des kritischen Streifens sind (etwa $n, m < -g$), die obere Grenze bei der Gradzerlegung für die Funktionenalgebra $n + m + g$ ist (dies gilt auch im Fall $g = 1$).

Spezialisieren wir weiter zum Geschlecht 0, so können wir o.B.d.A. die Polstellen als $P_+ = 0$ und $P_- = \infty$ annehmen. Diese Situation wollen wir als die *klassische Situation* bezeichnen. Hier ist $\rho = \frac{1}{z}dz$ und $f_n^\lambda = z^{n-\lambda}dz^\lambda$. Insbesondere also

$$e_n = z^{n+1} \frac{d}{dz} = l_n, \quad A_n = z^n .$$

In den Formeln (9-33), (9-34) und (9-35) tritt jeweils nur ein einziger Term auf und wir erhalten die wohlbekanntere graduierte Struktur

$$A_n \cdot f_m^\lambda = f_{n+m}^\lambda, \quad e_n \cdot f_m^\lambda = (m + \lambda \cdot n) f_{n+m}^\lambda . \quad (9-47)$$

(d) Die Delta-Distribution und weitere Eigenschaften

Delta-Distribution.

Ist $f \in \mathcal{F}^\lambda$, so können wir f als endliche Summe

$$f = \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^K \alpha_{n,p} f_{n,p}^\lambda$$

schreiben. Aufgrund der Dualität können die Entwicklungskoeffizienten berechnet werden als

$$\alpha_{n,p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f \cdot f_{1-\lambda}^{*,(n,p)} . \quad (9-48)$$

Dies legt nun folgende Definition nahe. Wir nennen die formale unendliche Summe

$$\Delta_\lambda(Q, Q') := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^K f_{n,p}^\lambda(Q) \cdot f_{1-\lambda}^{*,(n,p)}(Q') \quad (9-49)$$

“Delta-Distribution” (vom Gewicht λ , bzw. zum Paar $(\lambda, 1 - \lambda)$). Ist $f \in \mathcal{F}^\lambda$, so definieren wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f(Q') \Delta_\lambda(Q, Q') := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^K f_{n,p}^\lambda(Q) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f(Q') \cdot f_{1-\lambda}^{*,(n,p)}(Q') . \quad (9-50)$$

Hierbei treten auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden auf, d.h. die Definition macht Sinn. Wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f(Q') \Delta_\lambda(Q, Q') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^K \alpha_{n,p}^\lambda f_{n,p}^\lambda(Q) = f(Q) . \quad (9-51)$$

In derselben Weise erhalten wir für $g \in \mathcal{F}^{1-\lambda}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} g(Q) \Delta_\lambda(Q, Q') = g(Q') . \quad (9-52)$$

Falls klar ist, welches λ gemeint ist, werde ich es auch in der Notation weglassen.

Dies ist eine direkte Verallgemeinerung der “Delta-Distribution” wie sie von Krichever und Novikov in [147] eingeführt wurde. Für $N = 2$ und $\lambda = 0$ spezialisiert sie sich zu der dort gegebenen Form

$$\Delta(Q, Q') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n(Q) \omega^n(Q') . \quad (9-53)$$

In der klassischen Situation ($g = 0$!) erhalten wir

$$\Delta(z, z') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n (z')^{-n-1} dz' .$$

Zumindestens kann in diesem Fall $\Delta(z, z')$ noch etwas allgemeiner eingesetzt werden. Ist nämlich f eine Funktion, die holomorph im Innern des Kreisrings $K_{r,R}$ ist und stetig in den Rand fortgesetzt werden kann, so gilt (dies sieht man, indem man obige Regel auf die Laurententwicklung anwendet)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f(z') \Delta(z, z') = f(z) .$$

In diesem Fall liefert die Cauchy-Kernfunktion, sogar eine “geschlossene Darstellung” von $\Delta(z, z')$. Ausgehend von den konkreten Darstellungen der Basisfunktionen (Thetafunktionen) konnte die entsprechende Verallgemeinerung für die 2-Punktsituation auf beliebigen Riemannsche Flächen durch Krichever und Novikov [146],[147],[148], bzw. von Klimek und Lesniewski [135] gezeigt werden. Der Kreisring wird hierbei ersetzt durch eine Umgebung M_{τ_1, τ_2} von C_τ . Die Mehrpunktverallgemeinerung (in gewissen Fällen) wurde von Sadow [177] ausgeführt.

Explizite Erzeugende.

Für die oben definierten Basiselemente können explizite Formen gefunden werden. Im Fall $g = 0$ sind dies rationale Funktionen. Für $g = 1$ kann man die Weierstraßsche σ -Funktion oder \wp -Funktion nehmen. Für $g \geq 2$ kann man sie mit Hilfe von Thetafunktionen beschreiben, nachdem man M mit der Jacobi-Abbildung in seine Jacobi-Varietät eingebettet hat. Siehe hierzu [H], [F], bzw. [61], [62]. Für den Torusfall siehe auch [C] und [I] sowie [176],[5].

Superalgebren.

Betrachtet man $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, so können auch Superalgebren eingeführt werden. Sei nämlich $f, g \in \mathcal{F}^{-1/2}$, d.h. Schnitte in das duale zu einer fixierten Thetacharakteristik, so wird durch

$$\{f, g\}_+ := f \otimes g + g \otimes f \quad (9-54)$$

ein Schnitt in \mathcal{K}^{-1} , also ein Element von \mathcal{L} gegeben. Analog zum klassischen Fall, kann auf $\mathcal{F}^{-1/2} \oplus \mathcal{L}$ eine Superalgebra definiert werden. Diese hängt von der gewählten Thetacharakteristik ab. Hier möchte ich lediglich auf die Arbeiten von Bonora, Martellini, Rinaldi und Russo [20] und Mezinescu, Nepomechie und Zachos [155] für den 2-Punktfall für höheres Geschlecht verweisen. In der Physik haben sich die Namen *Superalgebren vom Neveu-Schwarz- und Ramond-Typ* in Verallgemeinerung der klassischen Situation eingebürgert. Siehe auch Wang und Xu [206] für den Fall $g = 0$ und mehrere Pole.

Assoziierte graduierte Algebra.

Ausgehend von der Filtrierung (9-37) können wir die Vektorräume

$$\overline{\mathcal{F}}_n^\lambda = \mathcal{F}_{(n)}^\lambda / \mathcal{F}_{(n+1)}^\lambda = \langle \bar{f}_{n,1}^\lambda, \bar{f}_{n,2}^\lambda, \dots, \bar{f}_{n,K}^\lambda \rangle_{\mathbb{C}} \quad (9-55)$$

bilden. Das graduierte Objekt ist dann definiert als

$$\text{gr } \mathcal{F}^\lambda = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\mathcal{F}}_n^\lambda . \quad (9-56)$$

Selbstverständlich ist der Vektorraum $\text{gr } \mathcal{F}^\lambda$ isomorph zu \mathcal{F}^λ . Auf $\text{gr } \mathcal{L}$ kann eine Lie-Algebrenstruktur definiert werden durch

$$[\bar{e}_{n,p}, \bar{e}_{m,r}] := [e_{n,p}, e_{m,r}] \bmod \mathcal{L}_{(n+m)+1} \in \mathcal{L}_{n+m} / \mathcal{L}_{(n+m)+1} . \quad (9-57)$$

In entsprechender Weise wird dann $\text{gr } \mathcal{F}^\lambda$ ein Lie-Modul über $\text{gr } \mathcal{L}$ durch Definition

$$\bar{e}_{n,p} \cdot \bar{f}_{m,r}^\lambda := e_{n,p} \cdot f_{m,r}^\lambda \text{ mod } \mathcal{F}_{(n+m)+1}^\lambda \in \mathcal{F}_{n+m}^\lambda / \mathcal{F}_{(n+m)+1}^\lambda . \quad (9-58)$$

Aufgrund der beinahe-graduiereten Struktur ist dies wohldefiniert. Vergleichen wir die genaue Form des niedrigsten Koeffizienten (9-41), (9-42) mit den Koeffizienten im Virasoro-Fall, so erhalten wir

$$\text{gr } \mathcal{L} \cong \underbrace{\mathcal{W} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}}_{K\text{-mal}} \quad (9-59)$$

als Lie-Algebra. \mathcal{W} ist die Witt-Algebra. Die analoge Zerlegung gilt auch für die Moduln.

Andere Zugänge.

Zum Abschluß dieses Abschnitts möchte ich noch betonen, daß der Krichever-Novikov-Zugang zur algebraisch-geometrischen Beschreibung der konformen Feldtheorie auf Riemannschen Flächen von höherem Geschlecht, nicht der einzige Zugang ist. Es gibt eine Reihe weiterer Zugänge, aus denen hier einige Neuere herausgegriffen werden.

1. Statt die globalen Objekte zu betrachten, kann man auch an jedem der Punkte aus A eine lokale Virasoro-Situation betrachten. Dies ist der Zugang der von Kawamoto, Namikawa, Tsuchiya und Yamada [134] bzw. Tsuchiya, Ueno und Yamada [194] studiert wird. Siehe auch Alvarez-Gaumé, Gomez und Reina [4] und den Übersichtsartikel [197]. Hierbei werden an jedem der Punkte Darstellungen der Virasoro-Algebra betrachtet. Durch die lokalen Entwicklungen der Krichever-Novikov-Objekte besteht eine Beziehung zwischen beiden Zugängen. Dies trifft auch zu für die, in den folgenden Abschnitten behandelten, Darstellungen der globalen Algebren. Eine genauere Untersuchung dieses Zusammenhangs ist sicherlich sehr interessant. Es sei darauf hingewiesen, daß dieser Zugang mit der Theorie der konformen Blöcke, Verlinde-Räume, etc. zu tun hat.

2. Von F. Ferrari wurde in einer Reihe von Arbeiten die konkrete Realisierung der Riemannschen Fläche als Überlagerung von \mathbb{P}^1 zur Konstruktion der feldtheoretischen Objekte benutzt. Dieser Zugang ist insbesondere dann nützlich, wenn die Überlagerungsgruppe zusätzliche Eigenschaften hat (abelsch, zyklisch, etc.). Siehe hierzu [80],[81],[82],[83].

3. Von A. Raina wird in einer Serie von Arbeiten der Zugang über die Axiomatik der N -Punktkorrelationsfunktionen gewählt. Aufgrund der Postulate sind diese gewisse algebraisch-geometrische Objekte, im wesentlichen Schnitte in Bündeln über den symmetrischen Produkten der algebraischen Kurve. Siehe etwa [172],[173].⁷

4. Daneben gibt es viele weitere Zugänge zur konformen Feldtheorie die etwa die differentialgeometrischen Aspekte und die Teichmüllertheorie in den Vordergrund stellen. Eine mehr oder minder willkürliche Auswahl von Arbeiten ist [70],[140],[94],[154],[192],[215]. Mathematisch sehr interessant ist der Zugang über die Schnitttheorie auf dem Modulraum der Kurven. Dieser Zugang läuft unter dem Namen Kontsevich-Witten-Theorie [143],[210].

⁷Mit seinen Methoden erhielt er auch einen weiteren, eleganten Beweis von “Fay’s trisecant identity”.

10. Zentrale Erweiterungen und affine Lie-Algebren

(a) Die zentralen Erweiterungen

In der Quantentheorie ist es oft nötig zu zentralerweiterten Gruppen, bzw. Algebren überzugehen. So gibt es z.B. für die Witt-Algebra (d.h. für die Virasoro-Algebra ohne "zentrale Ladung") keine unitären, irreduziblen Höchstgewichtsdarstellungen. Erst nach dem Übergang zur Virasoro-Algebra existieren solche für gewisse zentrale Ladungen. Zentrale Erweiterungen von Lie-Algebren werden bis auf Äquivalenz durch die Lie-Algebrenkohomologie klassifiziert. Genauer stehen die Klassen nichtäquivalenter zentraler Erweiterungen einer Lie-Algebra \mathcal{G} in natürlicher Korrespondenz zur 2. Kohomologiegruppe $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{C})$. Zur Definition dieser Gruppen kann man folgende Konstruktion benutzen [91].

Sei M ein Modul über \mathcal{G} . Es sei $C^q(\mathcal{G}, M)$ der Vektorraum der antisymmetrischen q -Linearformen mit Werten in M . Der Korandoperator

$$d = d_q : C^q(\mathcal{G}, M) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{G}, M) \quad (10-1)$$

ist wie folgt definiert. Sei $c \in C^q(\mathcal{G}, M)$, so setzen wir

$$\begin{aligned} d_q c(g_1, g_2, \dots, g_{q+1}) = & \\ & \sum_{1 \leq s < t \leq q+1} (-1)^{s+t-1} c([g_s, g_t], g_1, \dots, \check{g}_s, \dots, \check{g}_t, \dots, g_{q+1}) + \\ & + \sum_{1 \leq s \leq q+1} (-1)^s g_s \cdot c(g_1, \dots, \check{g}_s, \dots, g_{q+1}). \end{aligned} \quad (10-2)$$

Hierbei sind $g_1, g_2, \dots, g_{q+1} \in \mathcal{G}$ und \check{g} bezeichne wie üblich die Auslassung des Elementes g in der Auflistung. Direktes Nachrechnen liefert $d \circ d = 0$. Die q -te

Kohomologiegruppe mit Werten in M ist definiert als

$$H^q(\mathcal{G}, M) = \frac{\text{Kern } d_q}{\text{Bild } d_{q-1}},$$

mit der Verabredung

$$C^0(\mathcal{G}, M) = M \quad \text{und} \quad d_q = 0, \quad q < 0.$$

Die Elemente des Kerns heißen auch Kozykel, die Elemente des Bilds Koränder. Uns interessiert hier nur $M = \mathbb{C}$ aufgefaßt als trivialer Modul, d.h. $\mathcal{G} \cdot \mathbb{C} = 0$. Somit verschwindet die 2. Summe in (10-2). Schreiben wir (10-2) für $q = 2$ aus, so erhalten wir

$$d_2 c(f, g, h) = c([f, g], h) - c([f, h], g) + c([g, h], f).$$

Aus $d_2 c(f, g, h) = 0$ folgt mit der Antisymmetrie die Kozykeleigenschaft

$$c([f, g], h) + c([g, h], f) + c(h, f), g) = 0. \quad (10-3)$$

Ein 2-Kozykel ist genau dann ein Korand wenn er sich schreiben läßt als

$$c(f, g) = \kappa([f, g]) \quad (10-4)$$

mit einer Linearform κ auf \mathcal{G} . Mit Hilfe eines 2-Kozykels kann man die zugehörige zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{G}}$ in folgender Weise konstruieren [91]. Als Vektorraum ist $\widehat{\mathcal{G}}$ die direkte Summe $\mathbb{C} \oplus \mathcal{G}$. Das Lie-Produkt ist gegeben durch

$$[(\mu, g), (\nu, f)] = (c(g, f), [g, f]). \quad (10-5)$$

Die Kozykelbedingung (10-3) ist entscheidend dafür, daß dies eine Lie-Algebra definiert. Wählt man die (lineare) Splittingabbildung

$$\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \widehat{\mathcal{G}}, \quad f \mapsto \Phi(f) = (0, f)$$

und bezeichnet mit t das Element $(1, 0)$ so kann (10-5) äquivalent durch

$$[\Phi(g), \Phi(f)] = \Phi([g, f]) + c(g, f) \cdot t \quad \text{und} \quad [\Phi(g), t] = 0 \quad (10-6)$$

beschrieben werden. Die Wahl einer anderen Splittingabbildung Φ' , d.h. die Wahl eines anderen Lifts für die Elemente aus \mathcal{G} , entspricht der Wahl einer Linearform ϕ auf \mathcal{G} durch

$$\Phi'(g) = (\phi(g), g), \quad \text{bzw.} \quad \Phi'(g) = \Phi(g) + \phi(g) \cdot t.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} [\Phi'(g), \Phi'(f)] &= [\Phi(g), \Phi(f)] = \Phi([g, f]) + c(g, f) \cdot t = \\ & \Phi'([g, f]) - \phi([g, f]) \cdot t + c(g, f) \cdot t = \Phi'([g, f]) + c'(g, f) \cdot t . \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$c'(g, f) = c(g, f) + d_1(-\phi)(g, f),$$

d.h. unterschiedliche Lifts bestimmen kohomologe Kozykel. Durch die Umkehrung der obigen Vorgehensweise kann man die kohomologe Abänderung eines Kozykels auch als Wahl eines anderen Liftes beschreiben.

Für den Fall der Witt-Algebra rechnet man sofort nach, daß die Bilinearform, die auf der Basis l_n , $n \in \mathbb{Z}$ durch

$$\chi : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C} : \quad (l_n, l_m) \mapsto \chi(l_n, l_m) = \frac{n^3 - n}{12} \delta_{-n}^m \quad (10-7)$$

gegeben ist, ein 2-Kozykel ist. Als zentrale Erweiterung erhält man die Virasoro-Algebra, siehe (9-6).

Wählt man für die abelsche Lie-Algebra $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ die Basiselemente $\{A_n = z^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ so definiert die bilineare Abbildung

$$\gamma : \mathbb{C}[z, z^{-1}] \times \mathbb{C}[z, z^{-1}] \rightarrow \mathbb{C} : \quad (A_n, A_m) \mapsto \gamma(A_n, A_m) = -n \delta_{-n}^m \quad (10-8)$$

einen 2-Kozykel für $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Die dadurch zentralerweiterte Lie-Algebra der abelschen Funktionenalgebra (sie ist jetzt natürlich keine abelsche Lie-Algebra mehr) heißt auch *Heisenberg-Algebra*. Die Algebra der Differentialoperatoren (vom Grad ≤ 1) ist definiert wie in (9-18). Damit besitzt sie als Basis $\{l_n, A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ mit der Identifikation $A_n \leftrightarrow (A_n, 0)$ und $l_n \leftrightarrow (0, l_n)$. Das Lie-Produkt ergibt sich zu

$$[l_n, A_m] = -[A_m, l_n] = m A_{m+n} . \quad (10-9)$$

Aufgrund der Sequenz (9-19) ist jeder 2-Kozykel von \mathcal{W} durch Zurückziehen auch ein 2-Kozykel von \mathcal{D}^1 . Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß der Kozykel (10-8) zu einem Kozykel auf \mathcal{D}^1 fortgesetzt werden kann. Daneben kann man auf \mathcal{D}^1 noch den folgenden, zu den bisherigen nicht äquivalenten, Kozykel definieren

$$\beta : \mathbb{C}[z, z^{-1}] \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C} : \quad (A_n, l_m) \mapsto \beta(A_n, l_m) = -n(n-1) \delta_{-n}^m , \quad (10-10)$$

bzw. die dadurch definierte antisymmetrische bilineare Fortsetzung. Von Arbarello, DeConcini, Kac und Procesi [6] wird durch direktes Rechnen der folgende Satz bewiesen:

Theorem 10.1. [6] *Es gilt $\dim H^2(\mathcal{D}^1, \mathbb{C}) = 3$. Eine Basis des Raumes wird durch die Klassen der drei Kozykeln (10-7), (10-8) und (10-10) gegeben. Insbesondere ist die universelle zentrale Erweiterung von \mathcal{D}^1 dreidimensional. Für die Unteralgebra \mathcal{W} gilt $\dim H^2(\mathcal{W}, \mathbb{C}) = 1$ und eine Basis wird durch die Klasse des Kozykels (10-7) gegeben.*

Die obige Aussage über den Kozykel der Algebra \mathcal{W} ist natürlich klassisch.

Möchte man dies nun auf beliebige Riemannsche Flächen verallgemeinern, muß man die Definition der Kozykel zuerst geometrisieren. In einem ersten Schritt kann man sie in einer basisunabhängigen Form wie folgt beschreiben

$$\chi(e, f) = \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{24} (e''' f - e f''') \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z=0} \frac{1}{24} (e''' f - e f''') dz, \quad (10-11)$$

$$\gamma(g, h) = \operatorname{res}_{z=0} (g dh) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z=0} g dh, \quad (10-12)$$

$$\beta(g, e) = - \operatorname{res}_{z=0} (g'' e) = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{z=0} e g'' dz. \quad (10-13)$$

Hierbei sind e und f Vektorfelder (welche mit ihren lokalen Funktionen identifiziert werden) und g und h Funktionen. Das Symbol $'$ bedeute Ableitung nach der quasi-globalen Variablen z . In dieser Form kann man die Kozykeln χ und β immer noch nicht verallgemeinern, da es sich bei den Integranden noch nicht um Differentiale handelt; sie transformieren noch nicht korrekt. Es müssen zuerst "Kompensationsterme" aufgenommen werden.

Definition 10.2. Sei (U_α, z_α) eine Überdeckung von M durch Koordinatenumgebungen und seien $z_\beta = f_{\beta\alpha}(z_\alpha)$ die Übergangsfunktionen für nichtleeres $U_\alpha \cap U_\beta$.

(a) Ein holomorpher (meromorpher) *projektiver Zusammenhang* ist eine Kollektion lokaler holomorpher (meromorpher) Funktionen $R_\alpha(z_\alpha)$ die auf nichtleerem $U_\alpha \cap U_\beta$ in folgender Weise in Beziehung stehen:

$$R_\beta(z_\beta) \cdot (f'_{\beta\alpha})^2 = R_\alpha(z_\alpha) + S(f_{\beta\alpha}). \quad (10-14)$$

Hierbei ist $S(h)$ die Schwartzsche Ableitung. Sie ist definiert als

$$S(h) = \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2} \left(\frac{h''}{h'} \right)^2. \quad (10-15)$$

(b) Ein holomorpher (meromorpher) *affiner Zusammenhang* ist eine Kollektion lokaler $T_\alpha(z_\alpha)$ holomorpher (meromorpher) Funktionen für die gilt

$$T_\beta(z_\beta) \cdot (f'_{\beta\alpha}) = T_\alpha(z_\alpha) + \frac{f''_{\beta\alpha}}{f'_{\beta\alpha}}. \quad (10-16)$$

(' bezeichne die Ableitung nach der lokalen Variablen z_α .)

Aufgrund der Definition erkennt man sofort, daß die Differenz zweier projektiver Zusammenhänge ein quadratisches Differential und die Differenz zweier affiner Zusammenhänge ein (lineares) Differential ist. Umgekehrt kann man alle projektiven (affinen) Zusammenhänge erreichen, indem man von einem fixierten aus beliebige quadratische (lineare) Differentiale addiert.

Für den Fall $g = 0$ bzw. $g = 1$ und in Bezug auf die Standardüberdeckung $z, w = 1/z$ bzw. $z - a$ kann als projektiver Zusammenhang $R_{0,\alpha} = 0$ gewählt werden. Für diese Kartenwechsel gilt nämlich $S(h) = 0$. Dies ist im Fall $g = 1$ klar und kann im Fall $g = 0$ explizit nachgerechnet werden. Im Fall $g = 1$ ist $T_{0,\alpha} = 0$ ein affiner Zusammenhang. Ein affiner Zusammenhang für $g = 0$ ist durch das Paar der Funktionen $(0, \frac{2}{w})$ gegeben. Insbesondere ist dieser affine Zusammenhang nicht holomorph. Aufgrund des Residuensatzes kann dieser Pol erster Ordnung nicht durch die Addition eines Differentials beseitigt werden. Somit existiert kein holomorpher affiner Zusammenhang auf \mathbb{P}^1 . Es gilt allerdings

Proposition 10.3. (a) *Auf jeder Riemannschen Fläche gibt es einen holomorphen projektiven Zusammenhang.*

(b) *Sei Q ein beliebiger Punkt auf der Riemannschen Fläche M , dann gibt es einen meromorphen affinen Zusammenhang, der bei Q höchstens einen Pol 1. Ordnung hat und sonst holomorph ist.*

Teil (a) ist ein klassisches Resultat und kann z.B. in [107] gefunden werden. Teil (b) und einen weiteren Beweis von (a), mit Hilfe geeigneter holomorpher Bündel vom Rang 2, findet sich in [H, p.106]. Dort findet sich auch der Beweis der folgenden Proposition:

Proposition 10.4. *Sei T ein meromorpher affiner Zusammenhang und R ein meromorpher projektiver Zusammenhang. Diese seien beide holomorph außerhalb*

von A . Dann sind die bilinearen Abbildungen

$$\widehat{\chi}_R : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}^1, \quad \widehat{\chi}_R(e, f) = \left(\frac{1}{2}(e'''f - ef''') - R \cdot (e'f - ef') \right) dz \quad (10-17)$$

$$\widehat{\gamma} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}^1, \quad \widehat{\gamma}(g, h) = g dh \quad (10-18)$$

$$\widehat{\beta}_T : \mathcal{A} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}^1, \quad \widehat{\beta}_T(g, e) = -(eg'' + T \cdot eg') dz \quad (10-19)$$

wohldefiniert.

Ist $\sigma \in H_1(M^*, \mathbb{Z})$ ein 1-Zykel in der singulären Homologie. Er sei repräsentiert durch einen differenzierbaren Zykel Z_σ . Integriert man die Elemente aus \mathcal{F}^1 über Z_σ , so erhält man eine Linearform auf \mathcal{F}^1 . Da die Polstellen der Differentiale alle in A liegen, hängt die Linearform nur von der Homologiekategorie σ und nicht vom gewählten Zykel Z_σ ab. Wir schreiben deshalb auch $\int_\sigma \omega$ für $\int_{Z_\sigma} \omega$. In [H, § 6.] wird bewiesen

Theorem 10.5. Sei $\sigma \in H_1(M^*, \mathbb{Z})$ fixiert. Gegeben seien die Bilinearformen

$$\begin{aligned} \chi_{R,\sigma}(e, f) &= \frac{1}{24\pi i} \int_{Z_\sigma} \widehat{\chi}_R(e, f), & \gamma_\sigma(g, h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Z_\sigma} \widehat{\gamma}(g, h), \\ \beta_{T,\sigma}(g, e) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Z_\sigma} \widehat{\beta}_T(g, e). \end{aligned} \quad (10-20)$$

Dann gilt:

- (a) Es definiert $\chi_{R,\sigma}$ einen Lie-Algebren 2-Kozykel für die Vektorfeldalgebra \mathcal{L} und somit eine zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{L}}_\sigma$.
- (b) Es definiert γ_σ einen Lie-Algebren 2-Kozykel für die Funktionenalgebra \mathcal{A} und somit eine zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{A}}_\sigma$.
- (c) Beide Kozykel definieren durch Zurückziehen, bzw. triviales Fortsetzen jeweils Kozykel für die Algebra \mathcal{D}^1 .
- (d) Es definiert die antisymmetrische Fortsetzung von $\beta_{T,\sigma}$ einen Lie-Algebren 2-Kozykel für die Algebra \mathcal{D}^1 .
- (e) Sei $\alpha = (\alpha_\chi, \alpha_\gamma, \alpha_\beta) \in \mathbb{C}^3$ beliebig, dann definiert $\alpha_\chi \chi_{R,\sigma} + \alpha_\gamma \gamma_\sigma + \alpha_\beta \beta_{T,\sigma}$ eine zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{D}}_{\alpha,\sigma}$.
- (f) Die Kohomologiekategorie der obigen Kozykeln hängt nicht von dem gewählten projektiven (bzw. affinen) Zusammenhang ab.

(b) Lokale Kozykel

Bisher hatten wir die Beinahe-Graduierung auf unseren Algebren nicht betrachtet. Sei etwa $x \in \mathcal{L}$ und $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{L}}$ sein Lift und t das (nichttriviale) zentrale Basiselement. Durch die Vorgabe

$$\deg \widehat{x} := \deg x \quad \text{und} \quad \deg t := 0 \quad (10-21)$$

soll die Graduierung auf $\widehat{\mathcal{L}}$ fortgesetzt werden.

Dies definiert aber nur dann eine Beinahe-Graduierung, falls der Kozykel χ für \mathcal{L} für Paare von Elementen vom Grad n und Grad m mit $|n + m| > S$ mit einer Konstante S , die nicht von n und m abhängt, verschwindet.

Definition 10.6. Sei \mathcal{G} eine beinahe-graduierte Lie-Algebra und χ ein 2-Kozykel (der Lie-Algebrenkohomologie).

(a) χ heißt *lokaler Kozykel*, falls es Konstanten M und S gibt derart, daß für beliebige homogene Elemente x und y gilt

$$\chi(x, y) \neq 0, \quad \implies \quad M \leq \deg(x) + \deg(y) \leq S . \quad (10-22)$$

(b) Eine Kozykelklasse heißt *lokale Klasse*, falls sie einen Vertreter besitzt, der lokal ist.

(c) Eine zentrale Erweiterung heißt *lokale zentrale Erweiterung*, falls Sie durch eine lokale Kozykelklasse gegeben werden kann.

Es ist zu beachten, daß nicht jeder Kozykel in einer lokalen Klasse auch lokal sein muß. Per Definition hängt der Lokalitätsbegriff von der Graduierung der Algebra \mathcal{G} ab. Bei uns hängt er sogar nur von der Aufspaltung der Polstellenmenge A in I und O ab. Eine Ummumerierung der Punkte in O kann höchstens die Konstanten M und S verändern (siehe die Bemerkung, die (9-37) folgt). Der Lokalitätsbegriff für die Kozykel der 2-Punktalgebren \mathcal{L} und \mathcal{A} wurde von Krichever und Novikov [146] eingeführt.

Unmittelbar folgt:

Proposition 10.7. *Sei \mathcal{G} eine beinahe-graduierte Lie-Algebra, χ ein lokaler Kozykel, der die zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{G}}$ definiert, $\widehat{\cdot}$ die zugehörige Liftabbildung, t der Erzeuger des zentralen Teils und $a \in \mathbb{Z}$ festgewählt. Dann ist durch die Vorgabe*

$$\deg(\widehat{x}) := \deg x, \quad x \in \mathcal{G}, \quad x \text{ homogen} \quad \text{und} \quad \deg t := a \quad (10-23)$$

eine beinahe-graduierte Struktur auf $\widehat{\mathcal{G}}$ definiert.

Im folgenden werde ich immer $\deg t = 0$ setzen.

Im allgemeinen werden unsere oben eingeführten Kozykel $\chi_{R,\sigma}$, γ_σ und $\beta_{T,\sigma}$ nicht lokal sein. Ist σ aber die Homologiekategorie, welche durch die Niveaulinien C_τ gegeben ist (es sei daran erinnert, daß diese alle kohomolog sind) dann gilt

Proposition 10.8. *Seien R und T meromorphe projektive, bzw. affine Zusammenhänge, die holomorph auf M^* sind, dann sind die Kozykel $\chi_{R,\sigma}$, γ_σ und $\beta_{T,\sigma}$ für $\sigma = [C_\tau]$ lokal in Bezug auf die Graduierung der Algebren \mathcal{L} , \mathcal{A} bzw. \mathcal{D}^1 , die in Abschnitt 9. (c) gegeben ist. Insbesondere sind die entsprechenden zentralerweiterten Algebren $\widehat{\mathcal{L}}_\sigma$, $\widehat{\mathcal{A}}_\sigma$ bzw. $\widehat{\mathcal{D}}^1_{\alpha,\sigma}$ durch die Vorgabe (10-23) mit $a = 0$ beinahe-graduiert.*

Dies wird in [H, §6] bewiesen. Es handelt es sich hierbei im wesentlichen um Abschätzungen der Ordnungen des Integranden an den Punkten aus I und O und die Benutzung des Residuensatzes. Fordert man, daß die Zusammenhänge höchstens gewisse maximale Polordnung an den Punkten aus A haben, so können die Konstanten M und S für die jeweiligen Algebren expliziter gegeben werden.

Proposition 10.9. *Sei $\sigma = [C_\tau]$ und sei R ein projektiver Zusammenhang mit höchstens Polen zweiter Ordnung an den Punkten aus A und der lokalen Gestalt an den Punkten $\{P_1, \dots, P_k\}$*

$$R|_{(z_p)} = \alpha_p z_p^{-2} + z_p^{-1}(O(1)), \quad (10-24)$$

in Bezug auf die lokalen Koordinaten z_p , dann gilt mit einer Konstanten M_1 , die nicht von n und m abhängt,

$$\chi_{R,\sigma}(e_{n,p}, e_{m,r}) \neq 0 \implies M_1 \leq (n+m) \leq 0 \quad (10-25)$$

und

$$\chi_{R,\sigma}(e_{k,p}, e_{-k,r}) = \left(\frac{1}{12}(k^3 - k - 2\alpha_p k) \right) \delta_p^r . \quad (10-26)$$

Für den Fall $N = 2$ gilt $M_1 = -6g$.

Die entsprechende Aussage für $N = 2$ wurde bereits in [146] bewiesen. Die Schranke M_1 ist explizit angebar [H, p.85]. sie hängt von g und der Aufspaltung $N = K + L$ ab.

Proposition 10.10. *Sei $\sigma = [C_\tau]$, dann gilt*

(a) *es gibt eine Konstanten M_2 , die nicht von n und m abhängt, mit*

$$\gamma_\sigma(A_{n,p}, A_{m,r}) \neq 0 \implies M_2 \leq (n + m) \leq 0 \quad (10-27)$$

und

$$\gamma_\sigma(A_{n,p}, A_{-n,r}) = (-n) \cdot \delta_p^r . \quad (10-28)$$

Im Fall $N = 2$ gilt $M_2 = -2g$ für generisches n und m .

(b) *Sei T ein meromorpher Zusammenhang, der höchstens Pole 1. Ordnung bei den Punkten aus O hat, dann gibt es eine Konstanten M_3 , die nicht von n und m abhängt, mit*

$$\beta_{T,\sigma}(A_{n,p}, e_{m,r}) \neq 0 \implies M_3 \leq (n + m) \leq 0 \quad (10-29)$$

und

$$\beta_{T,\sigma}(A_{n,p}, e_{-n,r}) = -n(n - 1) \cdot \delta_p^r . \quad (10-30)$$

Im Fall $N = 2$ gilt $M_3 = -2g$ für generisches n (und m bei $g = 1$).

Wird im folgenden $\chi, \chi_R, \gamma, \beta, \beta_T$ benutzt, so soll darunter jeweils die Integration zur Definition des Kozykels über solch eine Niveaulinie verstanden werden. Zur späteren Referenz sei notiert:

$$\chi_R(e, f) = \frac{1}{24\pi i} \int_{C_\tau} \left(\frac{1}{2}(e''' f - e f''') - R \cdot (e' f - e f') \right) dz , \quad (10-31)$$

$$\gamma(g, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} g dh , \quad (10-32)$$

$$\beta(g, e) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} -(eg'' + T \cdot eg') dz . \quad (10-33)$$

Es sei nochmals daran erinnert, wie die zentralerweiterten Algebren davon ausgehend definiert sind. Sei $\widehat{e} = (0, e) \in \widehat{\mathcal{L}} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{L}$ und $t = (1, 0)$, so gilt

$$[\widehat{e}, \widehat{f}] := [\widehat{e}, \widehat{f}] + \chi_R(e, f) \cdot t. \quad (10-34)$$

Entsprechendes gilt für die Algebren $\widehat{\mathcal{A}}$ und $\widehat{\mathcal{D}}^1$.

Es erhebt sich die Frage, ob jeder lokale Kozykel (eventuell nach kohomologer Abänderung) durch Integration der Differentiale aus Prop. 10.4 über die Klasse von C_τ (eventuell nach Wahl eines geeigneten projektiven oder affinen Zusammenhangs) gegeben werden kann. Für den klassischen Fall ($g = 0$ und $N = 2$) ist $H_1(M^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und erzeugt von C_τ . In der Tat kann man hier nachrechnen (dies wird etwa in [6] und [126] getan), daß die lokalen Kozykeln gerade von dieser Gestalt sind. Es ergibt sich

$$\chi(e_n, e_m) = \frac{n^3 - n}{12} \delta_{-n}^m, \quad \gamma(A_n, A_m) = -n \delta_{-n}^m, \quad \beta(A_n, e_m) = -n(n-1) \delta_{-n}^m.$$

Theorem 10.11. *[Krichever und Novikov] Für den Fall $N = 2$ und g beliebig, ist jeder lokale Kozykel der Vektorfeldalgebra \mathcal{L} gleich einem Vielfachen des Kozykels (10-31) mit einem geeigneten meromorphen projektiven Zusammenhang, der Pole nur bei P_\pm hat. Insbesondere gibt es nur eine (bis auf Isomorphie) nichttriviale lokale zentrale Erweiterung.*

Der Beweis findet sich in [146]. Gemäß [150, App.] gilt die entsprechende Aussage auch für die Mehrpunktverallgemeinerung.

Für die abelsche Funktionenalgebra gibt es keine 1-Koränder, da $\kappa([a, b])$ (siehe (10-4)) immer verschwindet. Somit bestimmen verschiedene 2-Kozykel auch nichtäquivalente zentrale Erweiterungen. Die Kozykelbedingung (10-3) ist keine Bedingung. Es bleibt lediglich die Antisymmetrie. Somit gibt es "viele" lokale und nichtlokale zentrale Erweiterungen. Die etwas unpräzise gebliebene Aussage in [150], daß auch für die Heisenberg-Algebra die lokale zentrale Erweiterung eindeutig ist, muß wohl in der folgenden Weise modifiziert werden:¹

Jeder lokale Kozykel γ' von \mathcal{A} , der durch Einschränkung eines lokalen Kozykels ψ von \mathcal{D}^1 auf die Unteralgebra \mathcal{A} herkommt, ist ein skalares Vielfaches des Kozykels (10-32).

¹Leider wird für die Behauptung dort kein Beweis ausgeführt.

Der wichtige Unterschied hierbei ist, daß die Kozykelbedingung für das Tripel (e, g, h) mit $e \in \mathcal{L}$ und $g, h \in \mathcal{A}$

$$\gamma(\nabla_e g, h) = \psi(\nabla_e g, h) = \psi(\nabla_e h, g) = \gamma(\nabla_e h, g)$$

erzwingt. Dies wird vermutlich die Form (10-20) (2. Formel) mit beliebigem Integrationsweg implizieren. Dann greift die Argumentation in [146] um zu zeigen, daß die Lokalität als Integrationsweg C_τ erzwingt [145]. Für den klassischen Fall, siehe etwa [6, Prop.2.1]. Der Beweis dort wird allerdings durch explizite Rechnung geführt. Im folgenden werde ich die Behauptungen von Krichever und Novikov über die “Eindeutigkeit” (bis auf kohomologe Abänderung und skalare Multiplikation) der lokalen Kozykel auch für die Algebra \mathcal{A} (herkommend von der Algebra \mathcal{D}^1) und für die Mehrpunktverallgemeinerungen \mathcal{A} und \mathcal{L} benützen. In der Tat sehe ich, nach der obigen offensichtlich notwendigen Modifikation, keinen Grund an ihnen zu zweifeln. Da mir allerdings keine aufgeschriebenen Beweise vorliegen, werde ich jeweils explizit darauf hinweisen, wenn ich die Eindeutigkeit verwende. Im wesentlichen besteht der Unterschied lediglich darin, daß man im Ergebnis von einer lokalen zentralen Erweiterung, statt von der lokalen zentralen Erweiterung spricht.

In [6] werden ebenfalls die Kozykelklassen von \mathcal{D}^1 für die klassische Situation bestimmt. Vermutlich wird sich die analoge Aussage mit den Techniken von Krichever und Novikov zeigen lassen.

Vermutung. *Jeder lokale Kozykel von \mathcal{D}^1 ist kohomolog zu einem skalaren Vielfachen der Kozykeln (10-31), (10-32) und (10-33).*

Wenn wir nun \mathcal{D} oder $\mathcal{D}^{(\lambda)}$ als Lie-Algebren betrachten, dann ist \mathcal{D}^1 eine Unter-algebra. Aber es ist nicht klar (und tatsächlich ist es sogar falsch) ob irgend einer der obigen 3 Kozykeln auf ganz $\mathcal{D}^{(\lambda)}$ ausgedehnt werden kann. In der klassischen Situation hat Radul einen “kanonischen Kozykel” für $\mathcal{D}^{(0)}$ eingeführt [169]. Siehe auch Wodzicki [212] und Feigin [78]. Dieser ist eine lineare Kombination der obigen 3 Kozykeln. Li [151] zeigte, daß diese Kombination der einzige ist, der ausgedehnt werden kann. Die Existenz eines solchen “universellen Kozykels” wurde für affine Varietäten (also auch für unsere Situation) von Getzler [93] gezeigt. Durch die Benutzung der semi-infiniten Wedgedarstellung (siehe Abschnitt 13) war ich in der Lage, diesen konkret durch eine Darstellung einer nichttrivialen zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{D}^{(\lambda)}}$ der

Differentialoperatoralgebra für beliebiges Geschlecht und für eine beliebige Anzahl von Punkten in A zu realisieren. Der hierbei auftretende definierende Kozykel ψ_λ , eingeschränkt auf \mathcal{D}^1 , ist lokal. Akzeptiert man die obige Aussage über die lokale Kozykel, so erhält man, daß die Einschränkung eine gewisse Linearkombination der obigen Kozykel ist. In diesem Fall kann seine Klasse berechnet werden zu

$$[\psi_\lambda] = [\chi] + \frac{2\lambda - 1}{2c_\lambda}[\beta] + \frac{-1}{c_\lambda}[\gamma]. \quad (10-35)$$

Hierbei ist $c_\lambda := -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)$ der berühmte Ausdruck, der in Mumfords Formel auftaucht und $[\cdot]$ die Kohomologiekategorie. Da die Zusammenhänge R und T die Klasse nicht verändern, habe ich sie in der Notation weggelassen.

In [H] wird das Analogon der Formel [134,3.22] für den ‘‘Schwinger Term’’ ψ_λ bewiesen. Dieses ist nichts anderes als der Kozykel für die Algebra \mathcal{D} ausgewertet für gewisse Basiselemente.

Proposition 10.12. [H, Prop.7.9] *Sei*

$$u_{n,p}^k = A_{k+n,p} \cdot (e_{-1,p})^k, \quad k, n \in \mathbb{Z}, k \geq 0.$$

Die Potenzierung sei in \mathcal{D} aufgefaßt. Dann gilt für den Kozykel

$$\psi_\lambda(u_{n,p}^k, u_{m,r}^l) = 0, \quad \text{für } n + m > 0. \quad (10-36)$$

Für $n + m = 0$ gilt (mit $c_\lambda = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)$)

$$\psi_\lambda(u_{n,p}^k, u_{-n,r}^l) = \frac{(-1)^k}{c_\lambda} \frac{k! l!}{(k+l+1)!} \cdot \prod_{j=-l}^k (n+j) \cdot \delta_p^r. \quad (10-37)$$

Im Virasoro Fall ist (10-37) der einzige nichtverschwindende Term.

Im klassischen $g = 0$ Fall wird die zentrale Erweiterung der Differentialoperatoralgebra $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}$ auch manchmal als $\mathcal{W}_{1+\infty}$ bezeichnet. Ihre Darstellungstheorie wird z.B. in [125] studiert. Wie von Frenkel, Kac, Radul und Wang in [89] ausgeführt, besteht ein Zusammenhang dieser zentralerweiterten Differentialoperatoralgebra mit den \mathcal{W} -Algebren. Deren Struktur ist vor nicht allzu langer Zeit bei der Quantisierung konformer Feldtheorien aufgetaucht. Für höheres Geschlecht wurde von Zucchini [216] mit Hilfe der Krichever-Novikov-Objekte auch \mathcal{W} -Algebren betrachtet. Es ist zu erwarten, daß die zentrale Erweiterung der Differentialoperatoralgebra eine ähnliche Rolle, wie im klassischen Fall spielen wird. Dieser Gedanke soll hier allerdings nicht weiter verfolgt werden.

(c) Die affinen Mehrpunktalgebren

In diesem Teilabschnitt sollen die affinen Algebren (Kac-Moody-Algebren vom affinen Typ), siehe [123], [126] verallgemeinert werden. Zuerst sei kurz deren Definition wiederholt. Sei \mathfrak{g} eine endlichdimensionale Lie-Algebra über \mathbb{C} . Die *Schleifenalgebra* (oder *current algebra*) ist definiert als Vektorraum $\mathcal{G} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Dies bedeutet sie wird erzeugt durch die Elemente $x \otimes z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathfrak{g}$. Die Lie-Struktur ist gegeben als

$$[x \otimes z^n, y \otimes z^m] = [x, y] \otimes z^{n+m} . \quad (10-38)$$

Besitzt \mathfrak{g} eine invariante, symmetrische, nichtausgeartete Bilinearform ($..|..$), dann ist die affine (Lie-)Algebra definiert als zentralerweiterte Lie-Algebra $\widehat{\mathcal{G}}$ der Schleifenalgebra. Als Vektorraum gilt $\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus \mathbb{C}t$. Die Lie-Struktur ist gegeben durch

$$[x(n), y(m)] = [x, y](n+m) + (x|y) \cdot n \cdot \delta_{-m}^n \cdot t, \quad [t, \widehat{\mathcal{G}}] = 0 . \quad (10-39)$$

Hierbei habe ich die übliche Notation $x(n) := x \otimes z^n$ benutzt. Spezielle Beispiele sind etwa der Fall, daß \mathfrak{g} eine einfache Lie-Algebra ist und man die Cartan-Killing-Form nimmt, oder daß \mathfrak{g} abelsch ist und man jede nichtausgeartete symmetrische Bilinearform nehmen kann. Im letzteren Fall erhält man die bereits eingeführte zentral erweiterte Funktionenalgebra, die Heisenberg-Algebra (bzw. mehrere Kopien davon) zurück. Meist ist es günstig noch ein weiteres Element d , eine Derivation, zu adjungieren. Dadurch erhält man $\widehat{\mathcal{G}}^d := \widehat{\mathcal{G}} \oplus \mathbb{C}d$ mit Lie-Struktur

$$[d, t] = 0, \quad [d, x(n)] = n \cdot x(n) . \quad (10-40)$$

Die Algebren sind alle \mathbb{Z} -graduiert, indem man

$$\deg(x(n)) := n, \quad \deg(t) := \deg(d) := 0$$

setzt.

Diese Konstruktion soll verallgemeinert werden auf die Situation (M, A) mit M eine beliebige (kompakte) Riemannsche Fläche und $A = I \cup O$ eine erlaubte Polstellenmenge. Hierzu ersetze man die assoziative Algebra $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ durch die Algebra \mathcal{A} der Funktionen auf M , welche holomorph auf $M^* = M \setminus A$ sind. Für das folgende sei \mathfrak{g} eine endlichdimensionale reductive Lie-Algebra. Dies bedeutet, \mathfrak{g} ist die

direkte Summe einer abelschen und einer halbeinfachen Lie-Algebra. Sei weiterhin $(\cdot|\cdot)$ eine invariante, nichtausgeartete, symmetrische Bilinearform auf \mathfrak{g} fixiert. Die Invarianz bedeutet

$$([x, y]|z) = (x|[y, z]) . \quad (10-41)$$

Im halbeinfachen Fall kann man etwa die Cartan-Killing-Form nehmen. Im abelschen Fall erfüllt jede nichtausgeartete symmetrische Bilinearform die Bedingung.

Definition 10.13. Die Lie-Algebra $\mathcal{G} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ mit Lie-Produkt

$$[x \otimes g, y \otimes h] := [x, y] \otimes (g \cdot h) \quad (10-42)$$

heißt *Schleifenalgebra* oder “*current-algebra*” zur Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Daß es sich hierbei um eine Lie-Algebra handelt ist offensichtlich. Sie kann interpretiert werden als die \mathfrak{g} -wertigen meromorphen Abbildungen auf M , die holomorph auf M^* sind. Für $N = 2$ wurde sie in [146] eingeführt. Die Konstruktion der Heisenberg-Algebra kann nun verallgemeinert werden. Sei $\sigma \in H_1(M^*, \mathbb{Z})$ und sei Z_σ ein differenzierbarer Repräsentant von σ . Wie in Theorem 10.5 ausgeführt, ist dann

$$\gamma_\sigma : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_\sigma(f, g) := \frac{1}{2\pi i} \int_{Z_\sigma} f dg \quad (10-43)$$

ein wohldefinierter 2-Kozykel für \mathcal{A} . Wir setzen

$$\widehat{\mathcal{G}}_\sigma = \mathcal{G} \oplus \mathbb{C} \cdot t \quad (10-44)$$

als Vektorraum und definieren die Lie-Struktur durch

$$[\widehat{x \otimes f}, \widehat{y \otimes g}] = [x, y] \otimes (fg) - (x|y) \cdot \gamma_\sigma(f, g) \cdot t, \quad [t, \widehat{\mathcal{G}}_\sigma] = 0 . \quad (10-45)$$

Hierbei bezeichne für $a \in \mathcal{G}$ das Element $\hat{a} = (a, 0)$ den entsprechenden Lift in $\widehat{\mathcal{G}}_\sigma$.

Proposition/Definition 10.14. *Durch die Definition (10-45) wird $\widehat{\mathcal{G}}_\sigma$ eine zentrale Erweiterung der Schleifenalgebra. Diese Algebra heißt affine Mehrpunktalgebra höheren Geschlechts (oder auch verallgemeinerte Krichever-Novikov-Algebra vom affinen Typ). Ist \mathfrak{g} abelsch, so heißt $\widehat{\mathcal{G}}_\sigma$ auch verallgemeinerte Heisenberg-Algebra.*

Beweis. Da $\gamma_\sigma(f, g) = -\gamma_\sigma(g, f)$, ist die Verknüpfung antisymmetrisch. Für die 3-er Produkte berechnet sich

$$\begin{aligned} [x \otimes f, [y \otimes g, z \otimes h]] &= [x \otimes f, [y, z] \otimes (gh) - (x|y)\gamma_\sigma(f, g) \cdot t] = \\ & [x, [y, z]] \otimes (fgh) - ([x|[y, z]]\gamma_\sigma(f, gh) \cdot t . \end{aligned}$$

Addiert man alle 3 zyklisch permutierten, so erhält man

$$[x \otimes f, [y \otimes g, z \otimes h]] + [y \otimes g, [z \otimes h, x \otimes f]] + [z \otimes h, [x \otimes f, y \otimes g]] = \\ - ((x|[y, z])\gamma_\sigma(f, gh) + (y|[z, x])\gamma_\sigma(g, hf) + (z|[x, y])\gamma_\sigma(h, fg)) \cdot t .$$

Hierbei wurde die Jacobi-Identität in \mathfrak{g} für den jeweils 1.Term ausgenutzt. Wegen der Invarianz der Bilinearform gilt

$$(x|[y, z]) = (y|[z, x]) = (z|[x, y]) . \quad (10-46)$$

Desweiteren

$$\gamma_\sigma(f, gh) = -\gamma_\sigma(gh, f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma (gh)df,$$

usw.. Andererseits verschwindet das Integral über ein exaktes Differential, d.h.

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma d(ghf) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma (hf)dg + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{Z_\sigma}} (gf)dh + \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma (gh)df = \\ \gamma_\sigma(hf, g) + \gamma_\sigma(gf, h) + \gamma_\sigma(gh, f) .$$

Es addiert sich alles zu Null auf. Damit ist die Jacobi-Identität erfüllt und $\widehat{\mathcal{G}}_\sigma$ ist eine Lie-Algebra. Per Definition ist t das zentrale Element. \square

Insbesondere haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \cdot t \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}}_\sigma \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0 . \quad (10-47)$$

Wie im letzten Teilabschnitt ausgeführt, ist die Lokalität von Bedeutung. Hierzu werden wir uns später einschränken auf die σ mit $\sigma = [C_\tau]$, mit einer Niveauline C_τ . Mit $\widehat{\mathcal{G}}$ wollen wir die affine Algebra verstehen, die wir erhalten, indem wir über dieses σ integrieren. Es sei daran erinnert, daß die Homologiekategorie eindeutig ist.

Diese affinen Mehrpunktalgebren wurden in [J] eingeführt. Die $N = 2$ Situation wurde von Sheinman eingeführt und studiert [182],[183],[184]. Ebenso wurde von Bremner für $g = 0$ und $g = 1$ gewisse affine Mehrpunktalgebren speziell unter dem Gesichtspunkt der zentralen Erweiterungen studiert [40],[38], [39]. Die verallgemeinerten Heisenberg-Algebren im 2-Punktfall wurden in [147] eingeführt, siehe auch [122].

Auch bei höherem Geschlecht ist es manchmal nützlich ein zusätzliches Element e zu adjungieren, welches wie ein Vektorfeld auf den Elementen in \mathcal{A} operiert. Hierzu sei $e \in \mathcal{L}$ ein festes Vektorfeld. Wir setzen $\widehat{\mathcal{G}}^e = \widehat{\mathcal{G}} \oplus \mathbb{C} \cdot e$ als Vektorraum und definieren ($f \in \mathcal{A}$)

$$[e, x \otimes f] = x \otimes \nabla_e f, \quad [e, t] = 0. \quad (10-48)$$

Proposition 10.15. $\widehat{\mathcal{G}}^e$ ist eine Lie-Algebra.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die Jacobi-Identität für diejenigen Kommutatoren gilt, bei denen das neue Element e auftritt. Dies bedeutet, wir haben die Tripel $(e, x \otimes f, e)$ und $(e, x \otimes f, y \otimes g)$ zu untersuchen. Für die Tripel von der ersten Art folgt es sofort. Es bleiben die Tripel der zweiten Art:

$$\begin{aligned} [e, [x \otimes f, y \otimes g]] &= [e, [x, y] \otimes (fg) - (x|y)\gamma(f, g)t] = [x, y] \otimes \nabla_e (fg) \\ &= [x, y] \otimes ((\nabla_e f)g) + f(\nabla_e g), \\ [x \otimes f, [y \otimes g, e]] &= -[x \otimes f, y \otimes \nabla_e g] = -[x, y] \otimes f \nabla_e g + (x|y)\gamma(f, \nabla_e g)t, \\ [y \otimes g, [e, x \otimes f]] &= [y \otimes g, x \otimes \nabla_e f] = -[x, y] \otimes g \nabla_e f - (y|x)\gamma(g, \nabla_e f)t. \end{aligned}$$

Wir haben zu zeigen, daß die zentralen Terme sich aufheben:

$$\begin{aligned} \gamma(f, \nabla_e g) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f d(\nabla_e(g)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f \nabla_e(dg) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \nabla_e(fdg) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} (\nabla_e f)dg = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} g d(\nabla_e(f)) = \gamma(g, \nabla_e f). \end{aligned}$$

Hierbei habe ich benutzt, daß die Lie-Ableitung mit der äußeren Ableitung vertauscht, daß sie eine Derivation ist und daß die Lie-Ableitung einer meromorphen Form kein Residuum hat (siehe [H, p.102]). \square

In der klassischen Situation nimmt man $e = z \frac{d}{dz} = d$ und erhält dann für die Erzeugenden $x(n) = x \otimes z^n$

$$[e, x(n)] = x \otimes \left(z \frac{d}{dz} z^n \right) = n \cdot x(n).$$

Wir müssen noch die Beinahe-Graduierung einführen. Hierzu definieren wir für die Elemente

$$x \otimes A_{n,p} \in \mathcal{G}, \quad \deg(x \otimes A_{n,p}) := n. \quad (10-49)$$

Der Unterraum vom Grad n ist gegeben durch

$$\mathcal{G}_n := \langle x \otimes A_{n,p} \mid p = 1, \dots, K, x \in \mathfrak{g} \rangle . \quad (10-50)$$

Insbesondere ist $\mathcal{G}_n = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_n$ als Vektorraum. Aufgrund der Definition des Lie-Produkts (10-42) wird \mathcal{G} dadurch eine beinahe-graduierete Lie-Algebra. Die Schranken R und S stimmen mit den Schranken der Algebra \mathcal{A} überein.

Die Algebra \mathcal{A} kann als Vektorraum zerlegt werden als

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_{(0)} \oplus \mathcal{A}_+, \\ \mathcal{A}_- &:= \langle A_{n,p} \mid n \leq -R_1 - 1, p = 1 \dots, K \rangle, \quad \mathcal{A}_+ := \langle A_{n,p} \mid n \geq 1, p = 1 \dots, K \rangle, \\ \mathcal{A}_{(0)} &:= \langle A_{n,p} \mid -R_1 \leq n \leq 0, p = 1 \dots, K \rangle . \end{aligned} \quad (10-51)$$

Dasselbe gilt für die Lie-Algebra \mathcal{L}

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_- \oplus \mathcal{L}_{(0)} \oplus \mathcal{L}_+, \\ \mathcal{L}_- &:= \langle e_{n,p} \mid n \leq -R_3 - 1, p = 1 \dots, K \rangle, \quad \mathcal{L}_+ := \langle e_{n,p} \mid n \geq 1, p = 1 \dots, K \rangle, \\ \mathcal{L}_{(0)} &:= \langle e_{n,p} \mid -R_3 \leq n \leq 0, p = 1 \dots, K \rangle . \end{aligned} \quad (10-52)$$

Die Unterräume \mathcal{A}_\pm bzw. \mathcal{L}_\pm sind aufgrund der Beinahe-Graduierung Unteralgebren. Die Räume $\mathcal{A}_{(0)}$, bzw. $\mathcal{L}_{(0)}$ allerdings lediglich lineare Räume. Für $N = 2$ ergeben sich als Schranken

$$R_1 = -g \quad \text{und} \quad R_3 = -3g . \quad (10-53)$$

Diese Zerlegung induziert eine Zerlegung

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_- \oplus \mathcal{G}_{(0)} \oplus \mathcal{G}_+, \quad \text{mit} \quad \mathcal{G}_\beta = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_\beta, \quad \beta \in \{-, (0), +\} . \quad (10-54)$$

Wiederum sind \mathcal{G}_+ und \mathcal{G}_- Unteralgebren. Der Unterraum $\mathcal{G}_{(0)}$ ist, im Gegensatz zum klassischen Fall, keine Unteralgebra. Im klassischen Fall haben wir $\mathcal{A}_{(0)} = \langle 1 \rangle$ und $\mathcal{G}_{(0)} \cong \mathfrak{g}$.

Wir wollen die Beinahe-Graduierung auf die zentrale Erweiterung ausdehnen. Hierzu geben wir dem zentralen Element t den Grad 0. Wie in Abschnitt (b) ausgeführt, ist die Lokalität des Kozykels wichtig, damit die zentrale Erweiterung ebenfalls beinahe-graduieret ist. Deshalb beschränken wir uns auf Kozykel, welche wir

erhalten, indem wir über die Niveaulinien C_τ integrieren. Die Zerlegung (10-54) dehnt sich aus auf

$$\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{\mathcal{G}}_- \oplus \widehat{\mathcal{G}}_{(0)} \oplus \widehat{\mathcal{G}}_+ \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathcal{G}}_\pm \cong \mathcal{G}_\pm \quad \text{und} \quad \widehat{\mathcal{G}}_{(0)} = \mathcal{G}_{(0)} \oplus \mathbb{C} \cdot t . \quad (10-55)$$

Betrachten wir nun die Algebra $\widehat{\mathcal{G}}^e$. Dem Vektorfeld können wir einen beliebigen Grad aus dem Bereich $[-R_3, 0]$ geben. Aus Konsistenzgründen bietet es sich allerdings an, falls $e \in \mathcal{L}$ homogen ist und in diesem Bereich liegt (dieser Fall wird uns im folgenden interessieren), seinen Grad als den Grad des entsprechenden Elements in e zu wählen. Es ergibt sich

$$\widehat{\mathcal{G}}^e = \widehat{\mathcal{G}}_-^e \oplus \widehat{\mathcal{G}}_{(0)}^e \oplus \widehat{\mathcal{G}}_+^e, \quad \widehat{\mathcal{G}}_\pm^e \cong \mathcal{G}_\pm, \quad \widehat{\mathcal{G}}_{(0)}^e = \mathcal{G}_{(0)} \oplus \mathbb{C} \cdot t \oplus \mathbb{C} \cdot e . \quad (10-56)$$

Für eine einfache Lie-Algebra \mathfrak{g} können die Äquivalenzklassen zentraler Erweiterungen der Schleifenalgebra \mathcal{G} bestimmt werden. Da M^* eine affine Kurve ist, ist nach einem Resultat von Kassels [133] die universelle zentrale Erweiterung bestimmt durch $\Omega_{\mathcal{A}}^1/d\mathcal{A}$. Hierbei ist der Raum der Kählerdifferenziale eines Rings R mit Ω_R^1 bezeichnet. Die 1.deRham-Kohomologiegruppe ist Ω_R^1/dR , der Raum der Kählerdifferenziale modulo der exakten Differentiale. Es gilt

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^1/d\mathcal{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}}_{univ} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0 . \quad (10-57)$$

$\Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A}$ ist in unserer affinen Situation isomorph zu $H_1(M^*, \mathbb{C})$, der üblichen singulären Homologie. Da M^* jedoch gerade die kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit $N \geq 1$ herausgenommenen Punkten ist, gilt

$$\dim H_1(M^*, \mathbb{C}) = 2g + N - 1 . \quad (10-58)$$

(Näheres hierzu siehe bei Bremner [38], siehe auch [99, p.453].) Die zentrale Erweiterung wird gegeben durch den $(2g + N - 1)$ -dimensionalen Kozykel

$$(x \otimes g, y \otimes h) \mapsto -(x|y)(g dh \bmod d\mathcal{A}) . \quad (10-59)$$

Wählt man eine Basis $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2g+N-1}$ von $H_1(M^*, \mathbb{Z})$, so erhält man die Isomorphie

$$g dh \bmod d\mathcal{A} \longleftrightarrow \left(\int_{\sigma_1} g dh, \dots, \int_{\sigma_{2g+N-1}} g dh \right) . \quad (10-60)$$

Jede Äquivalenzklasse einer eindimensionalen zentralen Erweiterung ist homomorphes Bild der universellen zentralen Erweiterung. Somit ist der 1-dimensionale Kozykel gegeben als eine Linearkombination der obigen Basiskozykel. Lokalität wird vermutlich genau dann vorliegen, wenn diese Linearkombination ein Vielfaches der Zykelklasse ist, die durch die Niveaulinien C_τ gegeben wird. Da diese Resultate im folgenden jedoch nicht benötigt werden, möchte ich in dieser Schrift nicht weiter darauf eingehen.

Zum Abschluß dieser Abschnitts sei darauf hingewiesen, daß die affinen Mehrpunktalgebren im Zusammenhang stehen mit dynamischen Systemen der Mechanik. Sheinman [187] war in der Lage mit Hilfe der $N = 2$ affinen Algebra (mit adjungiertem Vektorfeld) zu Riemannschen Flächen von höherem Geschlecht, Beispiele integrierbarer Mehrkörpersysteme von Calogero-Moser-Sutherland-Typ zu geben. In diesem Zusammenhang sei auch auf die Arbeiten von Bonara-Matone [21] und Toppan [193] verwiesen. Diese benutzen die Krichever-Novikov-Objekte in der Theorie der dynamischen Systeme zum Studium der KP-Gleichung und der KdV-Gleichung für höheres Geschlecht.

11. Die Sugawara-Konstruktion

(a) Die Resultate im 2-Punktfall

Die (klassische) Sugawara-Konstruktion ist eine Methode wie man aus Höchstgewichtsdarstellungen einer (klassischen) affinen Algebra eine Darstellung der Virasoro-Algebra erhält. Sei V eine Höchstgewichtsdarstellung der affinen Algebra $\widehat{\mathcal{G}}$ zur einfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Höchstgewichtsdarstellungen sind erzeugt durch ein Element ψ . Es gilt $\mathcal{G}_+\psi = 0$, die Cartan- und die positive nilpotente Algebra von $\widehat{\mathcal{G}}_{(0)}$ operieren in einer gewissen Weise auf ψ und der ganze Darstellungsraum wird durch $\widehat{\mathcal{G}}$ aus ψ erzeugt. Insbesondere gilt für jedes $v \in V$ und jedes $x \in \mathfrak{g}$ und n groß genug: $x(n)v = 0$.¹ Sei $\{u_i, i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}\}$ eine Basis von \mathfrak{g} und $\{u^i\}$ die duale Basis (in Bezug auf die invariante symmetrische Bilinearform). Sei weiter k die duale Coxeter-Zahl (zur Definition siehe weiter unten) und operiere das zentrale Element t als $c \cdot id$ auf V derart, daß $k + c \neq 0$. Der Skalar c heißt zentrale Ladung oder Level der Darstellung. In diesem Fall ist der Operator

$$S_k := -\frac{1}{2(c+k)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} :u_i(-n)u^i(n+k): \quad (11-1)$$

wohldefiniert. Hierbei wird $u_i(n)$ als Operator auf V betrachtet und $: \dots :$ bezeichne die Normalordnung

$$:x(n)y(m): := \begin{cases} x(n)y(m), & n \leq m \\ y(m)x(n), & n > m . \end{cases} \quad (11-2)$$

Durch sie werden die Elemente von hohem Grad nach rechts gebracht. Dort annullieren sie letztendlich jeden festen Vektor wenn der Grad nur genügend groß ist. Erst durch die Normalordnung sind die Operatoren S_k wohldefiniert.

¹Siehe Abschnitt 12 für die genaue Definition.

Das erstaunliche Resultat ist die Tatsache, daß durch $L_k \mapsto S_k$ und $t \mapsto id$ eine Darstellung der Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $\frac{c \cdot \dim \mathfrak{g}}{c + k}$ definiert ist. (Die zentrale Ladung der Virasoro-Algebra ist der Skalar, als der das zentrale Element der Virasoro-Algebra in dieser Darstellung operiert.) Ein Beweis findet sich etwa in [126]. Im physikalischen Modell entsprechen die S_k den "Moden" des Energie-Impulstensors der Feldtheorie, die durch die Darstellung V von $\widehat{\mathcal{G}}$ gegeben ist.

Diese Konstruktion möchte ich auf unsere allgemeine Situation übertragen. Der oben skizzierte klassische Fall wird sich wiederum als Spezialfall ergeben. Hierbei werde ich in diesem Teilabschnitt zur Vereinfachung den 2-Punktfall betrachten. Der Mehrpunktfall ist im wesentlichen nur eine Verkomplizierung in der Notation. Die notwendigen Modifikationen werden in Abschnitt (c) ausgeführt werden. Ich möchte gleich hier erwähnen, daß der 2-Punktfall auch von den Physikern Bonora, Rinaldi, Rosso und Wu [22] behandelt wurde. Da die Art der Beweisführung dort vielleicht nicht in allen Punkten den Anforderungen eines Mathematikers genügt (speziell wenn man die subtilen Probleme mit der Normalordnung betrachtet) und da ich die Verallgemeinerung auch auf mehrere Punkte im Auge habe, ist eine sorgfältige Herleitung auch in diesem Fall notwendig. Dies ist insbesondere deshalb notwendig, da im nächsten Abschnitt genauere Resultate als in [22] benötigt werden. Die folgenden Ausführungen sind auch in einer gemeinsamen Arbeit mit Sheinman [K] zu finden. Die verwendeten Methoden sind ähnlich zu der in [22], ja an manchen Stellen wurden die Ausführungen von der Darstellung dort inspiriert.

Entsprechend den Ausführungen der vorhergehenden Abschnitte ist es notwendig, die klassischen Objekte mit Hilfe der Krichever-Novikov-Objekte zu geometrisieren. Vorläufig sei noch die allgemeine Mehrpunktsituation zugelassen. Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale reductive Lie-Algebra und $\widehat{\mathcal{G}}$ die affine Algebra höheren Geschlechts zu \mathfrak{g} versehen mit der Beinahe-Graduierung (10-50). Es sei daran erinnert, daß der definierende Kozykel $(x|y)\gamma(g, h)$ für die zentrale Erweiterung über eine Niveaulinie zu integrieren ist. Also

$$[\widehat{x \otimes f}, \widehat{y \otimes g}] = [x, y] \otimes (fg) - (x|y) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} g dh \cdot t. \quad (11-3)$$

Definition 11.1. Ein Modul V über der Lie-Algebra $\widehat{\mathcal{G}}$ (bzw. eine Darstellung) heißt *zulässiger Modul* bzw. *zulässige Darstellung* falls für jedes $v \in V$ ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ existiert derart, daß $\widehat{\mathcal{G}}_n v = 0$ für $n \geq n_0$ gilt und das, durch (11-3) fixierte, zentrale Element t als ein Vielfaches der Identität operiert. Dieses Vielfache nennt man zentrale Ladung oder Level der Darstellung.

Sei V ein fester zulässiger Modul. Die zentrale Ladung sei c . Für das Element $x \otimes A$ (oder genauer $\widehat{x \otimes A}$) von $\widehat{\mathcal{G}}$ benutze ich meist die Notation $x(A)$ um den entsprechenden Operator auf V zu bezeichnen. Für $x \otimes A_{n,p}$ mit den speziellen Basiselementen $A_{n,p}$ benutze ich auch abkürzend $x(n,p)$ bzw. $x(n)$ im 2-Punktfall für $x(A_{n,p})$.

Beispiele zulässiger Darstellungen sind im klassischen Fall die üblichen Höchstgewichtsdarstellungen. Für die allgemeine 2-Punktsituation wurden deren Verallgemeinerungen von Sheinman [182],[183],[184] studiert. Deren allgemeine Definition wird im Abschnitt 12 gegeben werden.

Wir wählen eine Basis $u_i, i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$ von \mathfrak{g} . Sei $u^i, i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$ die duale Basis in Bezug auf die invariante nichtausgeartete symmetrische Bilinearform $(\cdot | \cdot)$. Das Casimir-Element $\Omega^{(0)} = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} u_i u^i$ der universellen Einhüllenden $U(\mathfrak{g})$ ist unabhängig von der Wahl der Basis. Zur Vereinfachung der Notation sei eine Summation über i immer über diesen Bereich angenommen.

Lemma 11.2.

- (1) $[\Omega^{(0)}, \mathfrak{g}] = 0$.
- (2) $\sum_i [u_i, u^i] = 0$.
- (3) $\sum_i [u_i \otimes f, u^i \otimes g] = -\dim \mathfrak{g} \cdot \gamma(f, g) \cdot t$.
- (4) Für abelsches oder einfaches \mathfrak{g} gibt es eine Konstante k mit

$$\sum_i ad_{u_i} \circ ad_{u^i} = 2k .$$

D.h. $2k$ ist der Eigenwert des Casimir-Operators in der adjungierten Darstellung.

Beweis. Die Aussage (1) ist eigentlich Standardwissen. In $U(\mathfrak{g})$ können wir schreiben $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$. Somit gilt

$$\sum_i [x, u_i u^i] = \sum_i [x, u_i] u^i + \sum_i u_i [x, u^i] .$$

Aufgrund der Orthonormalbasiseigenschaft zerlegen wir

$$[x, u^i] = \sum_j ([x, u^i] | u_j) u^j = - \sum_j ([x, u_j] | u^i) u^j .$$

Hierbei wurde die Invarianz und die Symmetrie von $(\cdot | \cdot)$ benutzt. Für die 2.Summe erhalten wir

$$\sum_i u_i [x, u^i] = - \sum_{i,j} u_i ([x, u_j] | u^i) u^j = - \sum_j [x, u_j] u^j ,$$

d.h. das Negative der 1.Summe.

(2)

$$\sum_i [u_i, u^i] = \sum_i u_i u^i - \sum_i u^i u_i = \Omega^{(0)} - \Omega^{(0)} = 0 .$$

Hierbei wurde das Casimir-Element einmal in Bezug auf die Basis u_i und einmal in Bezug auf die Basis u_i dargestellt.

(3) Es sei an die Strukturgleichungen der zentral erweiterten Algebra erinnert:

$$[u_i \otimes f, u^i \otimes g] = [u_i, u^i] \otimes (fg) - \gamma(f, g) \cdot (u_i | u^i) \cdot t . \quad (11-4)$$

Nach der Summation über i verschwindet aufgrund (2) der erste Summand und wir erhalten das Resultat.

(4) Ist \mathfrak{g} abelsch, so ist natürlich

$$ad_{u_i}(x) = [u_i, x] = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g} .$$

D.h. $k = 0$ erfüllt die Bedingung. Ist \mathfrak{g} einfach, so ist die adjungierte Darstellung irreduzibel. Der Operator $\sum_i ad_{u_i} \circ ad_{u^i}$ ist nichts anderes als der, dem Casimir-Element zugeordnete Operator, in der adjungierten Darstellung. Als Casimir-Operator vertauscht er mit allen $x \in \mathfrak{g}$ und operiert somit als Skalar. Dieser Skalar sei gerade $2k$. \square

Im Fall, daß \mathfrak{g} einfach ist, ist k die *duale Coxeterzahl* und kann mit Hilfe der positiven Wurzeln der Lie-Algebra ausgedrückt werden. Im abelschen Fall gilt, wie oben gesehen, $k = 0$.

Alles was bisher gesagt wurde gilt auch im Mehrpunktfall. Jetzt wollen wir uns auf den 2-Punktfall konzentrieren. Für $Q \in M$ betrachten wir die formale Summe (die "erzeugende Funktion")

$$\hat{x}(Q) = \sum_n x(n) \cdot \omega^n(Q) . \quad (11-5)$$

Hierbei bezeichne eine Summation über die Indizes der Formen jeweils eine Summation über \mathbb{Z} , falls nichts anderes gesagt wird.

Definition 11.3. Sei $:\dots:$ eine Normalordnung. Der *Sugawara-Operator* (oder *Segal-Operator*) von höherem Geschlecht ist definiert als

$$T(Q) := \frac{1}{2} \sum_i :\widehat{u}_i(Q)\widehat{u}^i(Q): = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_i :u_i(n)u^i(m): \omega^n(Q)\omega^m(Q). \quad (11-6)$$

Wenn wir $T(Q)$ wiederum als “erzeugende Funktion” betrachten, so ist sie ein quadratisches Differential. Wir können also schreiben

$$T(Q) = \sum_k L_k \cdot \Omega^k(Q) \quad (11-7)$$

mit gewissen Operatoren L_k . Die L_k möchte ich als *Moden des Sugawara-Operators* T bezeichnen. Mit Hilfe der Dualität (9-28) erhalten wir

$$L_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} T(Q)e_k(Q) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_i :u_i(n)u^i(m): l_k^{nm}, \quad (11-8)$$

mit $l_k^{nm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} w^n(Q)w^m(Q)e_k(Q).$

Es ist zu beachten, daß es für einen festen Wert von k für jeden Wert von n nur endlich viele m gibt mit $l_k^{nm} \neq 0$. Genauer folgt aus $l_k^{nm} \neq 0$ und n und m außerhalb des kritischen Streifens, daß $k - n \leq m \leq k - n + g$ gilt. Im Fall $g = 0$ bleibt ein Term und dieser lautet $l_k^{nm} = \delta_k^{m+n}$. Es ergibt sich die übliche Definition der $g = 0$ Sugawara-Operatoren (siehe [126] und die dortigen weiteren Referenzen). Durch diese Endlichkeit und die Normalordnung sind die Operatoren $L_k \in gl(V)$ wohldefiniert. In diesem Abschnitt werde ich die Normalordnung

$$:x(n)y(m): := \begin{cases} x(n)y(m), & n \leq m \\ y(m)x(n), & n > m \end{cases} \quad (11-9)$$

benutzen. Andere Normalordnungen sind möglich. Eine nächstgrößere Klasse besteht aus den Normalordnungen, bei denen die entsprechende Vorgabe nur für endlich viele Paare (n, m) von (11-9) abweichen, siehe auch [147]. Da eine gewisse Willkür in der Wahl der Normalordnung steckt, ist es notwendig die Abhängigkeit

von der Normalordnung in den Beweisgängen im Auge zu behalten. In den Beweisen wird sich zeigen, daß sowohl Prop. 11.4 als auch die Folgerung Prop. 11.5 nicht von der Normalordnung abhängt. In Prop. 11.6, bei der gezeigt wird, daß die Sugawara-Operatoren die Darstellung einer zentralerweiterten Krichever-Novikov-Vektorfeldalgebra definieren, wird sich zeigen, daß der Kozykel, der die zentrale Erweiterung definiert, von der Normalordnung abhängen kann, die Kohomologieklasse jedoch fest ist.

Die folgende Proposition ist das Schlüsselresultat in der Konstruktion

Proposition 11.4. *Sei \mathfrak{g} entweder eine abelsche oder eine einfache Lie-Algebra. Dann gilt*

$$[L_k, x(r)] = -(\mathfrak{c} + k) \sum_v K_{k,r}^v x(v) , \quad (11-10)$$

$$\text{mit } K_{k,r}^v := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} w^v(Q) e_k(Q) dA_r(Q) = \sum_m l_k^{vm} \gamma_{mr} , \quad (11-11)$$

$$\gamma_{mr} := \gamma(A_m, A_r) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} A_m(Q) dA_r(Q) . \quad (11-12)$$

Das Resultat hängt nicht von der Normalordnung ab.

Es sei nochmals daraufhingewiesen, daß alle auftretenden Summen wohldefinierte endliche Summen sind. Im klassischen Fall spezialisiert sich das Resultat zu $[L_k, x(r)] = -(\mathfrak{c} + k) \cdot r \cdot x(r + k)$ (siehe [126, Prop.10.1]). Der Beweis wird in Teilabschnitt (b) erbracht werden. Hier möchte ich lediglich die Relation (11-11) zeigen. Mit der "Delta-Distribution" (9-49) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_m l_k^{vm} \gamma_{mr} &= \sum_m \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \omega^v(Q) \omega^m(Q) e_k(Q) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\tau'}} A_m(Q') dA_r(Q') = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} \omega^v(Q) e_k(Q) dA_r(Q') \Delta(Q', Q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\tau'}} \omega^v(Q') e_k(Q') dA_r(Q') = K_{k,r}^v . \quad \square \end{aligned}$$

Für das Element $e \in \mathcal{L}$ definieren wir eine Aktion auf $\hat{x}(Q) = \sum_n x(n) \omega^n(Q)$ durch

$$e \cdot \hat{x}(Q) := \sum_n x(n) (\nabla_e \omega^n)(Q) . \quad (11-13)$$

Proposition 11.5.

$$(1) \quad [L_k, x(r)] = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) x(\nabla_{e_k} A_r) .$$

$$(2) \quad [L_k, \hat{x}(Q)] = (\mathbf{c} + \mathbf{k}) e_k \cdot \hat{x}(Q) .$$

Beweis. Wir können $\nabla_{e_k} A_r$ in lokalen Koordinaten als $e_k(z) \frac{dA_r(z)}{dz}$ schreiben, somit

$$(\nabla_{e_k} A_r)(Q) = e_k(Q) dA_r(Q) = \sum_v \beta_{k,r}^v A_v(Q) .$$

Aufgrund der Dualität berechnen sich die Koeffizienten $\beta_{k,r}^v$ als $\beta_{k,r}^v = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} e_k(Q) dA_r(Q) \omega^v(Q) = K_{k,r}^v$. Damit folgt aus Prop. 11.4 die Aussage (1).

Um (2) zu zeigen, schreiben wir $\nabla_{e_k} \omega^v = \sum_r \zeta_{k,r}^v \omega^r$ mit

$$\zeta_{k,r}^v = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} (\nabla_{e_k} \omega^v) A_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \nabla_{e_k} (\omega^v A_r) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \omega^v \nabla_{e_k} A_r = -K_{k,r}^v .$$

Hierbei wurde benutzt, daß das Residuum der Lie-Ableitung eines meromorphen Differentials verschwindet (siehe z.B. [H, p.102]). Dies zeigt (2). \square

In der konformen Feldtheorie für Geschlecht 0 bezeichnet man Felder $\Phi(z)$, in der Darstellung unter Betrachtung, als *Primärfelder* vom Gewicht h , falls gilt

$$[L_n, \Phi(z)] = \left(z^{n+1} \frac{d}{dz} + h(n+1)z^n \right) \Phi(z) . \quad (11-14)$$

Faßt man $\Phi(z)$ als operatorwertigen Schnitt von \mathcal{K}^h (\mathcal{K} ist das kanonische Bündel) auf, so kann die rechte Seite von (11-14) geschrieben werden als $e_n \cdot \Phi(z)$. Die Ähnlichkeit mit der Aussage von Prop. 11.5(2) fällt ins Auge.

Proposition 11.6. *Die Operatoren $L_k \in gl(V)$ und $id = 1 \in gl(V)$ schließen zu einer Lie-Unteralgebra von $gl(V)$ mit der Kommutatorrelation*

$$[L_k, L_l] = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_n C_{kl}^n L_n - \frac{1}{2} \mathbf{c}(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \dim \mathfrak{g} \cdot \chi_{kl} \cdot id \quad (11-15)$$

mit C_{kl}^n den Strukturkonstanten der Vektorfeldalgebra \mathcal{L} und

$$\begin{aligned} \chi_{kl} &= \psi_{kl} + \hat{\chi}_{kl}, & \psi_{kl} &= \sum_{s,v} \sum_{n=0}^{v+1} C_{kl}^s l_s^{nv} \gamma_{nv} = \sum_v \sum_{n=0}^{v+1} E_{kl}^{nv} \gamma_{nv}, \\ E_{kl}^{nv} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} [e_k, e_l] \cdot \omega^n \omega^v, & \hat{\chi}_{kl} &= \left(\sum_{\substack{n>0 \\ v \leq 0}} - \sum_{\substack{n \leq 0 \\ v > 0}} \right) K_{k,v}^n K_{l,n}^v . \end{aligned} \quad (11-16)$$

Die χ_{kl} können lediglich für $-6g \leq k+l \leq 0$ ungleich Null sein. Eine andere Normalordnung wird den Bereich der n und v Summation in der Definition von ψ_{kl} und damit χ_{kl} ändern. An der oberen Schranke erhalten wir

$$\chi_{k,-k} = -\frac{1}{6}(k^3 - k) . \quad (11-17)$$

Der Beweis erfolgt in Teilabschnitt (b).

Gilt $\mathfrak{c} = -k$, dann redet man auch vom kritischen Level. In diesem Fall zeigt Prop. 11.6, daß die L_k , $k \in \mathbb{Z}$ eine abelsche Unteralgebra definieren. Aufgrund Prop. 11.4 vertauscht diese mit allen Elementen $x(n)$.

Falls $\mathfrak{c} + k \neq 0$ ist, so können wir die reskalierten Elemente $L_k^* = \frac{-1}{\mathfrak{c}+k} L_k$ wählen und erhalten

$$[L_k^*, L_l^*] = \sum_n C_{kl}^n L_n^* - \frac{\mathfrak{c}}{2(\mathfrak{c} + k)} \dim \mathfrak{g} \cdot \chi_{kl} \cdot id . \quad (11-18)$$

Damit erhalten wir die Darstellung einer zentralerweiterten Algebra von \mathcal{L} . Beachte hierbei, daß aus der Jacobi-Identität innerhalb $gl(V)$ und innerhalb \mathcal{L} folgt, daß χ_{kl} tatsächlich ein 2-Kozykel χ für die Lie-Algebra \mathcal{L} ist. Aufgrund Proposition 11.6 ist der Kozykel lokal. Somit gilt mit Theorem 10.11, mit χ_R wie in (10-31) gegeben, $\chi = d \cdot \chi_R$ mit $d \in \mathbb{C}$ und R einem geeigneten projektiven Zusammenhang. Durch den Vergleich $\chi_R(e_k, e_{-k})$ and $\chi(e_k, e_{-k})$ erhalten wir $d = -2$. Insgesamt also

Theorem 11.7. *Sei \mathfrak{g} entweder eine endlichdimensionale abelsche oder einfache Lie-Algebra, $2k$ der Eigenwert des Casimir-Operators in der adjungierten Darstellung und $\widehat{\mathcal{G}}$ die affine Lie-Algebra von höherem Geschlecht. Sei V eine zulässige Darstellung, in der das zentrale Element als \mathfrak{c} -Identität operiert. Ist $\mathfrak{c} + k \neq 0$ dann definieren die reskalierten Moden des Sugawara-Operators*

$$L_k^* = \frac{-1}{2(\mathfrak{c} + k)} \sum_{n,m} \sum_i :u_i(n)u^i(m): l_k^{nm} = \frac{-1}{2\pi i(\mathfrak{c} + k)} \int_{C_\tau} T(Q)e_k(Q) \quad (11-19)$$

eine Darstellung einer zentralen Erweiterung der Krichever-Novikov-Vektorfeldalgebra, die gegeben wird durch den geometrischen Kozykel

$$\chi(e, f) = \frac{\mathfrak{c} \cdot \dim \mathfrak{g}}{(\mathfrak{c} + k)} \cdot \frac{1}{24\pi i} \int_{C_\tau} \left(\frac{1}{2}(e'''f - ef''') - R \cdot (e'f - ef') \right) dz , \quad (11-20)$$

mit einem geeigneten meromorphen projektiven Zusammenhang R mit Polen nur an den Punkten P_{\pm} .

Bemerkung. Die Ausdrücke ψ_{kl} in (11-16) definieren gerade einen Korand (im Sinne der Lie-Algebrenkohomologie). Es sei daran erinnert, daß ein 2-Kozykel ψ ein Korand für die Lie-Algebra \mathcal{L} ist, falls es eine Linearform $\Phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, derart daß $\psi(e, f) = \Phi([e, f])$. Ich definiere Φ durch $\Phi(e_s) := \sum_v \sum_{n=0}^{v+1} l_s^{nv} \gamma_{nv}$ (dies ist eine endliche Summe) und berechne $\Phi([e_k, e_l]) = \Phi(\sum_s C_{k,l}^s e_s) = \psi_{kl}$. Eine andere Normalordnung würde einen anderen Summationsbereich in der Definition von Φ bedeuten. Dadurch wird nochmals gezeigt, ohne die Resultate von Krichever und Novikov zu benutzen, daß unterschiedliche Normalordnungen die Kohomologieklassen der zentralen Erweiterung nicht ändern.

(b) Die Beweise

Bei der Definition der L_k sind formale unendliche Summen beteiligt. Angewendet auf ein Element in der gegebenen Darstellung muß es sich immer um einen wohldefinierten Operator handeln. Um dies unter Kontrolle zu halten, verwende ich Abschneidefunktionen wie sie auch von Kac und Raina in [126] benutzt wurden. Sei ψ die Funktion auf \mathbb{R} gegeben durch

$$\psi(x) = 1 \quad \text{falls } |x| \leq 1 \quad \text{und} \quad \psi(x) = 0 \quad \text{falls } |x| > 1. \quad (11-21)$$

Für $\epsilon \in \mathbb{R}$ sei definiert

$$L_k(\epsilon) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_i :u_i(n)u^i(m): l_k^{nm} \psi(\epsilon n). \quad (11-22)$$

Sei k fixiert. Für jedes n gibt es nur endlich viele m , derart daß $l_k^{nm} \neq 0$. Damit besteht für $\epsilon > 0$ die Summe nur aus endlich vielen Summanden. Für $v \in V$ werden aufgrund der Normalordnung nur endlich viele der Operatoren $l_k^{nm} :u_i(n)u^i(m):$ nichttrivial auf v operieren. Wenn wir also $\epsilon > 0$ klein genug wählen, erhalten wir $L_k(\epsilon)v = L_k v$. Dieser Sachverhalt sei unter $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_k(\epsilon) = L_k$ verstanden.

Falls wir die Normalordnungssymbole in (11-22) weglassen, erhalten wir einen Ausdruck $\tilde{L}_k(\epsilon)$. Solange $\epsilon \neq 0$ ist, ist er wohldefiniert. Dieser sei nun mit $L_k(\epsilon)$ verglichen. Für jedes Paar (n, m) , das nicht in normaler Ordnung ist, wird der Kommutator $\sum_i [u_i(n), u_i(m)]$ aufgenommen. Dieser ist ein Skalar aufgrund Lemma 11.2

(3). Damit gilt $L_k(\epsilon) = \tilde{L}_k(\epsilon) + \alpha \cdot t$ mit einem Skalar α solange $\epsilon \neq 0$ bleibt. Insbesondere können wir bei der Berechnung von Kommutatoren die Normalordnung ignorieren, solange wir bei $\epsilon \neq 0$ bleiben.

Beweis von Proposition 11.4. Per Definition haben wir

$$\begin{aligned} R_\epsilon &:= 2 [\tilde{L}_k(\epsilon), x(r)] = \sum_{n,m} \sum_i [u_i(n)u^i(m), x(r)] l_k^{nm} \psi(\epsilon n) \\ &= \sum_{n,m} \sum_i (u_i(n)[u^i(m), x(r)] + [u_i(n), x(r)]u^i(m)) l_k^{nm} \psi(\epsilon n), \end{aligned}$$

nachdem der Kommutator ausgeschrieben wurde und die Elemente umgruppiert wurden. Jeder Kommutator kann nun geschrieben werden wie folgt

$$[u^i(m), x(r)] = [u^i, x](A_m A_r) - (u^i|x)\gamma_{mr} \cdot \mathbf{c}$$

(beachte $t.v = \mathbf{c} \cdot v$). Damit erhalten wir $R_\epsilon = A_\epsilon + B_\epsilon - (C_\epsilon + D_\epsilon)$ mit

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= \sum_{n,m} \sum_i u_i(n)[u^i, x](A_m A_r) l_k^{nm} \psi(\epsilon n), \quad B_\epsilon = \sum_{n,m} \sum_i [u_i, x](A_n A_r) u^i(m) l_k^{nm} \psi(\epsilon n), \\ C_\epsilon &= \sum_{n,m} \sum_i u_i(n)(u^i|x)\gamma_{mr} l_k^{nm} \mathbf{c} \psi(\epsilon n), \quad D_\epsilon = \sum_{n,m} \sum_i (u_i|x)u^i(m)\gamma_{nr} l_k^{nm} \mathbf{c} \psi(\epsilon n). \end{aligned}$$

Benützen wir $\sum_i u_i \otimes A_n(u^i|x) = (\sum_i (u^i|x)u_i) \otimes A_n = x \otimes A_n = x(n)$, so erhalten wir $C_\epsilon = \sum_{n,m} x(n)\gamma_{mr} l_k^{nm} \mathbf{c} \psi(\epsilon n)$ und $D_\epsilon = \sum_{n,m} x(m)\gamma_{nr} l_k^{nm} \mathbf{c} \psi(\epsilon n)$. Für festes r und k tauchen nur endlich viele Terme auf. Damit erhalten wir für $\epsilon = 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (C_\epsilon + D_\epsilon) = 2\mathbf{c} \cdot \sum_n \left(\sum_m l_k^{nm} \gamma_{mr} \right) x(n) = 2\mathbf{c} \sum_n K_{k,r}^n x(n). \quad (11-23)$$

Hierbei benutzen wir (11-11). Die Summen A_ϵ und B_ϵ machen für $\epsilon \rightarrow 0$ separat keinen Sinn. Um Sinn aus ihnen zu machen, müssen wir übergehen zur Normalordnung. Um dies zu erreichen, schreiben wir $A_m A_r = \sum_s \alpha_{mr}^s A_s$ mit $\alpha_{mr}^s = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} A_m A_r \omega^s$. Wir erhalten

$$A_\epsilon = \sum_{n,m,s} \sum_i u_i(n)[u^i, x](s) \alpha_{mr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n), \quad B_\epsilon = \sum_{n,m,s} \sum_i [u_i, x](s) u^i(m) \alpha_{nr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n).$$

Für die Elemente, die nicht in Normalordnung sind, nehmen wir einen Kommutator auf. Wir schreiben $A_\epsilon = A_\epsilon^{(1)} + A_\epsilon^{(2)}$ und $B_\epsilon = B_\epsilon^{(1)} + B_\epsilon^{(2)}$ mit $A_\epsilon^{(1)}$ bzw. $B_\epsilon^{(1)}$

den obigen Ausdrücken nur mit Normalordnungszeichen versehen. Wir betrachten zuerst $A_\epsilon^{(2)}$. Wir können den Kommutator schreiben als

$$[u_i(n), [u^i, x](s)] = [u_i, [u^i, x]](A_n A_s) - \gamma_{ns}(u_i|[u^i, x])c .$$

Es gilt $(u_i|[u^i, x]) = ([u_i, u^i]|x)$. Deshalb verschwindet nach Summation über i gemäß Lemma 11.2(4) der zweite Term. Lemma 11.2(4) ergibt für den ersten Term $2k \cdot x(A_n A_s) = 2k \sum_v \alpha_{ns}^v x(v)$. Führen wir dasselbe mit $B_\epsilon^{(2)}$ aus, so erhalten wir

$$A_\epsilon^{(2)} + B_\epsilon^{(2)} = 2k \sum_v \left(\sum_{s,m} \sum_{n>s} \alpha_{ns}^v \alpha_{mr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n) - \sum_{n,m} \sum_{s>m} \alpha_{sm}^v \alpha_{nr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n) \right) x(v) . \quad (11-24)$$

Es ist zu beachten, daß keine Summe für sich allein sinnvoll ist wenn wir $\epsilon = 0$ setzen. Bevor wir uns weiter mit (11-24) beschäftigen, möchte ich zuerst zeigen, daß $A_0^{(1)} + B_0^{(1)}$ verschwindet. Zuerst ändern wir die Variablen in der Summation für $B_\epsilon^{(1)}$ in der Weise $s \rightarrow n \rightarrow m \rightarrow s$. Durch die Normalordnung sind $A_0^{(1)}$ und $B_0^{(1)}$ wohldefinierte Operatoren in dem Sinne, daß angewendet auf ein fixiertes $v \in V$ nur endlich viele Summanden nichttrivial operieren. Damit können wir den ψ -Faktor ignorieren.

Lemma 11.8. Für $F_{k,r}^{sn} := \sum_m \alpha_{mr}^s l_k^{nm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} A_r(Q) \omega^s(Q) \omega^n(Q) e_k(Q)$ gilt $F_{k,r}^{sn} = F_{k,r}^{ns}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} F_{k,r}^{sn} &= \sum_m \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} A_m(Q) A_r(Q) \omega^s(Q) \omega^n(Q') \omega^m(Q') e_k(Q') \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} A_r(Q) \omega^s(Q) \omega^n(Q') e_k(Q') \Delta(Q, Q') = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} A_r(Q) \omega^s(Q) \omega^n(Q) e_k(Q) . \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich symmetrisch in n und s . \square

Nun gilt $A_0^{(1)} + B_0^{(1)} = \sum_{n,s} \sum_i (:u_i(n)[u^i, x](s): + :[u_i, x](n)u^i(s):) F_{k,r}^{sn}$.

Lemma 11.9. $\sum_i (:u_i(n)[u^i, x](s): + :[u_i, x](n)u^i(s):) = 0$.

Beweis. Wir berechnen $\sum_i u_i(n)[u^i, x](s) = \sum_i u_i(n) \sum_j ([u^i, x]|u_j) u^j(s) = -\sum_{i,j} u_i(n)(u^i|[u_j, x])u^j(s) = -\sum_j [u_j, x](n)u^j(s)$. \square

Damit gilt $A_0^{(1)} + B_0^{(1)} = 0$.

Wir nehmen nun (11-24) wieder auf.

Behauptung. *Der Ausdruck innerhalb der v -Summation ist für $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ identisch mit dem Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ von*

$$E_\epsilon^{(N)} := \sum_{m,s} \sum_{n>N} \alpha_{ns}^v \alpha_{mr}^s I_k^{nm} \psi(\epsilon n) - \sum_{n,m} \sum_{s>N} \alpha_{sm}^v \alpha_{nr}^s I_k^{nm} \psi(\epsilon n), \quad (11-25)$$

mit N einer beliebigen ganzen Zahl.

Beweis. Wenn wir die Differenz berechnen, so erhalten wir²

$$\sum_{m,s} \sum_{n=s+1}^N \alpha_{ns}^v \alpha_{mr}^s I_k^{nm} \psi(\epsilon n) - \sum_{n,m} \sum_{s=m+1}^N \alpha_{sm}^v \alpha_{nr}^s I_k^{nm} \psi(\epsilon n). \quad (11-26)$$

Beachte, daß wegen der Beinahe-Graduierung in jeder Summe für festes v, k, r nur endlich viele Terme beteiligt sind. Deshalb können wir wiederum $\psi(\epsilon n)$ ignorieren und die Variablen in der zweiten Summe ändern ($s \rightarrow n \rightarrow m \rightarrow s$). Wenden wir Lemma 11.8 an, so sehen wir, daß die Differenz verschwindet. \square

Dieser Beweis zeigt auch, daß das Ergebnis nicht von der gewählten Normalordnung abhängt. Wiederum wird die Differenz aus endlich vielen Termen bestehen, die sich aufheben.

Wir untersuchen

$$E_\epsilon^{(0)} = \sum_s \sum_{n>0} \alpha_{ns}^v F_{k,r}^{sn} \psi(\epsilon n) - \sum_n \sum_{s>0} \alpha_{nr}^s F_{k,s}^{vn} \psi(\epsilon n). \quad (11-27)$$

Der zweite Summationsbereich wird in der folgenden Weise ersetzt:

$(n, s > 0) = (s, n > 0) + (n > 0, s \leq 0) - (s > 0, n \leq 0)$. Damit erhalten wir

$$E_\epsilon^{(0)} = \sum_{n>0} \sum_s (\alpha_{ns}^v F_{k,r}^{sn} - \alpha_{nr}^s F_{k,s}^{vn}) \psi(\epsilon n) + \left(\sum_{\substack{n>0 \\ s \leq 0}} - \sum_{\substack{s>0 \\ s \leq 0}} \right) \alpha_{nr}^s F_{k,s}^{vn} \psi(\epsilon n). \quad (11-28)$$

²Falls die obere Schranke kleiner als die untere ist, so soll darunter verstanden werden, daß man die Summationsreihenfolge und das Vorzeichen des Ausdrucks vertauscht. Diese Regel soll für alle folgenden Summationen gelten.

Nach der Summation über s in der ersten Summe und dem Gebrauch der “Delta-Distribution” sehen wir, daß diese Summe verschwindet. Mit Hilfe der Integraldarstellung von $F_{k,s}^{vn}$ (Lemma 11.8) und von α_{nr}^s (9-40) kann die zweite Summe umgeschrieben werden als

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} A_r(Q') e_k(Q) \omega^v(Q) \left(\sum_{\substack{n>0 \\ s\leq 0}} - \sum_{\substack{s>0 \\ n\leq 0}} \right) A_n(Q') A_s(Q) \omega^s(Q') \omega^n(Q) \psi(\epsilon n) . \quad (11-29)$$

Wir benützen

Proposition 11.10. (Bonora et al. [22]) Für jedes N gilt

$$\left(\sum_{n>N} \sum_{s\leq N} - \sum_{s>N} \sum_{n\leq N} \right) A_n(Q') A_s(Q) \omega^s(Q') \omega^n(Q) = d' \Delta(Q', Q) . \quad (11-30)$$

Hierbei bedeute d' Differentiation in Bezug auf die Variable Q' .

Aus Gründen der Vollständigkeit werde ich weiter unten einen Beweis geben. Wenden wir diese Proposition auf unsere Situation an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} E_0^{(0)} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} A_r(Q') e_k(Q) \omega^v(Q) d' \Delta(Q', Q) \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} d' A_r(Q') e_k(Q) \omega^v(Q) \Delta(Q', Q) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} dA_r(Q) e_k(Q) \omega^v(Q) = -K_{k,r}^v . \end{aligned}$$

Die Behauptung von Proposition 11.4 erhalten wir nun, indem wir alle nichtverschwindenden Teile zusammensammeln. \square

Beweis von Proposition 11.10. Zuerst zeigen wir die folgende Relation

Lemma 11.11.

$$\gamma_{rk} = \left(\sum_{n>0} \sum_{s\leq 0} - \sum_{s>0} \sum_{n\leq 0} \right) \alpha_{rn}^s \alpha_{ks}^n . \quad (11-31)$$

Beweis. Es ist die Idee von Bonora et al., Darstellungen via semi-infiniter Wedgeformen zu benutzen. Dies soll hier auch im Vorgriff auf den Abschnitt 13 getan werden. Hier nehmen wir Formen vom Gewicht 0. Es sei $\Phi = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots$ der Vakuumvektor vom Gewicht 0 und Niveau 1. Das Element $A_i \in \mathcal{A}$ operiert mit der Leibnizregel als

$$A_i \cdot \Phi = (A_i \cdot A_1) \wedge A_2 \wedge \dots + A_1 \wedge (A_i \cdot A_2) \wedge A_3 \dots + \dots \quad (11-32)$$

Wie in Abschnitt 13 gezeigt wird, ist diese Definition sinnvoll solange $|i|$ groß genug ist. Für einen kritischen Streifen von Indizes (insbesondere für $A_0 = 1$) muß die Aktion modifiziert werden³ und wir erhalten eine Darstellung einer zentralerweiterten Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ mit lokalem definierenden Kozykel. Entscheidend ist nicht nur die Aktion von A , sondern auch, daß die Aktion einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{D}}$ definiert ist, so daß die Aktion von $\widehat{\mathcal{A}}$ von dieser durch Einschränkung gewonnen werden kann. Nach den Ergebnissen von Krichever und Novikov, siehe die Bemerkung nach Thm. 10.11, ist somit der Kozykel, der $\widehat{\mathcal{A}}$ definiert, ein skalares Vielfaches des Kozykels (10-32). Damit $[\widehat{A}_r, \widehat{A}_k] \cdot \Phi = d\gamma(A_r, A_k)\Phi = d\gamma_{rk}\Phi$. Für r und k außerhalb des kritischen Streifens der Indizes stimmt die Aktion von \widehat{A}_r , bzw. \widehat{A}_k mit der Aktion der entsprechenden Elemente A_r gegeben durch (11-32) überein. Außerhalb des kritischen Streifens kann $[\widehat{A}_r, \widehat{A}_k] \cdot \Phi$ wie folgt berechnet werden (siehe [H, p.137] für die Details). Man muß nur die Möglichkeiten in Betracht ziehen mit denen sich das Element A_s innerhalb Φ selbst reproduziert. Es gilt $A_k \cdot A_s = \sum_n \alpha_{ks}^n A_n$. Dieser Term tritt nur auf, falls $s \geq 1$ ist. Nur die Terme mit $n < 1$ werden nicht durch die Nachbarelemente annulliert. Um das Resultat durch die Operation von A_r wieder nach A_s zurückzubringen, erhalten wir $\sum_{s>0} \sum_{n \leq 0} \alpha_{rn}^s \alpha_{ks}^n$. Wenden wir dasselbe auf $-A_k \cdot A_r$ an und ändern wir die Bezeichnung der Variablen, so erhalten wir

$$[\widehat{A}_r, \widehat{A}_k] \cdot \Phi = -\left(\sum_{n>0} \sum_{s \leq 0} - \sum_{s>0} \sum_{n \leq 0} \right) \alpha_{rn}^s \alpha_{ks}^n \Phi = d\gamma_{rk}\Phi . \quad (11-33)$$

Um die Konstante zu bestimmen, berechnen wir diesen Ausdruck für $r = i$ und $k = -i$ falls $i \gg 0$. Es ist $A_i \Phi = 0$ und somit $[A_i, A_{-i}]\Phi = A_i(A_{-i}\Phi)$. Weiter gilt $A_k \cdot A_s = A_{k+s} + A_j$ -Terme mit j -Indizes größer als $k + s$. Damit nehmen wir für jedes s den Faktor 1 auf, solange $s - i \leq 0$ gilt. Nun ist $s \geq 1$ und wir erhalten $[A_i, A_{-i}]\Phi = i \cdot \Phi = d \cdot \gamma(A_i, A_{-i})\Phi$. Durch das Berechnen der Residuen erhalten wir $\gamma(A_i, A_{-i}) = -i$ und somit die Behauptung. \square

³In Physikersprechweise: Sie muß regularisiert werden.

Es sei daraufhingewiesen, daß Bonora et al. auch einen Beweis durch direkte Berechnung andeuten.

Es gilt

$$dA_k(Q) = \sum_r \beta_{kr} \omega^r(Q), \quad \beta_{kr} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} dA_k(Q) A_r(Q) = \gamma_{rk} \quad (11-34)$$

und somit mit Lemma 11.11

$$d' \Delta(Q', Q) = \sum_k d' A_k(Q') \omega^k(Q) = \sum_{k,r} \left(\sum_{\substack{n>0 \\ s \leq 0}} - \sum_{\substack{s>0 \\ n \leq 0}} \right) \alpha_{rn}^s \alpha_{ks}^n \omega^k(Q) \omega^r(Q'). \quad (11-35)$$

Wir benutzen $A_i \omega^j = \sum_r \alpha_{ir}^j \omega^r$ und erhalten das Resultat für $N = 0$. Um es für allgemeines N zu erhalten, vergleichen wir die Summationsbereiche mit dem $N = 0$ Bereich. Wir erhalten als Differenz $(\sum_{s=1}^N \sum_n - \sum_{n=1}^N \sum_s) \alpha_{rn}^s \alpha_{ks}^n \omega^k(Q) \omega^r(Q')$. Jede dieser partiellen Summen hat nur endlich viele Terme. Dies bedeutet, daß die Summation jeweils separat ausgeführt werden kann. Wenn wir dies für die Summation über n in der ersten Summe machen (nachdem die Koeffizienten als Integrale geschrieben wurden und man die "Delta-Distribution" benutzt hat) und über s in der zweiten Summe machen, so erhalten wir denselben Wert und sie heben sich gegenseitig auf. \square

Beweis von Proposition 11.6. Wieder schreiben wir für $\epsilon \neq 0$

$$[L_k(\epsilon), L_l] = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_i l_k^{nm} [u_i(n) u^i(m), L_l] \psi(\epsilon n). \quad (11-36)$$

Wie zu Beginn dieses Teilabschnitts erläutert, können wir die Normalordnung innerhalb der obigen Kommutatoren ignorieren und schreiben somit (11-36) um zu

$$\frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_i l_k^{nm} (u_i(n) [u^i(m), L_l] + [u_i(n), L_l] u^i(m)) \psi(\epsilon n). \quad (11-37)$$

Wir benützen Prop. 11.4 um die Kommutatoren zu berechnen und erhalten

$$\frac{1}{2} (c + k) \sum_{n,m,v} \sum_i l_k^{nm} (K_{l,m}^v u_i(n) u^i(v) + K_{l,n}^v u_i(v) u^i(m)) \psi(\epsilon n). \quad (11-38)$$

Um dies in 2 Summen aufzuspalten, die für $\epsilon = 0$ wohldefiniert sind, müssen wir vorher alles in Normalordnung umschreiben. Dabei nehmen wir Kommutatoren für die Indizes auf, die noch nicht in Normalordnung sind. Nach der Auswertung dieser Kommutatoren mit Hilfe von Lemma 11.2(3), können wir das Ergebnis als Summe $A_\epsilon + B_\epsilon + C_\epsilon + D_\epsilon$ schreiben mit

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_{n,m,v} \sum_i l_k^{nm} K_{l,m}^v :u_i(n)u^i(v): \psi(\epsilon n) , \\ B_\epsilon &= \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_{n,m,v} \sum_i l_k^{nm} K_{l,n}^v :u_i(v)u^i(m): \psi(\epsilon n) , \\ C_\epsilon &= -\frac{1}{2}\mathbf{c}(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \dim \mathfrak{g} \sum_{v,m} \sum_{n>v} l_k^{nm} K_{l,m}^v \gamma_{nv} \psi(\epsilon n) , \\ D_\epsilon &= -\frac{1}{2}\mathbf{c}(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \dim \mathfrak{g} \sum_{n,m} \sum_{v>m} l_k^{nm} K_{l,n}^v \gamma_{vm} \psi(\epsilon n) . \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Bereichs für den die Koeffizienten l_k^{nm} und $K_{l,m}^v$ ungleich Null sein können und der Normalordnung sehen wir, daß A_0 und B_0 wohldefinierte Operatoren sind. Damit können wir den $\psi(\epsilon n)$ Factor ignorieren. Ändern wir die Bezeichnung der Variablen in B_0 ($v \rightarrow n \rightarrow m \rightarrow v$), so erhalten wir

$$A_0 + B_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_{n,m,v} \sum_i (l_k^{nm} K_{l,m}^v + l_k^{mv} K_{l,m}^n) :u_i(n)u^i(v): . \quad (11-39)$$

Die Strukturkonstanten der Vektorfeldalgebra \mathcal{L} werden aufgrund der Dualität berechnet als

$$C_{kl}^s = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} ([e_k, e_l]) \cdot \Omega^s . \quad (11-40)$$

Lemma 11.12.

$$\sum_m (l_k^{nm} K_{l,m}^v + l_k^{mv} K_{l,m}^n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} [e_k, e_l] \cdot \omega^n \omega^v = -\sum_s C_{kl}^s l_s^{nv} . \quad (11-41)$$

Beweis. Die rechte Seite kann geschrieben werden als

$$-\sum_s \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} [e_k, e_l](Q) \cdot \Omega^s(Q) \omega^n(Q') \omega^v(Q') e_s(Q') .$$

Nach der Summation über s erhalten wir die “Delta-Distribution” für das Gewichtspaar $(-1, 2)$. Wir integrieren über Q' und erhalten $-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} [e_k, e_l](Q) \omega^n(Q) \omega^v(Q)$, den Ausdruck in der Mitte. Auf der linken Seite erhalten wir für die erste Summe

$$\sum_m l_k^{nm} K_{l,m}^v = \sum_m \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} \omega^n(Q) \omega^m(Q) e_k(Q) d'A_m(Q') e_l(Q') \omega^v(Q') .$$

Wenden wir $\sum_m d'A_m(Q') \omega^m(Q) = d'\Delta(Q', Q)$ an, so erhalten wir nach der Q' -Integration $-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \omega^n(Q) e_k(Q) d(e_l(Q) \omega^v(Q))$. Für die zweite Summe erhalten wir

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \omega^v(Q) e_k(Q) d(e_l(Q) \omega^n(Q)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} d(\omega^v(Q) e_k(Q)) e_l(Q) \omega^n(Q) .$$

Zusammen

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \left(\omega^n(Q) e_k(Q) d(e_l(Q) \omega^v(Q)) - \omega^n(Q) e_l(Q) d(e_k(Q) \omega^v(Q)) \right) .$$

Ersetzen wir jede Form durch ihre lokale darstellende Funktion, so erhalten wir für den Integranden

$$\omega^n(z) \omega^v(z) \left(e_k(z) \frac{de_l}{dz}(z) - e_l(z) \frac{de_k}{dz}(z) \right) = \omega^n(z) \omega^v(z) [e_k, e_l](z) .$$

Damit also die Behauptung. \square

Somit gilt

$$A_0 + B_0 = -\frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_s \sum_{n,v} \sum_i C_{kl}^s l_s^{nv} :u_i(n) u^i(v): = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_s C_{kl}^s L_s .$$

Es bleibt $\alpha(k, l) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (C_\epsilon + D_\epsilon)$ zu untersuchen. Da L_k und L_l wohldefinierte Operatoren innerhalb $gl(V)$ sind, ist der Skalar $\alpha(k, l)$ wohldefiniert. Indem wir die Jacobi-Identität innerhalb $gl(V)$ benutzen und die Tatsache, daß die C_{kl}^s ebenfalls die Jacobi-Identität erfüllen (da sie Strukturkonstanten der Algebra \mathcal{L} sind) erhalten wir, daß dadurch ein 2-Kozykel definiert ist. Untersucht man die Ordnung der beteiligten Formen, welche zur Definition der l_k^{nm} , $K_{l,m}^v$ und γ_{nv} benutzt werden, an den Punkten P_+ und P_- und berechnet die Residuen, um die Integrale auszuwerten, so sehen wir für generische n, m, v Werte

$$K_{l,m}^v \neq 0 \implies -3g \leq -v + l + m \leq 0, \\ l_k^{nm} \neq 0 \implies -g \leq k - (n + m) \leq 0, \quad \gamma_{nv} \neq 0 \implies -2g \leq n + v \leq 0 .$$

Addieren wir alles zusammen, erhalten wir $\alpha(k, l) \neq 0 \implies -6g \leq k + l \leq 0$. Für $g \neq 0$ und $n = -g$ und $v = -g - 1$ (oder umgekehrt) ist $\gamma_{-g, -g-1} \neq 0$. In diesem Fall werden die anderen Koeffizienten dafür sorgen, daß sich dieselben Schranken ergeben. Insbesondere ist der Kozykel lokal. Er kann gegeben werden als

$$\alpha(k, l) = -\frac{1}{2} \mathbf{c}(\mathbf{c} + k) \dim \mathfrak{g} \sum_n \left(\sum_{m, s} \sum_{v < n} l_k^{nm} l_l^{vs} \gamma_{sm} \gamma_{nv} + \sum_{m, s} \sum_{v > m} l_k^{nm} l_l^{vs} \gamma_{sn} \gamma_{vm} \right).$$

Im Rest dieses Teilabschnitts möchte ich eine elegantere Darstellung des Kozykels finden. Zur Vereinfachung der Notation werde ich den überall auftretenden Vorfaktor $(-1/2)\mathbf{c}(\mathbf{c} + k) \dim \mathfrak{g}$ bei der Berechnung ignorieren und ihn am Ende hinzufügen. Sei N eine feste ganze Zahl. Wir gehen wiederum von C_ϵ und D_ϵ aus und definieren $E_\epsilon := \sum_{v, m} \sum_{n > N} l_k^{nm} K_{l, m}^v \gamma_{nv} \psi(\epsilon n)$, und $F_\epsilon := \sum_{n, m} \sum_{v > N} l_k^{nm} K_{l, n}^v \gamma_{vm} \psi(\epsilon n)$. In $C_\epsilon - E_\epsilon$ und $D_\epsilon - F_\epsilon$ treten nur endlich viele Terme auf. Damit können wir dort wieder $\epsilon = 0$ setzen und $\psi(\epsilon n)$ vergessen. Benennen wir in $D_\epsilon - F_\epsilon$ die Variablen ($v \rightarrow n \rightarrow m \rightarrow v$) um, so erhalten wir durch Anwendung von Lemma 11.12 den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} ((C_\epsilon - E_\epsilon) + (D_\epsilon - F_\epsilon)) &= \sum_v \sum_{n=v+1}^N \left(\sum_m l_k^{nm} K_{l, m}^v + l_k^{mv} K_{l, m}^n \right) \gamma_{nv} \\ &= - \sum_v \sum_{n=v+1}^N \sum_s C_{kl}^s l_s^{nv} \gamma_{nv}. \end{aligned} \quad (11-42)$$

Im Gegensatz zum Beweis der Prop. 11.4 wird dieser im allgemeinen nicht verschwinden. Dies ist der Grund dafür, daß die Form des Kozykels von der Normalordnung abhängt.

Wir betrachten $E_\epsilon + F_\epsilon$. Der Summationsbereich für F_ϵ wird zerlegt als $(n, v > N) = (v, n > N) + (v > N, n \leq N) - (n > N, v \leq N)$. Die erste, derart erhaltene, Summe nennen wir $F_\epsilon^{(1)}$ und die restlichen zwei zusammen $F_\epsilon^{(2)}$. Unter Benutzung von $\gamma_{vm} = -\gamma_{mv}$ und $K_{k, v}^n = \sum_m l_k^{nm} \gamma_{mv}$ erhalten wir zuerst

$$E_\epsilon + F_\epsilon^{(1)} = \sum_v \sum_{n > N} \left(\left(\sum_m l_k^{nm} K_{l, m}^v \right) \gamma_{nv} - K_{l, n}^v K_{k, v}^n \right) \psi(\epsilon n).$$

Da $F_\epsilon^{(2)}$ für $\epsilon = 0$ wohldefiniert ist (siehe unten), können wir $\psi(\epsilon n)$, solange wir die Summe nicht in zwei Teilsummen aufbrechen, ignorieren. Mit der Integraldarstellung der Koeffizienten erhalten wir nach Ausführung der m -Summation eine

“Delta-Distribution” (wie wir es bereits mehrmals gemacht hatten) und erhalten weiter

$$\left(\sum_m l_k^{nm} K_{l,m}^v \right) \gamma_{nv} = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} w^v(Q) d' A_n(Q') e_l(Q) d(e_k(Q) \omega^n(Q)) A_v(Q') ,$$

$$K_{l,n}^v K_{k,v}^n = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau C_{\tau'}} w^v(Q') d' A_n(Q') e_l(Q') d(e_k(Q) \omega^n(Q)) A_v(Q) .$$

Die Summation über v und Integration über Q' zeigt, daß $E_\epsilon + F_\epsilon^{(1)} = 0$ ist.

Es bleibt die Betrachtung von

$$F_\epsilon^{(2)} = \left(\sum_{n>N} \sum_{v \leq N} - \sum_{n \leq N} \sum_{v > N} \right) K_{k,v}^n K_{l,n}^v \psi(\epsilon n) . \quad (11-43)$$

Indem wir die Strukturkonstanten anschauen, sehen wir, daß jede Teilsumme nur aus endlich vielen Termen besteht. Damit können wir wieder $\epsilon = 0$ setzen. Für $N = 0$ sammeln wir die überlebenden Terme (11-42) und (11-43) zusammen und erhalten die Struktur des Kozykels (11-16) wie in Prop. 11.6 behauptet. Durch Wahl einer anderen Normalordnung würden wir eine andere Summationsvorgabe in (11-42) erhalten. Der Ausdruck (11-43) würde gleich bleiben.

Es bleibt die Form (11-17) des Kozykels für die speziellen Basiselemente zu zeigen. Wir schauen zuerst $\hat{\chi}_{k,-k}$ an. Aus $K_{k,v}^n \neq 0$ folgt $k \leq n - v$ und aus $K_{-k,n}^v \neq 0$ folgt $-k \leq v - n$, damit also $v = n - k$. Als Wert erhalten wir in diesem Fall $(n - k)$ bzw. n . Sei $k \geq 0$, dann wird nur die erste Summe überleben. Es ist die endliche Summe

$$\sum_{n=1}^k (n - k)n = -\frac{1}{6}(k^3 - k) .$$

Im Ausdruck für $\psi_{k,-k}$ erhalten wir $C_{k,-k}^s l_s^{nv} \gamma_{nv} \neq 0$ nur falls $s \geq 0$, $s \leq n + v$ und $n + v \leq 0$. Dies bedeutet, daß Terme ungleich Null nur für $s = 0$ und $n = -v$ erhalten werden. Wenn wir allerdings den Summationsbereich $\sum_v \sum_{n=0}^{v+1}$ betrachten, so sehen wir, daß $n = -v$ entweder $v = 0$ (mit verschwindendem Koeffizienten) oder einen leeren Summationsbereich bedeutet. Deshalb gilt $\psi_{k,-k} = 0$. Insgesamt erhalten wir die Form (11-17).

Zur weiteren Referenz sei notiert

Korollar 11.13. *Sei V die feste zulässige Darstellung, welche im Teilabschnitt (a) fixiert wurde. Sei E ein Operator aus $gl(V)$. Für den Operator gelte: Es gibt ein Basiselement e_l von \mathcal{L} mit*

$$[E, x(r)] = -(\mathfrak{c} + \mathfrak{k}) x(\nabla_{e_l} A_r) \quad (11-44)$$

für jedes $x \in \mathfrak{g}$ und jedes r , dann gilt für jedes k

$$[L_k, E] = [L_k, L_l] .$$

Hierbei kann die rechte Seite durch (11-15) bestimmt werden.

Beweis. Im Beweis von Prop. 11.6 benutzten wir lediglich die Relation $[L_l, x(r)] = -(\mathfrak{c} + \mathfrak{k}) x \otimes (\nabla_{e_l} A_r)$ von Prop. 11.4. Wir erhalten deshalb für einen Operator E , der dieselben Relation erfüllt, $[L_k(\epsilon), E] = [L_k(\epsilon), L_l]$ und damit im Limes $\epsilon \rightarrow 0$: $[L_k, E] = [L_k, L_l]$. \square

(c) Die Verallgemeinerung auf die Mehrpunktsituation

Der in (b) dargestellte Beweis kann auf die Mehrpunktsituation verallgemeinert werden. Wo wir eine Summation über n hatten, haben wir nun dieser Summation eine weitere (nun endliche) Summation über $p = 1, \dots, K$ hinzuzufügen:

$\widehat{u}^i(Q) = \sum_n \sum_p u^i(n, p) \cdot \omega^{n,p}(Q)$. Hierbei und im folgenden sei, falls nichts anderes gesagt wird, die Summation über den ersten Index des Labels immer über \mathbb{Z} und über den zweiten Index über $1, \dots, K$ vorausgesetzt. Die Mehrpunkt Sugawara-Operatoren höheren Geschlechts sind definiert als

$$T(Q) := \frac{1}{2} \sum_i : \widehat{u}_i(Q) \widehat{u}^i(Q) : = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_{p,s} \sum_i : u_i(n, p) u^i(m, s) : \omega^{n,p}(Q) \omega^{m,s}(Q) . \quad (11-45)$$

Dies wird wiederum zerlegt in

$$T(Q) = \sum_k \sum_r L_{k,r} \cdot \Omega^{k,r}(Q) , \quad (11-46)$$

mit

$$L_{k,r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} T(Q) e_{k,r}(Q) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_{p,s} \sum_i : u_i(n,p) u^i(m,s) : l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)} \quad (11-47)$$

und $l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} w^{n,p}(Q) w^{m,s}(Q) e_{k,r}(Q) .$

Wir definieren $\gamma_{(n,p)(m,s)} := \gamma(A_{n,p}, A_{m,s}) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} A_{n,p}(Q) dA_{m,s}(Q)$ und erhalten

Proposition 11.14. *Sei \mathfrak{g} entweder eine endlichdimensionale abelsche oder eine einfache Lie-Algebra, dann gilt*

$$[L_{k,r}, x(n,p)] = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_m \sum_s K_{(k,r),(n,p)}^{(m,s)} x(m,s) , \quad (11-48)$$

$$[L_{k,r}, x(n,p)] = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) x(\nabla_{e_{k,r}} A_{n,p}) , \quad (11-49)$$

$$[L_{k,r}, \hat{x}(Q)] = (\mathbf{c} + \mathbf{k}) e_{k,r} \cdot \hat{x}(Q) , \quad (11-50)$$

$$\text{mit } K_{(k,r),(n,p)}^{(m,s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} w^{m,s} e_{k,r} dA_{n,p} = \sum_l \sum_v l_{(k,r)}^{(m,s)(l,v)} \gamma_{(l,v)(n,p)} . \quad (11-51)$$

Das Ergebnis hängt nicht von der gewählten Normalordnung ab.

Im Beweis der 2-Punktsituation wurde im wesentlichen lediglich die Dualität und die “Delta-Distribution” benutzt. Diese wurden verallgemeinert. Daneben spielte noch das Lemma von Bonora et al. eine Rolle. Seine Mehrpunkt-Verallgemeinerung lautet:

Proposition 11.15. *Für jedes N gilt*

$$\left(\sum_{\substack{n > N \\ m \leq N}} - \sum_{\substack{m > N \\ n \leq N}} \right) \sum_{p,s} A_{n,p}(Q') A_{m,s}(Q) \omega^{m,s}(Q') \omega^{n,p}(Q) = d' \Delta(Q', Q) . \quad (11-52)$$

Hierbei bedeute d' Differentiation in Bezug auf die Variable Q' .

Skizze des Beweises. Unter der Voraussetzung der Eindeutigkeit (bis auf Multiplikation mit einem Skalar) des lokalen Kozykels für die Mehrpunktalgebra \mathcal{A} definiert durch die Aktion auf den semi-infiniten Wedgeformen (siehe die Bemerkung nach

Thm 10.11) können wir wie in (b) argumentieren. Die rechte Seite von (11-31), in ihrer passenden Verallgemeinerung, muß wieder ein skalares Vielfaches des Kozykels (10-32) sein. Um den Skalar zu fixieren, berechnen wir $[A_{i,p}, A_{-i,p}] \Phi$. Beachte, daß wir die Struktur $A_{k,s} A_{n,r} = A_{k+n,r} \delta_s^r + A$ -Terme mit höherem Grad als $k+n$ haben und daß gilt $\gamma(A_{i,p}, A_{-i,p}) = (-i)$ (es gibt nur ein Residuum und dies ist am Punkt P_p). Falls man die Aussage über die Eindeutigkeit des lokalen Kozykels vermeiden möchte, muß man längliche lokale Berechnungen durchführen wie in in [22] angedeutet. \square

Proposition 11.6 (und ihr Beweis) hat ihre offensichtliche Verallgemeinerung:

Proposition 11.16. *Die Operatoren $L_k \in gl(V)$ und $id = 1 \in gl(V)$ definieren eine Lie-Unteralgebra von $gl(V)$ mit der Kommutatorrelation*

$$[L_{k,r}, L_{l,v}] = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_n \sum_p C_{(k,r)(l,v)}^{(n,p)} L_{n,p} - \frac{1}{2} \mathbf{c}(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \dim \mathfrak{g} \cdot \chi_{(k,r)(l,v)} \cdot id. \quad (11-53)$$

Aus $\chi_{(k,r)(l,v)} \neq 0$ folgt, daß $-P \leq k+l \leq 0$ gilt, mit einer positiven Konstanten P , die weder von k noch von l abhängt.

Die Aufspaltung von $\chi_{(k,r)(l,s)}$ und die konkreten Ausdrücke für die Teile ist vollständig analog zu (11-16). Dasselbe gilt für die Ausdrücke (11-17) für die Form des Kozykels für gewisse Basiselemente. Wir erhalten

Theorem 11.17. *Sei \mathfrak{g} entweder eine endlichdimensionale abelsche oder einfache Lie-Algebra und sei $2\mathbf{k}$ der Eigenwert des Casimir-Operators in der adjungierten Darstellung. Sei A eine endliche Punktmenge (für $g \geq 2$ in allgemeiner Position) und $A = I \cup O$ eine Aufspaltung in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen. Sei \mathcal{A} die Algebra der meromorphen Funktionen die holomorph auf $M \setminus A$ sind und $\widehat{\mathcal{G}}$ die affine Mehrpunktalgebra höheren Geschlechts, d.h. die zentrale Erweiterung von $\mathcal{G} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ mit zentralem Element t definiert durch*

$$[\widehat{x \otimes f}, \widehat{y \otimes g}] = [x, y] \otimes (fg) - (x|y) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} fdg \cdot t, \quad [t, \widehat{\mathcal{G}}_\alpha] = 0, \quad (11-54)$$

mit C_τ einer Niveaulinie, welche die Punkte aus I und O trennt. Sei V eine zulässige Darstellung in der das zentrale Element t als \mathbf{c} -Identität operiert. Ist $\mathbf{c} + \mathbf{k} \neq 0$ dann

definieren die reskalierten Moden

$$L_{k,r}^* = \frac{-1}{2(\mathbf{c} + \mathbf{k})} \sum_{n,m} \sum_{p,s} \sum_i : u_i(n,p) u^i(m,s) : l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)} \quad (11-55)$$

des Sugawara-Operators $T(Q)$ eine Darstellung einer lokalen zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{L}}$ der Krichever-Novikov-Vektorfeldalgebra \mathcal{L} .

Benützen wir wiederum die, dem Thm 10.11 folgende, Aussage von Krichever und Novikov über die Eindeutigkeit des lokalen Kozykels für die Algebra \mathcal{L} , so erhalten wir in der Tat eine Darstellung von $\widehat{\mathcal{L}}$ definiert durch den Kozykel (10-31).

Bemerkung 11.18. *Definiert man den Skalar, mit dem das zentrale Element t der erweiterten Vektorfeldalgebra $\widehat{\mathcal{L}}$ (in Bezug auf die Repräsentation durch den Kozykel (10-34)) operiert, als die zentrale Ladung der Darstellung, so besitzt die durch die Sugawara-Konstruktion erhaltene Darstellung sowohl im 2-Punktfall als auch im Mehrpunktfall die zentrale Ladung*

$$\mathbf{c}_{\widehat{\mathcal{L}}} = \frac{\mathbf{c} \dim \mathfrak{g}}{\mathbf{c} + \mathbf{k}}. \quad (11-56)$$

Möchte man die Benutzung der Resultate von Krichever und Novikov über die "Eindeutigkeit" des lokalen Kozykels vermeiden, so kann man zumindestens in den hier auftretenden Fällen die zentrale Ladung auch als die Zahl α definieren, für die

$$\chi'_{(k,p),(-k,p)} = \alpha \frac{k^3}{12} + \text{niedrigere Ordnung in } k$$

für $k \gg 0$ gilt. Hierbei ist $\chi'_{(k,p),(-k,p)}$ der Kozykel für \mathcal{L} , der durch die Darstellung gegeben ist (d.h. der jeweilige Skalar vor der Identität).

Ist \mathfrak{g} eine abelsche Lie-Algebra, ergibt sich als zentrale Ladung $\dim \mathfrak{g}$. Ist speziell $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$, die eindimensionale Lie-Algebra, so gilt $\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{\mathcal{A}}$ und wir erhalten ausgehend von einer Darstellung von $\widehat{\mathcal{A}}$ (der Heisenberg-Algebra) durch die Sugawara-Konstruktion eine Darstellung der zentralerweiterten Vektorfeldalgebra mit zentraler Ladung $\mathbf{c}_{\widehat{\mathcal{L}}} = 1$.

12. Höchstgewichtsdarstellungen, Gewichte und Casimir-Operatoren der Sugawara-Konstruktion

(a) Höchstgewichtsdarstellungen

Im folgenden seien alle zentralen Erweiterungen gegeben in Bezug auf die lokalen Kozykel, die durch Integration über eine Niveaulinie C_τ erhalten werden. Es sei $\widehat{\mathcal{A}}$ die zentrale Erweiterung der Funktionenalgebra (die Heisenberg-Algebra), $\widehat{\mathcal{G}}$ die affine Mehrpunktalgebra zur reductiven Lie-Algebra \mathfrak{g} und $\widehat{\mathcal{L}}$ die zentralerweiterte Vektorfeldalgebra (siehe Abschnitt 10). Aufgefaßt als beinahe-graduierte Lie-Algebren können sie zerlegt werden in

$$\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}_- \oplus \widehat{\mathcal{A}}_{(0)} \oplus \widehat{\mathcal{A}}_+, \quad \widehat{\mathcal{G}} = \widehat{\mathcal{G}}_- \oplus \widehat{\mathcal{G}}_{(0)} \oplus \widehat{\mathcal{G}}_+, \quad \widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}}_- \oplus \widehat{\mathcal{L}}_{(0)} \oplus \widehat{\mathcal{L}}_+. \quad (12-1)$$

Es sei daran erinnert, daß gilt $\widehat{\mathcal{A}}_+ \cong \mathcal{A}_+$ und $\widehat{\mathcal{A}}_- \cong \mathcal{A}_-$ als Lie-Algebra. Das entsprechende gilt für die anderen beiden Algebren. Der Lift des Basiselements $A_{n,p}$ der Funktionen in Bezug auf die Repräsentation durch den lokalen Kozykel sei mit $\widehat{A}_{n,p}$ bezeichnet, der Lift des Basiselements $e_{n,p}$ der Vektorfelder mit $E_{n,p}$. Für das zentrale Element benutzen wir immer t . Für die Lie-Algebra B sei die universelle Einhüllende mit $U(B)$ bezeichnet. Hier möchte ich Höchstgewichtsmoduln (bzw. -darstellungen) in Verallgemeinerung der klassischen Situation ($g = 0$) definieren. Im 2-Punktfall wurde von Sheinman in einer Reihe von Arbeiten [182],[183],[184],[185],[186] die klassische Definition erweitert auf die affinen Lie-Algebren höheren Geschlechts (Krichever-Novikov-Algebren vom affinen Typ).

Definition 12.1. Sei $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ ein beinahe-graduierter $\widehat{\mathcal{A}}$ -Modul. V heißt *Höchstgewichtsmodul* mit *Höchstgewichtsvektor* $v = v_{h,c}$, *führendem Gewicht* $h = (h_1, h_1, \dots, h_K) \in \mathbb{C}^K$ und *zentraler Ladung* $c \in \mathbb{C}$ falls, die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es gilt $V = U(\widehat{\mathcal{A}})v$.

(2) Der Vektor v ist homogen. Es gilt

$$V = \bigoplus_{n=-\infty}^{\deg(v)} V_n \quad \text{und} \quad V_{\deg(v)} = \mathbb{C} \cdot v .$$

(3) Es gilt $\widehat{\mathcal{A}}_+ v = 0$ und $\deg(\widehat{\mathcal{A}}_- v) < \deg(v)$.

(4) Das zentrale Element operiert als \mathbf{c} -Identität auf V .

(5) Es gilt

$$\widehat{A}_{0,p} v = h_p \cdot v + \dots , \quad p = 1, \dots, K. \quad (12-2)$$

Es bezeichne hier und im folgenden ... Terme mit niedrigerem Grad.

Völlig analog ist die Definition einer Höchstgewichtsdarstellung für die zentralerweiterte Vektorfeldalgebra, bzw. für die zentralerweiterte Differentialoperatoralgebra:

Definition 12.2. Sei $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ ein beinahe-graduierter $\widehat{\mathcal{L}}$ -Modul. V heißt *Höchstgewichtsmodul* mit *Höchstgewichtsvektor* $v = v_{h,c}$, *führendem Gewicht* $h = (h_1, \dots, h_K) \in \mathbb{C}^K$ und zentraler Ladung $\mathbf{c} \in \mathbb{C}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es gilt $V = U(\widehat{\mathcal{L}}) v$.

(2) Der Vektor v ist homogen. Es gilt

$$V = \bigoplus_{n=-\infty}^{\deg(v)} V_n \quad \text{und} \quad V_{\deg(v)} = \mathbb{C} \cdot v .$$

(3) Es gilt $\widehat{\mathcal{L}}_+ v = 0$ und $\deg(\widehat{\mathcal{L}}_- v) < \deg(v)$.

(4) Das zentrale Element operiert als \mathbf{c} -Identität auf V .

(5) Es gilt

$$E_{0,p} v = h_p \cdot v + \dots , \quad p = 1, \dots, K . \quad (12-3)$$

Definition 12.3. Sei $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ ein beinahe-graduierter $\widehat{\mathcal{D}}^1$ -Modul. V heißt *Höchstgewichtsmodul* mit *Höchstgewichtsvektor* $v = v_{h,c}$, *führendem Gewicht* $h = ((h_1, \dots, h_K), (h'_1, \dots, h'_K)) \in \mathbb{C}^K \times \mathbb{C}^K$ und zentraler Ladung $\mathbf{c} \in \mathbb{C}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es gilt $V = U(\widehat{\mathcal{D}}^1) v$.

(2) Der Vektor v ist homogen. Es gilt

$$V = \bigoplus_{n=-\infty}^{\deg(v)} V_n \quad \text{und} \quad V_{\deg(v)} = \mathbb{C} \cdot v$$

(3) Es gilt $\widehat{\mathcal{D}}^1_+ v = 0$ und $\deg(\widehat{\mathcal{D}}^1_- v) < \deg(v)$.

(4) Das zentrale Element operiert als \mathfrak{c} -Identität auf V .

(5) Es gilt

$$E_{0,p}v = h_p \cdot v + \dots, \quad \widehat{A}_{0,p}v = h'_p \cdot v + \dots, \quad p = 1, \dots, K.$$

Proposition 12.4. *Die Funktion $1 \in \mathcal{A}$ liegt im Unterraum $\mathcal{A}_{(0)}$. Mit Hilfe von $x \mapsto x \otimes 1$ kann \mathfrak{g} in $\mathcal{G}_{(0)}$ und $\widehat{\mathcal{G}}_{(0)}$ eingebettet werden.*

Beweis. Die Koeffizienten der Zerlegung $1 = \sum_{n,p} \alpha_{(n,p)} A_{n,p}$ sind aufgrund der Dualität gegeben als $\alpha_{(n,p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} \omega^{n,p}$. Liegen die (n,p) aber außerhalb des kritischen Streifens, so verschwindet dieses Integral, da entweder bei I oder bei O keine Pole vorliegen (siehe Abschnitt 9 für $K = L$ bzw. [H], [G] für den allgemeinen Fall). Es gilt

$$[x \otimes 1, y \otimes 1] = [x, y] \otimes 1 + (x|y)\gamma(1,1) \cdot t.$$

Da $\gamma(1,1) = 0$, verschwindet der zentrale Term und wir erhalten die Einbettung. \square

Im Fall $N = 2$ gilt $A_0 = 1$.

Sei \mathfrak{g} eine endlichdimensionale abelsche oder einfache Lie-Algebra. Falls \mathfrak{g} eine einfache Lie-Algebra ist, so bezeichne \mathfrak{h} eine feste Cartan-Unteralgebra, \mathfrak{n}_+ (bzw. \mathfrak{n}_-) die obere (bzw. untere) nilpotente Algebra und \mathfrak{h}^* das Dual der Cartan-Unteralgebra. Mit obiger Proposition können \mathfrak{h} , \mathfrak{n}_+ , \mathfrak{n}_- als Unteralgebren von $\widehat{\mathcal{G}}$ betrachtet werden. Es seien α die Wurzeln der Lie-Algebra \mathfrak{g} und die x_α die zugehörigen Wurzelvektoren. Ist \mathfrak{g} abelsch, so sei $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ gesetzt.

Definition 12.5. Sei $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ ein beinahe-graduierter $\widehat{\mathcal{G}}$ -Modul. V heißt *Höchstgewichtsmodul* mit *Höchstgewichtsvektor* $v = v_{h,c}$, *führendem Gewicht* $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_K) \in (h^*)^K$ und *zentraler Ladung* (oder *Level*) $c \in \mathbb{C}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es gilt $V = U(\widehat{\mathcal{G}})v$.
- (2) Der Vektor v ist homogen. Es gilt

$$V = \bigoplus_{n=-\infty}^{\deg(v)} V_n \quad \text{und} \quad V_{\deg(v)} = \mathbb{C} \cdot v .$$

- (3) Es gilt $\widehat{\mathcal{G}}_+ v = 0$ und $\deg(\widehat{\mathcal{G}}_- v) < \deg(v)$.
- (4) Das zentrale Element operiert als $c \cdot$ Identität auf V .
- (5) Es gilt

$$h(0, p)v = \chi_p(h) \cdot v + \dots . \quad (12-4)$$

- (6) Es gilt

$$\deg((\mathfrak{n}_+ \otimes \mathcal{A}_{(0)})v) < \deg(v) . \quad (12-5)$$

Dies bedeutet: Für alle Wurzelvektoren x_α zu positiven Wurzeln α und allen $f \in \mathcal{A}_{(0)}$ gilt

$$x_\alpha(f)v = 0 \cdot v + \dots . \quad (12-6)$$

Im Falle, daß \mathfrak{g} abelsch ist, ist die Bedingung (6) zu ignorieren.

Im Fall $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$ erhalten wir die Definition 12.1 zurück.

Proposition 12.6. *Ist V ein Höchstgewichtsmodul von $\widehat{\mathcal{G}}$, dann gilt für alle $w \in V$: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $\widehat{\mathcal{G}}_n w = 0$. Es handelt sich also um einen zulässigen Modul im Sinne von Def. 11.1. Die entsprechende Aussage gilt auch für Höchstgewichtsmoduln über den Algebren $\widehat{\mathcal{A}}$ und $\widehat{\mathcal{L}}$.*

Beweis. Sei v der Höchstgewichtsvektor von V . Da $V = U(\widehat{\mathcal{G}})v$ und $\widehat{\mathcal{G}}_+ v = 0$ ist, kann man w schreiben als ein Vektor der durch Anwendung einer Folge von Elementen aus $\widehat{\mathcal{G}}_- \oplus \widehat{\mathcal{G}}_{(0)}$ mit absteigendem Grad auf v erhalten wird. Aufgrund der Beinahe-Graduiertheit von $\widehat{\mathcal{G}}$ wird w somit durch Elemente aus $\widehat{\mathcal{G}}_n$ für n groß genug annulliert. Dieses n hängt von w ab. Per Definition operiert das zentrale Element als skalares Vielfaches der Identität. \square

Der Sugawara-Operator, bzw. seine Moden sind deshalb nach den Ausführungen von Abschnitt 11 wohldefiniert. Wir erhalten

Proposition 12.7. *Sei $\widehat{\mathcal{G}}$ die affine Mehrpunktalgebra zu einer abelschen oder einfachen Lie-Algebra. Sei $k = 0$ im abelschen Fall und die duale Coxeter-Zahl im einfachen Fall. Sei V ein Höchstgewichtsmodul zu $\widehat{\mathcal{G}}$ mit zentraler Ladung \mathbf{c} mit $\mathbf{c} + k \neq 0$, dann definiert die Sugawara-Konstruktion eine Darstellung der zentralerweiterten Vektorfeldalgebra $\widehat{\mathcal{L}}$, gemäß Theorem 11.7. bzw. 11.17*

Theorem 12.8. *Die Voraussetzungen seien wie in Prop. 12.7. Sei v der Höchstgewichtsvektor des Höchstgewichtsmodul V , dann ist der Sugawara-Modul $W = U(\widehat{\mathcal{L}})v$ mit der Graduierung gegeben durch V ein Höchstgewichtsmodul der Algebra $\widehat{\mathcal{L}}$. Dies gilt unabhängig von der gewählten Normalordnung. Für die zentrale Ladung $\mathbf{c}_{\widehat{\mathcal{L}}}$ von W als $\widehat{\mathcal{L}}$ -Moduln gilt*

$$\mathbf{c}_{\widehat{\mathcal{L}}} = \frac{\mathbf{c} \cdot \dim \mathfrak{g}}{\mathbf{c} + k} . \quad (12-7)$$

Hierbei ist \mathbf{c} die zentrale Ladung (oder der Level) von V als $\widehat{\mathcal{G}}$ -Modul.

Beweis. Die Aussagen über das Verschwinden der Elemente vom Grad $> \deg(v)$ ist automatisch, ebenso die Bedingung der Eindimensionalität. Ebenso operiert das zentrale Element als ein Vielfaches der Identität. Wir haben zu zeigen, daß W ein beinahe-graduierter $\widehat{\mathcal{L}}$ -Modul ist und daß die Bedingung (3) aus Def. 12.2 erfüllt ist. Hierzu sind, je nach Wert von K und L , Fallunterscheidungen nötig. Es sei hier nur $K = L = 1$ ausgeführt, die anderen Fälle sind vollständig analog. Es seien die L_k^* die Moden des Sugawaraoperators (11-19). Per Definition ist L_k^*v bis auf Multiplikation mit einem Skalar gegeben als

$$w := \sum_{n,m} \sum_i l_k^{mn} :u_i(m)u^i(n): v . \quad (12-8)$$

Wegen der Summation über i (siehe Lemma 11.2(3)) erhalten wir

$$\sum_i l_k^{mn} u_i(m)u^i(n)v = \sum_i l_k^{mn} u^i(n)u_i(m)v - \dim \mathfrak{g} \gamma_{mn} l_k^{mn} v .$$

Aus $\gamma_{mn} l_k^{mn} \neq 0$ folgt aber $-3g \leq k \leq 0$. Damit ist für k außerhalb dieses Bereichs die Reihenfolge von (m, n) ohne Bedeutung. Insbesondere können wir

immer die Reihenfolge nehmen, die der Normalordnung entspricht. Ebenso folgt aus $l_k^{nm} \neq 0$ auch $-g \leq k - (n + m) \leq 0$. Damit ist für $k > 0$ entweder $n > 0$ oder $m > 0$ für die Terme mit $l_k^{nm} \neq 0$. Dadurch und mit Def. 12.5(3) erhalten wir $L_k^* v = 0$ in diesem Fall und somit $\widehat{\mathcal{L}}_+ v = 0$. Für $k < -3g$ sehen wir, daß nur Paare (n, m) mit $n, m \leq 0$ auftreten werden. Wiederum folgt aus $l_k^{nm} \neq 0$ die Ungleichung $(n + m) < -2g$. Dies kann nur der Fall sein falls n oder m kleiner als $-g$ sind. Damit hat (mit Def. 12.5(3)) der resultierende Vektor $\sum_i u_i(m) u^i(n) v$ nur Elemente vom Grad $< \deg v$. Daraus folgt die Behauptung (3). Die analogen Abschätzungen funktionieren auch in Bezug auf die untere Schranke für den Grad der auftretenden Elemente. Hierbei benutzen wir, daß V ein beinahe-graduierter $\widehat{\mathcal{G}}$ -Modul ist. Dies bedeutet: Der durch v erzeugte $\widehat{\mathcal{L}}$ -Modul ist beinahe-graduiert. Beachte :...: durfte eine beliebige Normalordnung sein. Die Aussage über die zentrale Ladung ergibt sich aufgrund von Theorem 11.7, bzw. 11.17. \square

Für die Korrespondenz zwischen den zentralen Ladungen der Darstellungen macht die Sugawara-Konstruktion direkte Aussagen. Es erhebt sich sofort die Frage ob es eine entsprechende Beziehung zwischen den Gewichten gibt. Diese soll im nächsten Teilabschnitt angegangen werden.

(b) Die Gewichte der Sugawara-Darstellung

Die in diesem und im nächsten Teilabschnitt dargestellten Resultate sind in gemeinsamer Arbeit mit Oleg K. Sheinman erzielt worden. Sie sind im wesentlichen [K] entnommen (bis auf die Erweiterung auf die Mehrpunktsituation).

Da V nur ein beinahe-graduierter $\widehat{\mathcal{A}}$ -Modul ist, kann, wie man (12-8) entnehmen kann, v auch dann im Resultat von $L_k^* v$ auftreten, wenn $k < 0$ ist. Von Sheinman [182],[183],[184] stammt die Idee dieses Problem dadurch in den Griff zu kriegen, daß man statt des führenden Gewichts, das totale Gewicht betrachtet. In der Tat hatte er auch noch andere Gründen diese Verallgemeinerung durchzuführen. Einer dieser Gründe war die Zuordnung eines natürlichen Differentials zu dem totalen Gewicht.

Definition 12.9. [Sheinman] Gegeben sei die 2-Punktsituation. (a) Sei V ein $\widehat{\mathcal{G}}$ -Höchstgewichtsmodule. Das (*totale*) Gewicht oder *Sheinman-Gewicht* ist das Element $\chi = (\chi_0, \chi_{-1}, \dots, \chi_{-g}) \in (\mathfrak{h}^*)^{g+1}$, mit

$$h(m)v = \chi_m(h)v + \dots, \quad \forall m \in \{0, -1, \dots, -g\}, \quad \forall h \in \mathfrak{h}. \quad (12-9)$$

Das zugehörige \mathfrak{h}^* -wertige *Gewichtsdifferential* ist definiert als

$$\omega_\chi = \sum_{m=-g}^0 \chi_m \cdot \omega^m . \quad (12-10)$$

(b) Sei V ein $\widehat{\mathcal{L}}$ -Höchstgewichtsmodul. Das (*totale*) *Gewicht* oder *Scheinman-Gewicht* ist das Element $\lambda = (\lambda_0, \lambda_{-1}, \dots, \lambda_{-3g}) \in \mathbb{C}^{3g+1}$ mit

$$E_m v = \lambda_m v + \dots, \quad \forall m = 0, -1, \dots, -3g .$$

Das zugehörige *Gewichtsdifferential* Λ ist definiert als

$$\Lambda = \sum_{k=-3g}^0 \lambda_k \Omega^k, \quad (12-11)$$

Hierbei sind die ω^k bzw. Ω^k die Basiselemente des Raumes \mathcal{F}^1 , bzw. \mathcal{F}^2 wie sie in Abschnitt 9 eingeführt wurden. Es sei daran erinnert, daß die ω^k dual zu den A_k und die Ω^k dual zu den e_k sind. Die Differentiale $\omega^k, k = -g, \dots, -1, 0$ spannen den Raum der Differentiale von M auf, die maximal Pole erster Ordnung bei P_\pm haben. Im klassischen Fall fallen totales Gewicht und führendes Gewicht zusammen. Die entsprechende Verallgemeinerung auf die Mehrpunktsituation ist wie folgt.

Definition 12.10. Gegeben sei die Mehrpunktsituation. Sei V ein $\widehat{\mathcal{G}}$ - oder $\widehat{\mathcal{L}}$ -Höchstgewichtsmodul. mit Höchstgewichtsvektor v und zentraler Ladung \mathbf{c} . Es gilt somit $V = \bigoplus_{n=-\infty}^{\deg(v)} V_n$. Es sei $P : V \rightarrow V_{\deg(v)}$, die Projektion auf den eindimensionalen Unterraum von höchstem Grad.

(a) Im Fall, daß V ein $\widehat{\mathcal{G}}$ -Modul ist, ist das totale Gewicht die lineare Abbildung

$$\chi : \widehat{\mathcal{A}}_{(0)} \rightarrow \mathfrak{h}^*, \quad f \mapsto \chi(f) \quad \text{für } f \in \mathcal{A}_{(0)}, \quad t \mapsto \chi(t) = \mathbf{c} \quad (12-12)$$

definiert durch

$$P(h(f)v) = (\chi(f)(h))v . \quad (12-13)$$

Das zugehörige h^* -wertige *Differential* ist definiert als

$$\omega_\chi = \sum_{m=-R_1}^0 \sum_{p=1}^K \chi(A_{m,p}) \omega^{m,p} . \quad (12-14)$$

(b) Im Fall, daß V ein $\widehat{\mathcal{L}}$ -Modul ist, ist das totale Gewicht die lineare Abbildung

$$\lambda : \widehat{\mathcal{L}}_{(0)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad e \mapsto \lambda(e) \quad \text{für } e \in \mathcal{L}_{(0)}, \quad t \mapsto \lambda(t) = \mathbf{c} \quad (12-15)$$

definiert durch

$$P(e v) = \lambda(e) \cdot v . \quad (12-16)$$

Das zugehörige quadratische Differential ist definiert als

$$\Lambda = \sum_{m=-R_3}^0 \sum_{p=1}^K \lambda(e_{m,p}) \Omega^{m,p} . \quad (12-17)$$

Die Abbildungen χ und λ können auf ganz $\widehat{\mathcal{A}}$, bzw. $\widehat{\mathcal{L}}$ trivial fortgesetzt werden. Da die Basiselemente $A_{n,k}$ dual zu den Basiselementen $\omega^{k,n}$ sind, bzw. $e_{n,k}$ dual zu $\Omega^{k,n}$, verifiziert man direkt

Proposition 12.11. *Die Gewichtsdifferentiale (12-14) bzw. (12-17) sind unabhängig von der gewählten Basis in \mathcal{F}_n^λ , $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposition 12.12. *Sei T der Sugawara-Operator (bzw. der Energie-Impuls-Tensor) wie in (11-6) eingeführt, dann gilt*

$$T.v = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \Lambda \cdot v + \dots . \quad (12-18)$$

Beachte $T.v$ ist eine formale Summe. Zerlegen wir diese aber in seine homogenen Teile in Bezug auf den Grad in V , dann sind die Komponenten wohldefinierte Elemente von $V \otimes \mathcal{F}^2$ (\mathcal{F}^2 ist der Raum der quadratischen Differentiale). Die Gleichung (12-18) sollte in diesem Sinne interpretiert werden.

Beweis von Prop 12.12. Aufgrund von Theorem 12.8 gilt $L_{k,p}v = 0$ für $k > 0$ somit

$$T.v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_p \Omega^{k,p} L_{k,p}v = \sum_{k \leq 0} \sum_p \Omega^{k,p} L_{k,p}v .$$

Andererseits gilt $\deg(L_{k,p}v) < \deg(v)$ für $k < -R_3$, somit (mit $L_{k,p} = -(\mathbf{c} + \mathbf{k})L_{k,p}^*$)

$$(T.v)_{h.D.} = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_{k=-R_3}^0 \Omega^{k,p} L_{k,p}^*v = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_{k=-R_3}^0 \Omega^{k,p} \lambda(e_{k,p})v = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \Lambda \cdot v . \quad \square$$

Im folgenden sei lediglich die 2-Punktsituation (für beliebiges Geschlecht) betrachtet. Die Verallgemeinerung der folgenden Resultate auf die Mehrpunktsituation dürfte aber keine großen Probleme aufwerfen. Es sei eine Normalordnung fixiert.

Definition 12.13. Ein $\widehat{\mathcal{G}}$ -Höchstgewichtsmodul zusammen mit der Normalordnung $:\dots$ ist von *eingeschränktem Typ* oder *Sheinman-Typ* falls gilt

$$:h(m)h'(n): v = \chi_m(h)\chi_n(h')v + \dots \quad \forall n, m \in \{-g, \dots, 0\}, \forall h, h' \in \mathfrak{h}. \quad (12-19)$$

Die in [K] eingeführten Bedingungen über die vergleichbare beinahe-graduierte Struktur sind nicht notwendig. Was im wesentlichen davon gebraucht wird, ist die Bedingung $\deg(\widehat{\mathcal{G}}_- v) < \deg v$, und diese ist bereits in die Definition 12.5 aufgenommen.

In diesem Abschnitt seien die folgenden Klassen von Normalordnungen Σ vorausgesetzt. Sei Σ^\pm die Zerlegung des zweidimensionalen Gitters $\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ in zwei disjunkte Teile derart, daß Σ^\pm sich von

$$\Sigma_0^\pm = \{(m, n) \mid m \leq n \text{ (bzw. } m > n), m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (12-20)$$

nur für $-g \leq m, n \leq 0$ unterscheidet. Durch die Vorgabe

$$:x(m)y(n): := \begin{cases} x(m)y(n), & (m, n) \in \Sigma^+ \\ y(n)x(m), & (m, n) \in \Sigma^- \end{cases} \quad (12-21)$$

für alle $x, y \in \mathfrak{g}$, und jedes Paar (m, n) , erhält man eine Normalordnung. Es sei Σ die durch diese Zerlegung gegebene Normalordnung. Zur weiteren Referenz sei fixiert

$$\Sigma_{cs}^\pm := \Sigma^\pm \cap \{(m, n) \mid -g \leq m, n \leq 0, m, n \in \mathbb{Z}\}. \quad (12-22)$$

Mit Σ_0 sei die Normalordnung bezeichnet, die durch (12-20) induziert wird.

Allgemeinere Normalordnungen mit der einzigen Einschränkung, daß sie sich von Σ_0 nur für endlich viele Paare (m, n) unterscheiden, sind möglich. Diese würden keine wesentlichen Schwierigkeiten machen. Lediglich die folgenden Gleichungen würden etwas komplizierte aussehen.

Warnung. Für abelsches \mathfrak{g} spielt die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Normalordnungspunkte keine Rolle, d.h. $:x(n)y(m): = :y(m)x(n):$. Für nichtabelsches \mathfrak{g} ist dies nur richtig für die Elemente der Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} .

Wir schauen uns die entsprechende Darstellung von $L_k^* v$ in (12-8) an. Für $-3g \leq k \leq 0$ sehen wir, daß mit der Normalordnung vom betrachteten Typ der $\deg v$ -Teil von L_k^* lediglich von

$$L_k^* v = \alpha \sum_{-g \leq m, n \leq 0} \sum_i l_k^{mn} :u_i(m)u^i(n): v + \dots \quad (12-23)$$

kommen wird. Hierbei haben wir die Bedingung (3) aus der Definition der Höchstgewichtsdarstellung zu benutzen. Sei etwa das Paar (m, n) mit $n < -g$ und $m \geq -g$ gegeben, dann gilt aufgrund der Normalordnung

$$:u_i(m)u^i(n): = u^i(n)u_i(m)v = u_i(n)\beta v \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{C}.$$

Da $n < -g$ besitzt das Element einen Grad kleiner als den Grad von v . Für allgemeinere Normalordnungen wird ein zusätzlicher Term $M(k, \Sigma)v$ auftreten. Hierbei ist $M(k, \Sigma)$ ein Skalar, der von der Normalordnung abhängt.

Es gilt per Definition

$$L_k^* v = \lambda_k v + \dots, \quad \text{für } k = 0, -1, \dots, -3g \quad (12-24)$$

mit gewissen $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Der Vektor $\lambda = (\lambda_0, \lambda_{-1}, \dots, \lambda_{-3g})$ mit den λ_i ist das Gewicht der Sugawara-Darstellung. Es sei Λ das zugeordnete quadratische Differential. Das folgende Theorem beantwortet die Frage über die Beziehung der Gewichte der beteiligten Darstellungen. Der entsprechende Satz für den weniger komplizierten Fall der Algebren vom Heisenberg-Typ (der abelschem \mathfrak{g} entspricht) wurde von Sheinman in [186] gezeigt. Die duale Bilinearform auf \mathfrak{h}^* sei mit $\langle \dots, \dots \rangle$ bezeichnet.

Theorem 12.14. *Sei χ das totale Gewicht des $\widehat{\mathcal{G}}$ -Moduls V . Es sei $\mathfrak{c} + \mathfrak{k} \neq 0$ und sei V mit einer Normalordnung versehen derart, daß der Modul vom Sheinman-Typ ist (Def. 12.13). Sei Σ eine Normalordnung und Λ das Gewicht der zugeordneten Sugawara-Darstellung der Algebra $\widehat{\mathcal{L}}$. Dann gilt*

$$\Lambda = \frac{-1}{\mathfrak{c} + \mathfrak{k}} \sum_{-g \leq m, n \leq 0} \left(\frac{1}{2} \langle \chi_m, \chi_n \rangle + \sum_{-g \leq s \leq 0} \alpha_{mn}^s \langle \chi_s, \bar{\rho} \rangle - \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{c} \gamma_{[mn]} \right) \omega^m \omega^n \quad (12-26)$$

und

$$\Lambda = \frac{-1}{\mathfrak{c} + \mathfrak{k}} \sum_{-g \leq m, n \leq 0} \left(\frac{1}{2} \langle \chi_m, \chi_n \rangle + \sum_{-g \leq s \leq 0} \alpha_{mn}^s \langle \chi_s, \bar{\rho} \rangle \right) \omega^m \omega^n + K(\Sigma), \quad (12-27)$$

mit

$$K(\Sigma) := \frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{c}}{\mathfrak{c} + \mathfrak{k}} \cdot \left(\sum_{(m,n) \in \Sigma_{\mathfrak{c}s}^+} - \sum_{(m,n) \in \Sigma_{\mathfrak{c}s}^-} \right) \gamma_{mn} \omega^m \omega^n .$$

Hierbei sind die α_{mn}^s die Strukturkonstanten der assoziativen Algebra \mathcal{A} die durch (9-38) gegeben werden, $\gamma_{[mn]} := \pm \gamma_{mn}$ falls $(m, n) \in \Sigma^\pm$, $2\bar{\rho} = \sum_{\alpha > 0} \alpha$ ist die Summe über die positiven Wurzeln und \mathfrak{p} ist die Anzahl der positiven Wurzeln, d.h. $\mathfrak{p} = 1/2(\dim \mathfrak{g} - \text{rank } \mathfrak{g})$.

Für die Normalordnung Σ mit $\Sigma_{\mathfrak{c}s}^+$ (oder $\Sigma_{\mathfrak{c}s}^-$) $\subseteq \{(m, n) \mid -g \leq m, n \leq 0\}$ erhalten wir $K(\Sigma) = 0$.

Beweis. Aufgrund Prop. 12.12 genügt es den Beitrag des Terms höchsten Grads in der Zerlegung von $T.v$ zu betrachten. Hierbei ist T gegeben durch (11-6). Wegen (12-23) gilt $:u_i(m)u^i(n): v$ eine nichtverschwindende Projektion auf $\mathbb{C}v$ lediglich falls $-g \leq n, m \leq 0$ ist. Somit gilt

$$T.v = \left(\frac{1}{2} \sum_{-g \leq m, n \leq 0} \sum_i :u_i(m)u^i(n): \omega^m \omega^n \right) v + \dots \quad (12-28)$$

Für den Rest des Beweises sei $-g \leq m, n \leq 0$. Als Basis in \mathfrak{g} wählen wir die "kanonische Basis". Wir wählen h_k , $k = 1, \dots, \text{rank } \mathfrak{g}$ für die Cartan-Unteralgebra und h^k , $k = 1, \dots, \text{rank } \mathfrak{g}$ die duale Basis in Bezug auf die invariante Form $(\cdot | \cdot)$. Für die positiven Wurzeln α wählen wir die Basiselemente x_α und nehmen als duale $x_{-\alpha}$, die reskalierten Elemente der zugehörigen negativen Wurzel (d.h. $(x_\alpha | x_{-\alpha}) = 1$). In Bezug auf diese Basis $(h_k, x_\alpha, x_{-\alpha})$ gilt

$$\sum_i u_i(m)u^i(n) = \sum_{\alpha > 0} \left(x_\alpha(m)x_{-\alpha}(n) + x_{-\alpha}(m)x_\alpha(n) \right) + \sum_k h_k(m)h^k(n). \quad (12-29)$$

Hierbei läuft $k = 1, \dots, \text{rank } \mathfrak{g}$ und α über alle positiven Wurzeln. Mit Hilfe der Strukturgleichung von $\widehat{\mathcal{G}}$ können wir schreiben

$$\begin{aligned} x_\alpha(m)x_{-\alpha}(n) &= x_{-\alpha}(n)x_\alpha(m) + [x_\alpha(m), x_{-\alpha}(n)] = \\ &= x_{-\alpha}(n)x_\alpha(m) + \sum_s \alpha_{mn}^s h_\alpha(s) - \gamma_{mn} \cdot t, \end{aligned} \quad (12-30)$$

wobei $h_\alpha := [x_\alpha, x_{-\alpha}]$ und die γ_{mn} durch (11-12) definiert sind. Wir ersetzen die Summanden in (12-29) an der ersten Stelle durch (12-30). Wegen (12-6) gilt

$(x_{-\alpha}(m)x_{\alpha}(n))v = 0 \cdot v + \dots$. Somit bleiben lediglich

$$\sum_i u_i(m)u^i(n)v = \left(\sum_k h_k(m)h^k(n) + \sum_s \sum_{\alpha>0} \alpha_{mn}^s h_{\alpha}(s) - \mathfrak{p} \cdot \gamma_{mn} t \right) v + \dots \quad (12-31)$$

Falls $(m, n) \in \Sigma_{cs}^+$ ist, ist dies bereits normal geordnet. Beachte, daß $h_{\alpha}(s)v$ nur für $-g \leq s \leq 0$ eine v -Komponente haben kann. Mit (12-19) und Def. 12.5(3) erhalten wir

$$\sum_i u_i(m)u^i(n)v = \left(\sum_k \chi_m(h_k)\chi_n(h^k) + \sum_{s=-g}^0 \sum_{\alpha>0} \alpha_{mn}^s \chi_s(h_{\alpha}) - \mathfrak{p} \cdot \gamma_{mn} \mathfrak{c} \right) v + \dots \quad (12-32)$$

Für die Paare $(m, n) \in \Sigma_{cs}^-$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_i :u_i(m)u^i(n): v &= \sum_i u^i(n)u_i(m)v \\ &= \left(\sum_k :h_k(m)h^k(n): + \sum_s \sum_{\alpha>0} \alpha_{nm}^s h_{\alpha}(s) - \mathfrak{p} \cdot \gamma_{nm} t \right) v + \dots \\ &= \left(\sum_k \chi_m(h_k)\chi_n(h^k) + \sum_{s=-g}^0 \sum_{\alpha>0} \alpha_{mn}^s \chi_s(h_{\alpha}) + \mathfrak{p} \cdot \gamma_{mn} \mathfrak{c} \right) v + \dots, \end{aligned} \quad (12-33)$$

Hierbei haben wir $\alpha_{mn}^s = \alpha_{nm}^s$ und $\gamma_{mn} = -\gamma_{nm}$ benutzt.

Wir benutzen

$$\sum_k \chi_m(h_k)\chi_n(h^k) = \langle \chi_m, \chi_n \rangle, \quad \chi_s(h_{\alpha}) = \langle \chi_s, \alpha \rangle, \quad \text{and} \quad \sum_{\alpha>0} \alpha =: 2\bar{\rho} \quad (12-34)$$

in (12-32) und (12-33) und erhalten nach Summation über n und m

$$\begin{aligned} Tv &= \left(\frac{1}{2} \sum_{-g \leq m, n \leq 0} \sum_i :u_i(m)u^i(n): \omega^m \omega^n \right) v + \dots \\ &= \sum_{-g \leq m, n \leq 0} \left(\frac{1}{2} \langle \chi_m, \chi_n \rangle + \sum_{-g \leq s \leq 0} \alpha_{mn}^s \langle \chi_s, \bar{\rho} \rangle - \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{c} \gamma_{[mn]} \right) \omega^m \omega^n v + \dots \\ &= \sum_{-g \leq m, n \leq 0} \left(\frac{1}{2} \langle \chi_m, \chi_n \rangle + \sum_{-g \leq s \leq 0} \alpha_{mn}^s \langle \chi_s, \bar{\rho} \rangle \right) \omega^m \omega^n v - (\mathfrak{c} + \mathfrak{k})K(\Sigma)v + \dots \end{aligned} \quad (12-35)$$

Nachdem Division durch $-(\mathfrak{c} + \mathfrak{k})$, erhalten wir die Gleichungen (12-26) und (12-27). Für die spezielle Normalordnung Σ im Theorem haben wir $\Sigma_{cs}^- = \emptyset$ und Σ_{cs}^+ ist das

volle Quadrat. Für (m, n) mit $m \neq n$ wird auch das Paar (n, m) auftauchen. Da $\gamma_{nm} = -\gamma_{mn}$, werden die entsprechenden Terme sich aufheben. γ_{mm} verschwindet immer. Damit gilt $K(\Sigma) = 0$. Dasselbe gilt wenn wir die Rolle von Σ_{cs}^+ und Σ_{cs}^- vertauschen. \square

Allgemeinere Normalordnungen werden den Summationsbereich in der Definition von $K(\Sigma)$ ändern.

Beispiel 12.15. Sei $g = 0$. Dann spezialisiert (12-27) zu

$$\Lambda = \frac{-1}{c+k} \left(\frac{1}{2} \langle \chi_0, \chi_0 \rangle + \langle \chi_0, \bar{\rho} \rangle \right) (\omega^0)^2 \quad (12-36)$$

mit $\omega^0 = \frac{1}{z} dz$. In diesem Fall verschwindet $K(\Sigma)$ immer. Bis auf den Faktor $\frac{-1}{2(c+k)} (\omega^0)^2$ stimmt dieser Ausdruck mit den Eigenwerten des Casimir-Operators von zweiter Ordnung für \mathfrak{g} überein. (Siehe hierzu den nächsten Teilabschnitt.)

Beispiel 12.16. Ist \mathfrak{g} abelsch, so verschwinden sowohl ρ als auch $\bar{\rho}$. Es bleibt als Gewicht

$$\Lambda = \frac{-1}{2c} \sum_{-g \leq m, n \leq 0} \langle \chi_m, \chi_n \rangle \omega^m \omega^n = \frac{-1}{2c} \langle \omega_\chi, \omega_\chi \rangle, \quad (12-37)$$

wenn $\langle \omega_\chi, \omega_\chi \rangle$ in der offensichtlichen Weise definiert ist. Dies ist (bis auf eine verschiedene Normierung) die Formel, wie sie von Sheinman [186] erhalten wurde.

(c) Der Casimir-Operator und seine Eigenwerte

Die klassische Sugawara-Konstruktion steht im engen Zusammenhang mit den Casimir-Operatoren der affinen Kac-Moody-Algebren. In diesem Teilabschnitt wird der Zugang von [126] verallgemeinert. Wir erhalten für beliebige Krichever-Novikov-Algebren vom affinen Typ Casimir-Operatoren und unter gewissen Annahmen auch deren Eigenwerte. Auch hier handelt es sich die Resultate einer gemeinsame Arbeit mit Sheinman [K], bzw. deren Mehrpunktverallgemeinerung.

Die affine Algebra $\widehat{\mathcal{G}}$ sei durch Adjunktion eines beliebigen, aber dann fixierten, Vektorfeldes $e \in \mathcal{L}$ zur Algebra $\widehat{\mathcal{G}}^e$, wie in Abschnitt 10 ausgeführt, erweitert. Der

Grad von e so gewählt, daß $e \in \widehat{\mathcal{G}}_{(0)}^e$ ist. Das Vektorfeld sei als $e = \sum_{k,r} \varepsilon^{k,r} e_{k,r}$ zerlegt. Sei V ein $\widehat{\mathcal{G}}$ -Höchstgewichtsmodul mit $(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \neq 0$, der auch ein $\widehat{\mathcal{G}}^e$ -Modul ist. Definiert man das dem Operator e zugeordnete Gewicht $\lambda_e \in \mathbb{C}$ durch

$$e \cdot v = \lambda_e v + \dots, \quad (12-38)$$

so handelt es sich automatisch um einen $\widehat{\mathcal{G}}^e$ -Höchstgewichtsmodul (in der offensichtlichen Verallgemeinerung der Definition). Unter einem *Casimir-Operator* des $\widehat{\mathcal{G}}^e$ -Moduls V sei ein Operator von V verstanden, der mit allen Operatoren, die von der $\widehat{\mathcal{G}}^e$ -Aktion herkommen, vertauscht.

Theorem 12.17. *Sei $e = \sum_{k,r} \varepsilon^{k,r} e_{k,r}$ das zur Definition von $\widehat{\mathcal{G}}^e$ benutzte Vektorfeld. Sei die endlichdimensionale Lie-Algebra \mathfrak{g} entweder einfach oder abelsch. Sei V ein zulässiger Modul von $\widehat{\mathcal{G}}^e$ und $L = \sum_{k,p} \varepsilon^{k,p} L_{k,p}$ die entsprechende Linearkombination der Sugawara-Operatoren $L_{k,p}$ aus Abschnitt 11, dann ist*

$$\Omega := 2L + 2(\mathbf{c} + \mathbf{k})e \quad (12-39)$$

ein Casimir-Operator von $\widehat{\mathcal{G}}^e$ für den Modul V . Die Zahl \mathbf{c} ist die zentrale Ladung (d.h. $t.v = \mathbf{c} \cdot v$) und \mathbf{k} ist die duale Coxeter-Zahl (bzw. 0 im abelschen Fall) die in Lemma 11.2. eingeführt wurde, wobei $\mathbf{c} + \mathbf{k} \neq 0$ vorausgesetzt sei.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß Ω mit allen anderen Operatoren von $\widehat{\mathcal{G}}^e$ kommutiert.

(1) Wir haben $[e, x(n, p)] = x(\nabla_e A_{n,p})$. Andererseits folgt aus Prop 11.5 bzw. Prop 11.14

$$\begin{aligned} [L, x(n, p)] &= -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_{k,r} \varepsilon^{k,r} [L_{k,r}, x(n, p)] = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_{k,r} \varepsilon^{k,r} x(\nabla_{e_{k,r}} A_{n,p}) \\ &= -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) x(\nabla_e A_{n,p}). \end{aligned}$$

Damit $[\Omega, x(n, p)] = 0$.

(2) Es bleibt zu zeigen $[\Omega, e] = 0$. Zuerst möchte ich $[e, L_{k,r}]$ berechnen. Wegen der Linearität der Lie-Ableitung und wegen (10-48) erfüllt der Operator $E := -(\mathbf{c} + \mathbf{k})e$ die Relation

$$[E, x(n, p)] = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) x(\nabla_e A_{n,p}) = [L, x(n, p)].$$

Aus dem Korollar 11.13, bzw. dessen offensichtlicher Mehrpunktverallgemeinerung, folgt $[L_k, E] = [L_k, L]$. Es gilt also

$$-(\mathbf{c} + \mathbf{k})[L, e] = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_{k,r} \varepsilon^{k,r} [L_{k,r}, e] = \sum_k \varepsilon^{k,r} [L_{k,r}, L] = [L, L] = 0 .$$

Da $(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \neq 0$ bedeutet dies $[L, e] = 0$ und weiter $[\Omega, e] = 0$. \square

Bemerkung. Im "kritischen Fall" $\mathbf{c} + \mathbf{k} = 0$ gilt

$$[L_{k,r}, x(n, p)] = 0 .$$

Fassen wir V als $\widehat{\mathcal{G}}$ -Modul auf, so vertauschen die $L_{k,p}$ bereits mit allen Operatoren in $gl(V)$ die von der Aktion herkommen.

Wir wollen die Eigenwerte der Casimir-Operatoren betrachten. Im klassischen (Geschlecht Null) Fall operiert ein Casimir-Operator als Multiplikation mit einem Skalar auf dem Höchstgewichtsmodul. Die übliche Argumentationskette ist, daß der Höchstgewichtsvektor v aus Gradgründen ein Eigenvektor des Casimir-Operators ist: $\Omega v = \lambda v$ [126]. Jedes andere Element des Moduls kann dargestellt werden in der Form $w = uv$, mit u aus der universellen einhüllenden Algebra (siehe Def. 12.5 (1)). Da Ω mit u vertauscht, hat man $\Omega w = \Omega uv = u\Omega v = \lambda uv = \lambda w$. Dieses Argument ist im beinahe-graduierten Fall nicht zulässig. Im allgemeinen hat die Frage, ob Ω überhaupt einen Eigenvektor besitzt, keine offensichtliche Antwort.

Im Fall, daß der Höchstgewichtsvektor v ein Eigenvektor des Casimir-Operators Ω ist, kann man wie oben schließen, daß Ω wie ein Skalar operiert.

Proposition 12.18. *Es sei der 2-Punktfall betrachtet. Sei $\varepsilon^k = 0$ für $k < -g$ oder $k > 0$. Operiere der Casimir-Operator Ω , gegeben durch (12-39), in der Höchstgewichtsdarstellung vom Sheinman-Typ und Gewicht $\chi = (\chi_0, \chi_{-1}, \dots, \chi_{-g})$ (und $\mathbf{c} + \mathbf{k} \neq 0$) als Multiplikation mit einer Konstanten λ_Ω . Dann gilt für diese Konstante*

$$\lambda_\Omega = \sum_{k,m,n} \varepsilon^k l_k^{mn} (\langle \chi_m, \chi_n \rangle + 2 \sum_s \alpha_{mn}^s \langle \chi_s, \bar{\rho} \rangle - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \gamma_{[mn]}) + 2(\mathbf{c} + \mathbf{k})\lambda_e . \quad (12-40)$$

Hier seien alle Summationsbereiche über $-g, \dots, -1, 0$. Der Term mit $\gamma_{[mn]}$ verschwindet, falls eine Normalordnung Σ vorliegt mit $K(\Sigma) = 0$.

Beweis. Es folgt aus Theorem 12.14, daß die folgende Relation für die Gewichte der Sugawara-Darstellung gilt:

$$-(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \cdot 2\Lambda = \sum_{m,n} \left(\langle \chi_m, \chi_n \rangle + 2 \sum_s \alpha_{mn}^s \langle \chi_s, \bar{\rho} \rangle - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \gamma_{[mn]} \right) \omega^m \omega^n. \quad (12-41)$$

Auf der linken Seite benützen wir die Definition (12-11) $\Lambda = \sum_{k=-3g}^0 \lambda_k \Omega^k$ und auf der rechten Seite $\omega^m \omega^n = \sum l_k^{mn} \Omega^k$ (siehe (11-8)). Durch den Vergleich beider Seiten erhalten wir

$$-(\mathbf{c} + \mathbf{k}) 2\lambda_k = \sum_{m,n} l_k^{mn} \left(\langle \chi_m, \chi_n \rangle + 2 \sum_s \alpha_{mn}^s \langle \chi_s, \bar{\rho} \rangle - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \gamma_{[mn]} \right). \quad (12-42)$$

Aus der Definition von $\Omega = 2L + 2(\mathbf{c} + \mathbf{k})e$ mit $L = \sum_k \varepsilon^k L_k = -(\mathbf{c} + \mathbf{k}) \sum_k \varepsilon^k L_k^*$ erhalten wir $\Omega v = \lambda_\Omega v$, wobei λ_Ω durch den Ausdruck (12-40) gegeben ist. \square

Wiederum können für allgemeinere Normalordnungen Σ explizite Korrekturterme gegeben werden.

Beispiel 12.19. Sei $g = 0$. Die einzigen zulässigen Werte von k, m, n sind $k = m = n = 0$ und wir haben $l_0^{00} = \alpha_{00}^0 = 1$ und $\gamma_{00} = 0$. Setzen wir $e = z \frac{d}{dz} = d$ (d.h. $\varepsilon^0 = 1$), dann spezialisiert sich das Resultat von Prop 12.18 zu

$$\lambda_\Omega = \langle \chi_0 + 2\bar{\rho}, \chi_0 \rangle + 2(\mathbf{c} + \mathbf{k})\lambda_e. \quad (12-43)$$

Dies kann man in Einklang mit [126, Prop.10.2] umschreiben zu

$$\lambda_\Omega = \langle \tilde{\chi} + 2\rho, \tilde{\chi} \rangle.$$

Hierbei ist $\tilde{\chi}$ die dort verwendete Definition des Gewichts (umfaßt die zentrale Ladung und das Vektorfeld d) und ρ die Summe der Fundamentalgewichte für die affine Lie-Algebra $\widehat{\mathcal{G}}^e$.

13. Semi-infinite Wedgeprodukte und $\mathfrak{b} - \mathfrak{c}$ -Systeme

(a) Semi-infinite Wedgeprodukte

Neben der Sugawara-Konstruktion ist eine weitere wichtige Methode um Höchstgewichtsdarstellungen der Witt-, bzw. der Virasoro-Algebra zu erhalten, die Darstellung mit Hilfe der semi-infiniten Wedgeformen (siehe [126, p.35] für eine pädagogische Einführung). In Physikersprechweise handelt es sich hierbei um die "Fermionische Fock-Darstellung". Bei der Konstruktion dieser Darstellungen geht man von der Aktion der Witt-Algebra auf den Formen eines festen Gewichtes aus. Will man diese Aktion auf die daraus gebildeten, semi-infiniten Wedgeformen fortsetzen, so müssen die entsprechenden Operatoren "regularisiert"¹ werden damit sie wohldefiniert sind. Durch diese Regularisierung handelt es sich allerdings nur noch um eine projektive Lie-Darstellung. Erst durch den Übergang zu der zentralen Erweiterung der Witt-Algebra, der Virasoro-Algebra, erhält man wiederum eine Lie-Darstellung.

Die Verallgemeinerung dieser Konstruktion auf höheres Geschlecht und mehrere Polstellen möchte ich im folgenden darstellen. Auch möchte ich allgemeiner die Algebren der Funktionen \mathcal{A} , der Vektorfelder \mathcal{L} und der Differentialoperatoren 1. Grads \mathcal{D}^1 (bzw. sogar die Algebren der Differentialoperatoren beliebigen Grads) betrachten. Soweit es sich um Resultate, die in [H] erzielt wurden, handelt, werde ich mich auf deren kurze Darstellung beschränken. Falls nichts anderes gesagt wird, können die Beweise und zusätzliche Informationen dort gefunden werden.

Sei \mathcal{F}^λ der Modul der Formen vom Gewicht λ . Der Vektorraum \mathcal{H}^λ der semi-infiniten Wedgeprodukte vom Gewicht λ ist der Vektorraum erzeugt von den formalen Elementen

$$\psi = f_{i_1, p_1} \wedge f_{i_2, p_2} \wedge \cdots \wedge f_{m, 1} \wedge f_{m, 2} \cdots \wedge f_{m, K} \wedge f_{m+1, 1} \wedge \cdots \quad (13-1)$$

¹dies ist Physikersprechweise

Es sei λ festgehalten und die $f_{n,p} = f_{n,p}^\lambda$ die Basiselemente, wie sie in Abschnitt 9 eingeführt wurden. Die Multiindizes seien in strikt aufsteigender lexikographischer Ordnung angeordnet. Desweiteren sei gefordert, daß, beginnend mit einem Index (m, p) (darf von ψ abhängen), alle Indizes (m', p') mit $(m', p') > (m, p)$ auftreten. Siehe etwa [126] zu dieser Definition. (Warnung: Dieses Wedgeprodukt hat nichts mit dem Wedgeprodukt der Differentialformen zu tun.) Die Definition von \mathcal{H}^λ hängt ab von der Basis, welche in \mathcal{F}^λ gewählt wurde. Insbesondere hängt sie also von der Aufteilung $A = I \cup O$ ab.

Die Aktion von $e \in \mathcal{L}$ auf \mathcal{F}^λ , d.h. die Lie-Ableitung, soll auf \mathcal{H}^λ übertragen werden. Die naive Übertragung bedeutet, daß e auf jedem Faktor separat wirken soll und alle solche Terme addiert werden (Leibniz-Regel).

$$\begin{aligned} e \cdot \psi &:= (e \cdot f_{i_1, p_1}) \wedge f_{i_2, p_2} \wedge \cdots \\ &+ f_{i_1, p_1} \wedge (e \cdot f_{i_2, p_2}) \wedge \cdots \\ &+ f_{i_1, p_1} \wedge f_{i_2, p_2} \wedge \cdots \quad . \end{aligned} \quad (13-2)$$

Das Symbol \wedge zeigt an, wie die rechte Seite umzuformen ist, so daß eine Linearkombination von Elementen (13-1) dort steht. Seien v und w endliche Nachbarstücke, ψ ein unendliches Nachbarstück, i ein Multiindex und $c_i \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$v \wedge f_j \wedge w \wedge f_i \wedge \psi := -v \wedge f_i \wedge w \wedge f_j \wedge \psi, \quad j > i \quad (13-3)$$

$$v \wedge f_i \wedge w \wedge f_i \wedge \psi := 0 \quad (13-4)$$

$$v \wedge \left(\sum_{i=1}^r c_i f_i \right) \wedge \psi := \sum_{i=1}^r c_i (v \wedge f_i \wedge \psi) \quad . \quad (13-5)$$

Die Definition (13-2) macht allerdings nur dann Sinn, falls auf der rechten Seite lediglich endlich viele Summanden auftauchen. Um zu zeigen, daß dies i.a. nicht der Fall ist, führe ich das später benötigte Basiselement ($T \in \mathbb{Z}$)

$$\Phi_T^\lambda := f_{T,1} \wedge f_{T,2} \cdots \wedge f_{T,K} \wedge f_{T+1,1} \wedge \cdots \quad (13-6)$$

ein, in welchem alle Indizes $\geq (T, 1)$ erscheinen. Ich nenne Φ_T den Vakuumvektor vom Niveau T (und Gewicht λ). Allgemeiner sei gleich hier definiert

$$\Phi_{T,p}^\lambda := f_{T,p} \wedge f_{T,p+1} \cdots \wedge f_{T,K} \wedge f_{T+1,1} \wedge \cdots \quad (13-7)$$

mit $\Phi_T^\lambda = \Phi_{T,1}^\lambda$.

Aufgrund der Strukturgleichung (9-42) gilt

$$e_{0,p} \cdot f_{m,r} = m \cdot \delta_p^r f_{m,r} + \sum_{h>m} \sum_{s=1}^K C_{:,s}^{:,h} f_{h,s} . \quad (13-8)$$

Ist (h, s) ein Index auf der rechten Seite, der in Φ_T auftritt und gilt $(h, s) \neq (m, r)$, so verschwindet dieser Summand in (13-2), da $f_{h,s}$ durch die Nachbarterme von $f_{m,r}$ annulliert wird. Es taucht also nur ein einziger nichtverschwindender Term auf, nämlich derjenige, der von $f_{m,r}$ herrührt. Als Summanden in (13-2) erhalten wir $m \cdot \Phi_T$ für alle $m \geq T$. Insbesondere sind dies unendlich viele.

Ist allerdings $e \in \mathcal{L}_+$ oder $e \in \mathcal{L}_-$, dann treten wegen der Beinahe-Graduierung in der Zerlegung $e \cdot f_{n,p}$ nur Elemente aus \mathcal{F}_m^λ mit m aus einem Bereich auf, der n nicht umfaßt. Ist man mit dem Indexpaar (n, p) weit genug im stabil ansteigenden Bereich, werden die resultierenden $f_{h,s}$ durch die Nachbarelemente annulliert (Details siehe [H, p.110]). Insbesondere sind die \mathcal{H}^λ Moduln über den Lie-Algebren \mathcal{L}_+ und \mathcal{L}_- .

Zur Illustration sei an die klassische Situation erinnert. Dort ist

$$\mathcal{L}_- = \langle z^{n+1} \frac{d}{dz} \mid n \leq -1 \rangle, \quad \mathcal{L}_+ = \langle z^{n+1} \frac{d}{dz} \mid n \geq 1 \rangle, \quad \mathcal{L}_{(0)} = \langle z \frac{d}{dz} \rangle \quad (13-9)$$

und

$$e_n \cdot f_m^\lambda = (m + \lambda n) f_{n+m}^\lambda . \quad (13-10)$$

Lediglich die Unteralgebra $\mathcal{L}_{(0)}$ macht Schwierigkeiten. Die Aktion für diese Elemente muß "regularisiert" werden. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß im allgemeinen Fall der Unterraum $\mathcal{L}_{(0)}$ keine Unteralgebra ist.

Die \mathcal{F}^λ sind ebenfalls Lie-Moduln über der Algebra \mathcal{A} und der Algebra \mathcal{D}^1 . Dieselbe Definition wie in (13-2) definierte eine Aktion auf \mathcal{H}^λ . Sie ist auf den jeweiligen Unter-algebren $\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+, \mathcal{D}^1_-$ und \mathcal{D}^1_+ wohldefiniert. Der Raum der "kritischen Elemente" $\mathcal{A}_{(0)}$, bzw. $\mathcal{D}^1_{(0)} = \mathcal{A}_{(0)} \oplus \mathcal{L}_{(0)}$ ist endlichdimensional.

Um die "Regularisierung" zu erhalten, benütze ich unendlichdimensionale Matrixalgebren.² Hierbei handelt es sich im wesentlichen um eine Verallgemeinerung der Methoden, wie sie für den Fall der Virasoro-Algebra von Kac und Raina in [126]

²Für eine andere Methode via Potenzreihen siehe auch [H, §7 (c)]. Dort folge ich einer Idee von R. Weissauer.

dargestellt wurden. Sie wurden unabhängig voneinander von Kac und Peterson [124] und Date, Jimbo, Kashiwara und Miwa [56] im Jahre 1981 entwickelt. Siehe hierzu auch [204]. Die Matrizenalgebren $gl(\infty)$ und $\overline{gl}(\infty)$ wurden bereits in Abschnitt 8 benötigt. Ihre Definition sei wiederholt.

$$gl(\infty) = \{ A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{ij} = 0 \text{ fast immer} \}, \quad (13-11)$$

$$\overline{gl}(\infty) = \{ A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a_{ij} \in \mathbb{C} \exists k : \text{mit } a_{ij} = 0 \text{ falls } |i - j| > k \} \quad (13-12)$$

Die Matrizen in $gl(\infty)$ haben "endlichen Träger", die Matrizen in $\overline{gl}(\infty)$ haben nur endlich viele "Diagonalen" (r in der Definition darf von Matrix zu Matrix variieren).³ Führen wir die Elementarmatrizen

$$E_{kl} = (\delta_{i,k} \cdot \delta_{l,j})_{i,j \in \mathbb{Z}} \quad (13-13)$$

ein, so sehen wir sofort, daß diese eine Basis von $gl(\infty)$ bilden.

Ist $A = (a_{ij}) \in gl(\infty)$, so gilt

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}, \quad (13-14)$$

wobei der Summationsbereich endlich bleibt. Für die Matrizen in $\overline{gl}(\infty)$ können wir ein Erzeugendensystem angeben. Sei $\mu \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, d.h. $\mu = (\dots, \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \dots)$, so setzen wir für $r \in \mathbb{Z}$

$$A_k(\mu) = \sum_i \mu_i E_{i,i+k}. \quad (13-15)$$

Die Summe symbolisiert lediglich eine bequeme Schreibweise für die unendlichen Matrizen. Die Menge

$$\{ A_k(\mu) \mid k \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \}$$

erzeugt $\overline{gl}(\infty)$ (als Vektorraum). Selbstverständlich bildet sie keine Basis.

Das Matrizenprodukt für die Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{kl})$ ist definiert wie im Endlichdimensionalen als

$$C = A \cdot B, \quad C = (c_{il}), \quad c_{il} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{ij} \cdot b_{jl}, \quad (13-16)$$

³Der Gebrauch der Symbole ist von Literaturquelle zu Literaturquelle unterschiedlich.

falls alle auftretenden Summen endlich sind. Für Matrizen aus $gl(\infty)$ ist dies trivialerweise immer der Fall. Das Produkt ist allerdings auch für alle Matrizen aus $\overline{gl}(\infty)$ wohldefiniert. Insbesondere ist $\overline{gl}(\infty)$ also eine assoziative Algebra. Indem wir $gl(\infty)$, bzw. $\overline{gl}(\infty)$ mit dem üblichen Matrizenkommutator versehen, machen wir sie zu unendlichdimensionalen Lie-Algebren. Es ist

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{j,k}E_{il} - \delta_{i,l}E_{kj} . \quad (13-17)$$

Umgekehrt legt (13-17) aufgrund der Darstellung (13-14), bzw. (13-15) den Kommutator insgesamt fest.

Die Aktion von \mathcal{L} auf \mathcal{F}^λ definiert nach Wahl einer Basis in \mathcal{F}^λ eine Einbettung von \mathcal{L} in $\overline{gl}(\infty)$. Hierzu sei λ festgehalten. Wir setzen

$$f_{nK+p-1} := f_{n,p}^\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad p = 1, \dots, K . \quad (13-18)$$

Damit werden die Basiselemente durch \mathbb{Z} numeriert. Die Strukturgleichung umgeschrieben lautet

$$e_{n,p} \cdot f_m = \sum_{h=r}^s C_{n,p;m}^h f_h$$

mit $r \geq m + Kn$ und $s \leq m + Kn + R_4$.

Proposition 13.1. *Die Abbildung*

$$\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \overline{gl}(\infty), \quad e_{n,p} \mapsto \varphi(e_{n,p}) := (a_{ij}), \quad a_{ij} = C_{n,p;j}^i \quad (13-19)$$

ist eine Einbettung von Lie-Algebren.

Zum Beweis sei hier lediglich erwähnt, daß dies nur wegen der Beinahe-Graduierung funktioniert. Die Einbettung ist per Konstruktion verträglich mit der Standardaktion

$$E_{ij} \cdot f_m = \delta_{j,m} f_i .$$

Analog zu den semi-infiniten Wedgeformen, die oben eingeführt wurden, können natürlich für den Vektorraum $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ mit der Standardbasis $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ Wedgeformen definiert werden. Die Standardaktion $E_{ij} \cdot v_m = \delta_{j,m} v_i$ besitzt eine Ausdehnung mit der Leibniz-Regel auf die Wedgeformen. Damit ist für $gl(\infty)$ eine Ausdehnung definiert. Wären wir in der Lage, die Ausdehnung auch für $\overline{gl}(\infty)$ zu definieren, so

wäre durch Zurückziehen der Aktion via der Identifikation $v_i \leftrightarrow f_i$ auch eine Ausdehnung für \mathcal{L} definiert. Obiges Beispiel hat gezeigt, daß dies nicht funktionieren kann.

Für die Erzeugenden $A_k(\mu)$ von $\overline{gl}(\infty)$ gilt

$$A_k(\mu) \cdot v_s = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i E_{i, i+k} \cdot v_s = \mu_{s-k} v_{s-k} . \quad (13-20)$$

Für

$$\Phi_m = v_m \wedge v_{m+1} \wedge v_{m+2} \cdots ,$$

erhalten wir

$$E_{ii} \Phi_m = \begin{cases} \Phi_m, & i \geq m \\ 0, & i < m \end{cases} \quad \text{und für } i \neq j \quad E_{ij} \Phi_m = 0 \text{ falls } i, j \geq m \text{ bzw. } j < m \quad (13-21)$$

Wendet man also $A_k(\mu)$ für $k \neq 0$ auf Φ_m an, so operieren nur endlich viele Elemente $E_{i, i+k}$ nichttrivial auf Φ_m . Damit macht die Aktion von $A_k(\mu)$ für $k \neq 0$ keine Probleme. Andererseits gilt

$$A_0(\mu) \Phi_m = \left(\sum_{r=m}^{\infty} \mu_r \right) \Phi_m .$$

Diese unendliche Summe wird im allgemeinen nicht konvergieren.

Bezeichnet man die Aktion von $\overline{gl}(\infty)$ auf \mathcal{H}^λ mit r , so ist $r(E_{ij})$ wohldefiniert. Diese Aktion wird undefiniert (siehe [126]) zu

$$\begin{aligned} \hat{r}(E_{ij}) &:= r(E_{ij}), & i \neq j \quad \text{oder} \quad i = j < 0 \\ \hat{r}(E_{ii}) &:= r(E_{ii}) - id, & i \geq 0 . \end{aligned} \quad (13-22)$$

Damit gilt $\hat{r}(A_k) = r(A_k)$ für $k \neq 0$ und

$$\hat{r}(A_0(\mu))(\Phi_m) = \begin{cases} \left(\sum_{r=m}^{-1} \mu_r \right) \Phi_m, & m < 0 \\ \left(- \sum_{r=0}^{m-1} \mu_r \right) \Phi_m, & m > 0 \\ 0, & m = 0 . \end{cases} \quad (13-23)$$

Die Aktion ist also wohldefiniert. Allerdings handelt es sich nicht mehr um eine Lie-Algebrenaktion, sondern nur noch um eine projektive Aktion. Durch Übergang zu einer zentralen Erweiterung, können wir sie wieder zu einer Lie-Aktion machen.

Die zentrale Erweiterung $\widehat{gl}(\infty)$ von $\overline{gl}(\infty)$ sei durch den folgenden Kozykel gegeben (siehe [91]). Zuerst sei

$$A = (a_{ij}) \mapsto \pi(A) = (\pi(A)_{ij}) \quad \text{mit} \quad \pi(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \geq 0, j \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (13-24)$$

Die Matrix

$$\rho(A, B) = \pi([A, B]) - [\pi(A), \pi(B)] \quad (13-25)$$

besitzt endlichen Träger, ist also in $gl(\infty)$. Insbesondere ist Spurbildung möglich. Wir führen ein

$$\alpha(A, B) := \text{Tr } \rho(A, B) . \quad (13-26)$$

Proposition 13.2. *Die Bilinearform $\alpha(\dots)$ definiert einen Kozykel von $\overline{gl}(\infty)$, der nicht kohomolog zu Null ist. Desweiteren gilt: $H_{cont}^2(\overline{gl}(\infty), \mathbb{C})$ ist eindimensional und somit erzeugt von der Klasse $[\alpha]$.*

Für den Beweis siehe [91],[79],[56]. Daß α ein Kozykel ist, rechnet man leicht selber nach (dies ist das einzige was wir hier brauchen). Es ist wohlbekannt, daß $gl(\infty)$ keine nichttrivialen zentralen Erweiterungen besitzt [91]. In der Tat kann man obigen Kozykel für Matrizen aus der Unteralgebra $gl(\infty)$ auch als Korand des 1-Kozykels

$$\gamma(A) = \text{Tr } \pi(A) \quad (13-27)$$

schreiben. Für $A \in \overline{gl}(\infty)$ ist (13-27) nicht wohldefiniert.

Für die Elementarmatrizen ergibt sich

$$\alpha(E_{ij}, E_{ml}) = \text{Tr} (\pi(\delta_{j,m}E_{il} - \delta_{i,l}E_{mj}) - [\pi(E_{ij}), \pi(E_{ml})]) . \quad (13-28)$$

Die zentrale Erweiterung ist definiert durch

$$\widehat{gl}(\infty) = \mathbb{C}t \oplus \overline{gl}(\infty)$$

mit $\widehat{E}_{ij} = (0, E_{ij})$

$$[\widehat{E}_{ij}, \widehat{E}_{ml}] = \delta_{jm}\widehat{E}_{il} - \delta_{il}\widehat{E}_{mj} + \alpha(E_{ij}, E_{ml}) t . \quad (13-29)$$

Durch direktes Rechnen zeigt man, daß durch

$$\hat{r}(\widehat{E}_{ij}) := \hat{r}(E_{ij}), \quad \hat{r}(t) = id$$

\mathcal{H}^λ zu einem $\widehat{gl}(\infty)$ -Modul gemacht wird.

Aufgrund der Einbettung $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \overline{gl}(\infty)$ ist die Aktion \hat{r} ebenfalls auf \mathcal{L} definiert und die zentrale Erweiterung $\widehat{gl}(\infty)$, definiert durch den Kozykel α , definiert ebenfalls eine zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{L}}$, gegeben durch den Pullback $\chi = \varphi^* \alpha$, mit einer entsprechenden Fortsetzung der Aktion. Aus den Strukturkonstanten der Algebra \mathcal{L} ergibt es sich, daß der Pullback ein lokaler Kozykel ist und die Aktion der Elemente aus \mathcal{L}_- und \mathcal{L}_+ unverändert bleibt.

Theorem 13.3. *Die Aktion von \mathcal{L} auf \mathcal{F}^λ kann zu einer Aktion einer lokalen zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{L}}$ auf dem Raum der semi-infiniten Wedgeprodukte \mathcal{H}^λ fortgesetzt werden. Wird der Kozykel χ der zentralen Erweiterung so normiert, daß er für die Paare von Basiselemente $(e_{-i,p}, e_{+i,r})$ von λ unabhängig ist und sich zum Virasoro-Kozykel spezialisiert, so gilt für die Operation auf dem Vakuumvektor Φ_T vom Niveau T und Gewicht λ*

$$E_{n,p} \cdot \Phi_T = 0 \quad n > 0 \quad (13-30)$$

$$E_{0,p} \cdot \Phi_T = h_\lambda(p, T) \cdot \Phi_T = -\frac{1}{2}(T - \lambda)(T + \lambda - 1)\Phi_T \quad (13-31)$$

$$t \cdot \Phi_T = c_\lambda \cdot \Phi_T = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)\Phi_T. \quad (13-32)$$

Hierbei sind die $E_{n,p}$ die Lifts der Basiselemente $e_{n,p}$ von \mathcal{L} und t ist das (entsprechend normierte) zentrale Element von $\widehat{\mathcal{L}}$. Die Operation der Elemente aus $\widehat{\mathcal{L}}_+ \cong \mathcal{L}_+$ und $\widehat{\mathcal{L}}_- \cong \mathcal{L}_-$ ist durch die Leibniz-Regel (13-2) gegeben.

Hier möchte ich noch auf folgendes hinweisen. A priori erhält man für jedes λ separat einen lokalen Kozykel und somit jeweils eine lokale zentrale Erweiterung. Unter der Voraussetzung, daß die Kohomologiekategorie des lokalen Kozykels eindeutig ist (was im Fall $N = 2$ von Krichever und Novikov in [146] gezeigt wurde und nach deren Aussage allgemein gilt [150], siehe auch die Bemerkung nach Thm. 10.11) sind diese jedoch alle äquivalent.

All dies kann natürlich auch für \mathcal{A} und ganz \mathcal{D}^1 gemacht werden.

Theorem 13.4. *Die Aktion von \mathcal{D}^1 auf \mathcal{F}^λ kann zu einer Aktion einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{D}}^1$ auf \mathcal{H}^λ fortgesetzt werden, derart daß mit geeigneten Lifts $E_{n,p}$ der Basiselemente $e_{n,p} \in \mathcal{L}$ und $\hat{A}_{n,p}$ der Elemente $A_{n,p} \in \mathcal{A}$ folgende Eigenschaften gelten:*

(a) $e_{n,p} \rightarrow E_{n,p}$ und $A_{n,p} \rightarrow \hat{A}_{n,p}$ definiert eine Einbettung der Lie-Algebren \mathcal{D}^1_+ und \mathcal{D}^1_- in $\widehat{\mathcal{D}}^1$, welche mit der Aktion auf \mathcal{H}^λ verträglich ist.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} E_{n,p} \cdot \Phi_T &= 0, & \hat{A}_{n,p} \cdot \Phi_T &= 0, & n > 0, \\ t \cdot \Phi_T &= -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \cdot \Phi_T \\ E_{0,p} \cdot \Phi_T &= -\frac{1}{2}(T - \lambda)(T + \lambda - 1) \cdot \Phi_T, \\ \hat{A}_{0,p} \cdot \Phi_T &= -(T - \lambda) \cdot \Phi_T. \end{aligned} \tag{13-33}$$

(c) Der definierende Kozykel in Bezug auf die obigen Lifts ist lokal und kann für spezielle Basiselemente gegeben werden durch

$$\begin{aligned} \psi(e_{n,p}, e_{-n,r}) &= \frac{1}{12} (n^3 - n) \cdot \delta_p^r, \\ \psi(A_{n,p}, e_{-n,r}) &= \frac{-n(n-1)(2\lambda-1)}{2c_\lambda} \cdot \delta_p^r, \\ \psi(A_{n,p}, A_{-n,r}) &= \frac{n}{c_\lambda} \cdot \delta_{p,r}, \end{aligned} \tag{13-34}$$

mit $c_\lambda = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)$.

Theorem 13.4(c) besagt, daß der Kozykel $\psi = \varphi^*(\alpha)$, eingeschränkt auf spezielle Basiselemente, gegeben werden kann als eine entsprechende Linearkombination der Kozykel χ, γ, β , die in Abschnitt 10 eingeführt wurden.

Vermutung 13.5. *Es gilt*

$$\psi_\lambda = \varphi^*(\alpha) = \chi + \frac{(2\lambda-1)}{2c_\lambda} \beta + \frac{-1}{c_\lambda} \gamma \tag{13-35}$$

bis auf kohomologe Abänderung.

Im Virasoro Fall besteht der kritische Streifen nur aus den Elementen e_0 und A_0 Insbesondere ergibt sich, daß die Paare in (13-34) die einzigen Terme sind, für

die der Kozykel nicht verschwindet (bis auf kohomologe Abänderung). Somit gilt die Vermutung in diesem Falle. Akzeptiert man die Ausführungen nach Thm. 10.11 über die Eindeutigkeit der lokalen Kozykel für \mathcal{D}^1 , so ist ψ_λ eine gewisse Linearkombination der obigen Kozykel. Durch Einsetzen der speziellen Basiselemente (13-34) erhält man dann die Vermutung 13.5.

Der Kozykel (13-35) ist abhängig von λ . Für $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ist immer $c_\lambda \neq 0$. Anstatt t kann deshalb auch das zentrale Element $t' = \frac{1}{c_\lambda}t$ gewählt werden. In diesem Fall sind die Ausdrücke in (13-35) mit c_λ zu multiplizieren. Nach dieser Reskalierung besitzt der Kozykel der Funktionen keine λ -Abhängigkeit mehr. Von diesem Gesichtspunkt aus, ist der reskalierte Kozykel die "natürlichere" Wahl.

Aufgrund der Eigenschaft der universellen Einhüllenden kann von \mathcal{D}^1 ausgehend die Darstellung auf die Algebra der kohärenten Differentialoperatoren \mathcal{D} (bzw. solange wir bei einem festen λ bleiben auch auf $\mathcal{D}^{(\lambda)}$) ausgedehnt werden. Die Abbildung $\mathcal{D}^1 \rightarrow \overline{gl}(\infty)$ setzt sich nämlich zu $\mathcal{D} \rightarrow \overline{gl}(\infty)$ (als assoziative Algebra) fort. Damit definiert der "Übergang \mathcal{F}^λ auf \mathcal{H}^λ " mit Hilfe der Erweiterung $\overline{gl}(\infty)$ auf $\widehat{gl}(\infty)$ ebenfalls eine zentrale Erweiterung von $L\mathcal{D}$, welche $\widehat{\mathcal{D}}^1$ als Unteralgebra enthält. Selbstverständlich ist der Kozykel abhängig von λ , da er dies schon im Fall der Restriktion auf $\widehat{\mathcal{D}}^1$ ist. Auf diese Art und Weise erhält man eine, von λ abhängige zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}$ von \mathcal{D} , bzw. eine zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}$ von $\mathcal{D}^{(\lambda)}$. Die Existenz einer solchen zentralen Erweiterung ist nichttrivial. Darauf wurde bereits im Abschnitt 10 hingewiesen. Dort findet sich auch die Form des Kozykels für gewisse Basiselemente (der "Schwinger-Term" (10-37)) und einige Bemerkungen über den Zusammenhang mit den W -Algebren.

Auf \mathcal{H}^λ wollen wir jetzt einen Grad einführen. Hierzu gehe ich aus von den speziellen Basiselementen $\Phi_{T,p}^\lambda$ (13-7). Zu einem beliebigen Basiselement ψ gibt es aber genau ein $\Phi_{T,p}^\lambda$ derart, daß sich ψ von diesem, beginnend mit dem niedrigsten Eintrag, nur an endlich vielen der $f_{m,p}$ unterscheidet. $\mathcal{H}_{T,P}^\lambda$ sei der Raum erzeugt von diesen Basiselementen mit festem (T,p) . In dieser Weise zerlegt sich

$$\mathcal{H}^\lambda = \bigoplus_{\substack{T \in \mathbb{Z} \\ p=1, \dots, K}} \mathcal{H}_{T,P}^\lambda . \quad (13-36)$$

Für das Basiselement $\psi \in \mathcal{H}_{T,P}^\lambda$

$$\psi = f_{i_1, p_1} \wedge f_{i_2, p_2} \wedge f_{i_3, p_3} \wedge \dots$$

ist der Grad $\deg(\psi)$ definiert als die Differenz des jeweils ersten Eintrag des Indexlabels von ψ von dem entsprechenden Eintrag bei $\Phi_{T,p}^\lambda$ aufsummiert über alle (i_r) . In Formeln

$$\deg(\psi) = \sum_{j=1}^{K+1-p} (i_j - T) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^K (i_{j+lK} - (T+l)) . \quad (13-37)$$

Für den 2-Punktfall (d.h. $K = 1$) erhalten wir

$$\deg(\psi) = \sum_{j=1}^{\infty} (i_j - (T+j-1)) . \quad (13-38)$$

Damit ist auf $\mathcal{H}_{T,p}^\lambda$ ein Grad definiert. Wie üblich können wir zerlegen

$$\mathcal{H}_{T,p}^\lambda = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{T,p}^{\lambda,n} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}_{T,p}^{\lambda,n} := \{ \psi \in \mathcal{H}_{T,p}^\lambda \mid \deg(\psi) = n \} . \quad (13-39)$$

Da die Elemente in den Wedgeformen in aufsteigender Reihenfolge sein müssen folgt, daß $\deg(\psi) \leq 0$ und $\deg(\psi) = 0$ genau dann wenn $\psi = \Phi_{T,p}^\lambda$. Desweiteren sind alle $\mathcal{H}_{T,p}^{\lambda,n}$ endlichdimensional, da es nur endlich viele Möglichkeiten gibt einen festen negativen Grad zu erzeugen. Für $N = 2$ ergibt sich z.B. $\dim \mathcal{H}_{T,p}^{\lambda,n} = p(-n)$ mit der Partitionsfunktion $p(l)$ die angibt, wieviele Möglichkeiten es gibt die Zahl l als Summe natürlicher Zahlen zu schreiben [126, p.37]. Die Graddefinition ist invariant unter den Regeln (13-3) und (13-5). Ist $\psi \in \mathcal{H}_{T,p}^\lambda$, so liegen die einzelnen Summanden nachdem man auf ψ Funktionen oder Vektorfelder mit der Leibniz-Regel (13-2) angewendet hat, separat in $\mathcal{H}_{T,p}^\lambda$. Dies wird auch durch die Regularisierung nicht geändert. Somit respektiert die Aktion von $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\mathcal{D}}^1$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}$ die Zerlegung (13-36). Ebenfalls folgt aufgrund der beinahe-graduierten Modulstruktur für die jeweils auftretenden Summanden ψ_j in $A_{n,p}\psi$, bzw. $e_{n,p}\psi$

$$\deg(\psi) + n \leq \deg(\psi_j) \leq \deg(\psi) + n + R_2 \text{ (bzw. } R_4) .$$

Somit gilt für diejenigen Elemente, die nicht regularisiert werden, diese Gradabschätzung für das Resultat. Diese Operatoren haben somit eine beinahe-graduierte Operation auf $\mathcal{H}_{T,p}^\lambda$. Abänderung war nur notwendig für die Elemente aus dem endlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{A}_{(0)}$, bzw. $\mathcal{L}_{(0)}$. Für diese gilt aber

$$\deg(\psi) + n \leq \deg(A_{n,p}\psi) \leq \max(0, \deg(\psi) + n + R_2) .$$

Aufgrund des endlichen Bereichs liefert dies eine beinahe-graduierte Struktur. Ich fasse zusammen

Proposition 13.6. *Die Moduln $\mathcal{H}_{T,P}^\lambda$ für festgehaltenes (T,p) , $T \in \mathbb{Z}$ und $p = 1, \dots, K$ sind beinahe-graduierte $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ und $\widehat{\mathcal{D}}^1$ -Moduln in Bezug auf die Zerlegung*

$$\mathcal{H}_{T,P}^\lambda = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{T,P}^{\lambda,n}. \quad (13-40)$$

Hierbei ist $\mathcal{H}_{T,P}^{\lambda,n} = 0$ für $n > 0$ und $\mathcal{H}_{T,P}^{\lambda,0} = \mathbb{C} \cdot \Phi_{T,p}^\lambda$. Die Algebren $\widehat{\mathcal{A}}_+$, $\widehat{\mathcal{L}}_+$, $\widehat{\mathcal{D}}_+^1$ operieren trivial auf $\mathcal{H}_{T,P}^\lambda$ und die Algebren $\widehat{\mathcal{A}}_-$, $\widehat{\mathcal{L}}_-$, $\widehat{\mathcal{D}}_-^1$ mit denselben Schranken, wie durch ihre Aktion auf \mathcal{F}^λ gegeben ist. Für $D \in \widehat{\mathcal{D}}_-^1$ gilt insbesondere

$$\deg(D\Phi_{T,p}^\lambda) < 0.$$

Es sei hier darauf hingewiesen, daß es manchmal nützlich ist einen Indexshift

$$\widetilde{\deg}(\psi) := \deg(\psi) + T$$

durchzuführen.

Korollar 13.7. *Die Untermoduln $U(\widehat{\mathcal{A}})\Phi_{T,p}^\lambda$, $U(\widehat{\mathcal{L}})\Phi_{T,p}^\lambda$ bzw. $U(\widehat{\mathcal{D}}^1)\Phi_{T,p}^\lambda$ von $\mathcal{H}_{T,P}^\lambda$ sind Höchstgewichtsmoduln der Algebren $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ bzw. $\widehat{\mathcal{D}}^1$ mit dem Höchstgewichtsvektor $\Phi_{T,p}^\lambda$.*

Theorem 13.4 gibt jeweils die führenden Gewichte für $p = 1$ an. Analoge Formeln existieren für jedes p .

Durch universelle Konstruktionen kann man auch zeigen, daß zu vorgegebenen führenden Gewichten und zentraler Ladung eine eindeutige Höchstgewichtsdarstellung existiert, derart daß die Elemente die durch sukzessives Anwenden der Basis-elemente aus $\widehat{\mathcal{A}}_- \oplus \widehat{\mathcal{A}}_{(0)}$, bzw. $\widehat{\mathcal{L}}_- \oplus \widehat{\mathcal{L}}_{(0)}$ auf einen Ausgangsvektor erhalten werden können, linear unabhängig sind. Solche Moduln sind Verallgemeinerungen der klassischen Verma-Moduln.

Mit dieser Konstruktion haben wir somit auch für die Heisenberg-Algebra explizite Darstellungen konstruiert. Um explizite Höchstgewichtsdarstellungen für die allgemeineren affinen Algebren $\widehat{\mathcal{G}}$ von höherem Geschlecht zu konstruieren, kann man Vertexoperatordarstellungen betrachten. Dies wurde für $g \geq 1$ im 2-Punktfall z.B. von Bonora und Toppan [23] ausgeführt. Die Mehrpunktverallgemeinerung steht noch aus. Im nächsten Teilabschnitt werden wir eine weitere Methode sehen, wie man für $\widehat{\mathcal{L}}$ Höchstgewichtsdarstellungen erhalten kann.

(b) **b – c -Systeme**

Analog zu den rechts-semi-infiniten Wedgeformen kann man auch links-semi-infinite Wedgeformen einführen. Hierzu machen wir \mathcal{F}^λ zu einem Rechtsmodul durch

$$f^\lambda \cdot e := -e \cdot f^\lambda, \quad f \in \mathcal{F}^\lambda, \quad e \in \mathcal{L}. \quad (13-41)$$

Die links-semi-infiniten Formen sind Linearkombinationen von Basiselementen

$$\dots f_{m-1,1} \wedge f_{m,K} \dots \wedge f_{m,2} \wedge f_{m,1} \wedge \dots \wedge f_{(i_2)} \wedge f_{(i_1)}.$$

Hierbei bezeichne (i_k) einen Doppelindex. Die Elemente $f_{(i_k)}$ seien lexikographisch geordnet, wobei die Ordnung im zweiten Index gerade die invertierte ist (d.h. $(m, p) < (m, p')$ für $p > p'$). Bis zu einem endlichen Indexwert treten alle auf. \mathcal{H}^λ_r bezeichne die rechts-semi-infinite Formen, \mathcal{H}^λ_l bezeichne die links-semi-infinite Formen.

Wiederum ist die (Rechts-)Aktion von \mathcal{L}_+ , bzw. \mathcal{L}_- wohldefiniert und kann “fortgesetzt” werden zu einer Aktion einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{L}}$ auf den links-semi-infiniten Formen. Akzeptiert man die Eindeutigkeit (bis auf Multiplikation und Korand) des lokalen Kozykels, so erhält man, daß die zentralen Erweiterungen, die man durch die Linksaktion erhält, isomorph zu den zentralen Erweiterungen sind, welche durch die Rechtsaktion gegeben sind. In der Tat kommt man für das Paar $(\lambda, 1 - \lambda)$ ohne dieses Resultat aus. Es gilt

Lemma 13.8. *Sei $f \in \mathcal{F}^\lambda$ und $h \in \mathcal{F}^{1-\lambda}$ dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} L_e(f)h = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} L_e(h)f. \quad (13-42)$$

Insbesondere gilt für die Strukturkonstanten

$$C_{(k,r)(m,p)}^{(n,s)}(\lambda) = C_{(k,r)(-n,s)}^{(-m,p)}(1 - \lambda). \quad (13-43)$$

Beweis. Die Lie-Ableitung ist eine Derivation, d.h. es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} L_e(f \cdot h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} L_e(f)h + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f L_e(h)$$

Andererseits besitzt die Lie-Ableitung einer Differentialform kein Residuum [H, Lemma 6.2]. Daraus folgt (13-42). Die Gleichung (13-43) folgt aus

$$C_{(k,r)(m,p)}^{(n,s)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} L_{e_{k,r}}(f_{m,p}^\lambda) \cdot f_{-n,s}^{1-\lambda}$$

und der Anwendung von (13-42). \square

Daraus ergibt sich (siehe [H]), daß für die von $\overline{gl}(\infty)$ zur Vektorfeldalgebra zurückgezogenen Kozykel gilt $\psi_\lambda = -\psi_{1-\lambda}$. Insbesondere erhält man somit isomorphe zentrale Erweiterungen von \mathcal{L} . Dieser Isomorphismus sei

$$h : \widehat{\mathcal{L}}_r \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}_l \quad (13-44)$$

(r (l) bezeichne die Erweiterung definiert durch die Aktion auf den Rechts- (Links)formen). Auf $\widehat{\mathcal{L}}_+$ und $\widehat{\mathcal{L}}_-$ ist er die Identität. Natürlich macht wiederum alles Sinn für die allgemeineren Algebren $\widehat{\mathcal{A}}$ und $\widehat{\mathcal{D}}^1$.

In der Physik benötigt man (z.B. zur Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten) ein Skalarprodukt, bzw. eine Paarung zweier dualer Räume. Eine natürliche Paarung⁴ besteht in einer Paarung von $\mathcal{H}_l^{1-\lambda}$ mit \mathcal{H}_r^λ . Seien die jeweiligen Basiselemente gegeben durch (mit vorgeschriebener ansteigender bzw. absteigender Indizierung)

$$\begin{aligned} \Psi &= f_{(j_1)}^\lambda \wedge f_{(j_2)}^\lambda \cdots \wedge f_{(j_k)}^\lambda \cdots \\ \Phi &= \cdots \wedge f_{(i_k)}^{1-\lambda} \wedge \cdots \wedge f_{(i_2)}^{1-\lambda} \wedge f_{(i_1)}^{1-\lambda} . \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} f_{(i_k)}^{1-\lambda} \cdot f_{(j_k)}^\lambda . \quad (13-45)$$

Der Rest erfolgt durch lineare Fortsetzung. Aufgrund der Dualität (9-28) tauchen jeweils nur Faktoren 0 oder 1 auf.

Wie in [H, Prop. 7.4] gezeigt gilt

$$\langle \psi, E_{n,p} \cdot \phi \rangle = \langle \psi \cdot h(E_{n,p}), \phi \rangle \quad \langle \psi, t \cdot \phi \rangle = \langle \psi \cdot h(t), \phi \rangle . \quad (13-46)$$

⁴Andere Paarungen sind möglich, siehe [H] für den Mehrpunktfall, bzw. [148], [150] für den 2-Punktfall.

Mit Hilfe der Rechts- und Linksformen können $b - c$ -Systeme realisiert werden. Seien D und E Elemente eines Ringes, z.B. Operatoren auf einem Vektorraum, so ist der Antikommutator definiert als

$$\{D, E\}_+ = D \circ E + E \circ D . \quad (13-47)$$

Sei \mathcal{H}_r^λ der Raum der rechts-semi-infiniten Formen vom festgehaltenen Gewicht λ $\mathcal{H}_l^{1-\lambda}$ der duale Raum der links-semi-infiniten Formen vom Gewicht $1 - \lambda$. Zur Notationsvereinfachung verwende ich $f_{n,p} = f_{n,p}^\lambda$ und $h_{n,p} = f_{n,p}^{1-\lambda}$. Desweiteren bezeichne (j_k) einen Doppelindex. Die Vektorräume \mathcal{F}^λ und $\mathcal{F}^{1-\lambda}$ operieren auf den semi-infiniten Formen wie folgt: Sei $f \in \mathcal{F}^\lambda$ und $h \in \mathcal{F}^{1-\lambda}$. Wir setzen

$$c_f \cdot w = f \wedge w, \quad b_h \cdot w = i_h(w), \quad w \in \mathcal{H}_r^\lambda \quad (13-48)$$

$$w \cdot c_f = (w)i_f, \quad w \cdot b_h = w \wedge h, \quad w \in \mathcal{H}_l^{1-\lambda} . \quad (13-49)$$

Hierbei ist i_h die Kontraktion. Sie ist auf jedem Faktor $f_{m,r}$ definiert als

$$i_h(f_{m,r}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} h \cdot f_{m,r} \quad (13-50)$$

und auf

$$w = f_{(j_1)} \wedge f_{(j_2)} \wedge \dots \wedge f_{(j_l)} \wedge \dots$$

durch die (modifizierte) Leibniz-Regel

$$i_h(w) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} i_h(f_{(j_l)}) \cdot f_{(j_1)} \wedge \dots \wedge \check{f}_{(j_l)} \wedge \dots . \quad (13-51)$$

Hierbei bezeichne $\check{f}_{(j_l)}$ (wie üblich), daß dieser Faktor ausgelassen wird. Daß die Kontraktion (13-51) wohldefiniert ist, ist wiederum eine Folgerung der beinahe-graduierten Struktur, bzw. der Dualität (9-28). Damit bleiben in der Summe (13-51) nur endlich viele Terme übrig. Die Definition auf den Linksformen ist entsprechend. Offensichtlich sind diese Abbildungen linear. Sie sind aber auch linear im Index, d.h. es gilt $c_{e+f} = c_e + c_f$ und $b_{g+h} = b_g + b_h$. Für die Operatoren, welche den Basiselementen $f_{n,p}$, bzw. $h_{n,p}$ zugeordnet sind, verwende ich auch $c_{n,p}$, bzw. $b_{n,p}$. Anschaulich bedeutet das Operieren (auf den Rechtsformen) von $c_{n,p}$ dem "Einhängen" von $f_{n,p}$ und das Operieren von $b_{n,p}$ dem "Aushängen" von $f_{-n,p}$. Auf den Linksformen ist es gerade umgekehrt.

Proposition 13.9. [H]

(a) Sowohl für die Operatoren auf den Rechts- als auch auf den Linksformen gilt

$$\{b_g, b_h\}_+ = 0, \quad g, h \in \mathcal{F}^{1-\lambda}, \quad \{c_e, c_f\}_+ = 0, \quad e, f \in \mathcal{F}^\lambda, \quad (13-52)$$

$$\{b_{n,p}, c_{m,r}\}_+ = \delta_m^{-n} \delta_p^r \text{id} . \quad (13-53)$$

(b) Die Operatoren $b_{n,p}$ und $c_{n,p}$ auf den Rechts- und Linksformen sind in Bezug auf die Dualitätspaarung (13-45) selbstadjungiert, d.h. es gilt für $\phi \in \mathcal{H}_l^{1-\lambda}$, $\psi \in \mathcal{H}_r^\lambda$

$$\langle \phi \cdot c_{n,p}, \psi \rangle = \langle \phi, c_{n,p} \cdot \psi \rangle \quad (13-54)$$

$$\langle \phi \cdot b_{n,p}, \psi \rangle = \langle \phi, b_{n,p} \cdot \psi \rangle \quad (13-55)$$

(c) Sei Φ_T der Vakuumvektor vom Gewicht λ und Level T , Φ_T^* der duale Vakuumvektor. Dann gilt

$$c_{n,p} \cdot \Phi_T = 0, \quad \text{für } n \geq T; \quad \Phi_T^* \cdot c_{n,p} = 0, \quad \text{für } n \leq T - 1 \quad (13-56)$$

$$b_{n,p} \cdot \Phi_T = 0, \quad \text{für } n \geq 1 - T; \quad \Phi_T^* \cdot b_{n,p} = 0, \quad \text{für } n \leq -T. \quad (13-57)$$

Die Relationen (13-52) und (13-53) besagen, daß die Algebra

$$\langle b_{n,p}, c_{n,p} \mid n \in \mathbb{Z}, p = 1, \dots, K \rangle_{\mathbb{C}} \quad (13-58)$$

eine Clifford-Algebra ist. Interpretiert man Φ_T als Grundzustand, so besagen die Relation (13-56) und (13-57), daß die $c_{n,p}$ und $b_{n,p}$ für hinreichend große n als Vernichtungsoperatoren (auf den Rechtsformen) aufgefaßt werden können.

Betrachten wir die Unterräume $\mathcal{H}_{T,P}^\lambda$, wie sie in (13-36) eingeführt wurden, so lassen die Operatoren b und c diese nicht invariant. Im Gegenteil, es gilt

$$\mathcal{H}_{T,K-1}^\lambda \begin{array}{c} \xrightarrow{b} \\ \xleftarrow{c} \end{array} \mathcal{H}_{T,K}^\lambda \begin{array}{c} \xrightarrow{b} \\ \xleftarrow{c} \end{array} \mathcal{H}_{T+1,1}^\lambda \begin{array}{c} \xrightarrow{b} \\ \xleftarrow{c} \end{array} \dots \quad (13-59)$$

Auf \mathcal{H}_r^λ und $\mathcal{H}_l^{1-\lambda}$ operieren außer \mathcal{F}^λ und $\mathcal{F}^{1-\lambda}$ auch $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{L}}$, bzw. $\widehat{\mathcal{D}}^1$. Es bestehen folgende interessante Kommutatorrelationen.

Proposition 13.10. [H] Sei $\hat{e} \in \widehat{\mathcal{D}}^1$ ein Lift eines Vektorfeldes $e \in \mathcal{L}$, $\hat{a} \in \widehat{\mathcal{D}}^1$ ein Lift einer Funktion $a \in \mathcal{A}$, t ein zentrales Element in $\widehat{\mathcal{D}}^1$, $f \in \mathcal{F}^\lambda$ und $h \in \mathcal{F}^{1-\lambda}$. Dann gilt für die Operatoren auf \mathcal{H}_r^λ

$$\begin{aligned} [\hat{e}, c_f] &= c_{L_e(f)}, & [\hat{e}, b_h] &= b_{L_e(h)}, \\ [\hat{a}, c_f] &= c_{a \cdot f}, & [\hat{a}, b_h] &= b_{-a \cdot h} \\ [t, c_f] &= [t, b_h] = 0. \end{aligned} \quad (13-60)$$

Insbesondere bildet der von $\widehat{\mathcal{D}}^1$, $c(\mathcal{F}^\lambda)$ und $b(\mathcal{F}^{1-\lambda})$ aufgespannte Unterraum von $L\text{End } \mathcal{H}_r^\lambda$ eine Unteralgebra (als Lie-Algebra).

Entsprechende Formeln gelten auch für die Aktion auf den Linksformen. Siehe hierzu auch die Formeln 3.32 in [134] für den Virasoro-Fall.

Diese $b - c$ -Systeme treten in folgender Weise in der Physik auf.⁵ Auf der Weltfläche des Strings sind operatorwertige Felder b und c vom Gewicht λ , bzw. $1 - \lambda$ gegeben [19]. Von besonderer Bedeutung sind sie für $\lambda = 2$, $1 - \lambda = -1$ (die Geisterfelder) und $\lambda = 1 - \lambda = 1/2$. Sie haben keine Entsprechung in der klassischen Theorie. Aufgrund des Entwicklungspostulats der konformen Feldtheorie besitzen sie die (formale) Darstellung als beidseitig unendliche Summen

$$\begin{aligned} b(Q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^K b_{n,p} f_{-n,p}^\lambda(Q), \\ c(Q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^K c_{n,p} f_{-n,p}^{1-\lambda}(Q) \end{aligned} \quad (13-61)$$

mit operatorwertigen Koeffizienten $b_{n,p}$ und $c_{n,p}$.

Für die $b - c$ -Felder werden für $Q, Q' \in C_\tau$ (d.h. sie werden zur selben "Zeit" τ betrachtet) die Antikommutatorrelationen postuliert

$$\begin{aligned} \{b(Q), c(Q')\}_+ &= \Delta_\lambda(Q, Q'), \\ \{b(Q), b(Q')\}_+ &= \{c(Q), c(Q')\}_+ = 0. \end{aligned} \quad (13-62)$$

⁵Die unmittelbar folgenden Ausführungen sollen als Heuristik verstanden werden.

Hierbei ist $\Delta_\lambda(Q, Q')$ die "Delta-Distribution" für $(\lambda, 1 - \lambda)$ -Systeme auf C_τ , d.h. für ein Feld h vom Gewicht λ gilt

$$h(Q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} h(Q') \cdot \Delta_\lambda(Q, Q'), \quad (13-63)$$

wobei über die Variable Q' integriert wird. Sie ist gegeben durch (siehe (9-49))

$$\Delta_\lambda(Q, Q') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^K f_{n,p}^\lambda(Q) \cdot f_{-n,r}^{1-\lambda}(Q'). \quad (13-64)$$

Im Gegensatz zu Abschnitt 9(d) ist die Entwicklung jetzt im heuristischen, formalen Sinne zu verstehen, da die Summen nicht mehr endlich sind. Rechnen wir den Antikommutator aus

$$\{b(Q), c(Q')\}_+ = \sum_{n,m,p,r} \{b_{n,p}, c_{m,r}\}_+ f_{-n,p}^\lambda(Q) \cdot f_{-m,r}^{1-\lambda}(Q')$$

und vergleichen wir ihn mit (13-64) so erhalten wir für die Koeffizienten genau die Relationen welche in (13-53) gegeben wurden. Deshalb sind die unter (13-48) und (13-49) studierten Darstellungen, Darstellungen für die physikalischen Operatoren.

Der Energie-Impulstensor für $b - c$ -Systeme ist definiert als

$$T(z) = :(1 - \lambda) c(z) \frac{\partial b}{\partial z}(z) - \lambda \frac{dc}{dz}(z) b(z): . \quad (13-65)$$

Hierbei seien $c(z)$ und $b(z)$ lokale Repräsentanten für die c und b Felder, $:\dots:$ bedeutet Normalordnung, auf welche ich gleich näher eingehen werde. Durch direktes Nachrechnen verifiziert man, daß $T(z)$ eine operatorwertige Form vom Gewicht 2 ist. Seine Moden $L_{k,s}$ sind durch

$$T = \sum_{k,s} L_{k,s} \Omega^{k,s} \quad (13-66)$$

gegeben. Normalordnung bedeutet, daß im Produkt zweier Operatoren, der Vernichtungsoperator rechts stehen soll. Da wir allerdings von einer antikommutierenden Struktur ausgehen, muß beim Vertauschen das Vorzeichen geändert werden, damit im Fall, daß beide antikommutieren kein Widerspruch auftritt. Aufgrund der Antikommutatorrelation gilt

$$c_{n,p} \cdot b_{m,r} = -b_{m,r} \cdot c_{n,p} + \delta_m^{-n} \delta_p^r . \quad (13-67)$$

Eine Normalordnung ist (siehe (13-57))

$$:c_{n,p}b_{m,r}: := \begin{cases} c_{n,p}b_{m,r}, & m \geq 0 \\ -b_{m,r}c_{n,p}, & m < 0 . \end{cases} \quad (13-68)$$

Beachte, daß für $n, m < 0$ die Elemente antikommutieren. Damit kann die Normalordnung auch geschrieben werden als

$$:c_{n,p}b_{m,r}: := \begin{cases} c_{n,p}b_{m,r}, & m \neq -n \\ c_{n,p}b_{-n,r}, & m = -n, r \neq p \\ c_{n,p} \cdot b_{-n,p}, & m = -n, r = p, n \leq 0 \\ c_{n,p} \cdot b_{-n,p} - 1, & m = -n, r = p, n > 0 . \end{cases} \quad (13-69)$$

Erst durch die Normalordnung besitzt der Operator T wohldefinierte Moden $L_{k,s}$. Und damit befinden wir uns wieder auf mathematisch sicherem Boden. Setzen wir die Entwicklungen (13-61) in die Definition (13-65) ein, so erhalten wir

$$T = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \sum_{r,p=1}^K :c_{n,p}b_{-m,r}: P(f_{-n,p}^{1-\lambda}, f_{m,r}^\lambda) \quad (13-70)$$

mit der abkürzenden Notation

$$P(h, f) = (1 - \lambda) h \frac{df}{dz} - \lambda \frac{dh}{dz} f , \quad (13-71)$$

wobei f und h mit ihren lokalen Repräsentanten identifiziert werden. Gemäß [H, Lemma 8.1] gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} P(h, f) e = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} L_e(h) f = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} L_e(f) h \quad (13-72)$$

und somit [H, p.151]

$$L_{k,s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\tau} T \cdot e_{k,s} = \sum_{n,m,p,r} C_{(k,s),(m,r)}^{(n,p)}(\lambda) :c_{n,p}b_{-m,r}: . \quad (13-73)$$

Aufgrund der beinahe-graduierten Struktur tauchen zu einem festen Wert von k zu jedem Wert von m nur endlich viele n Werte auf. Erfüllt eine Darstellung V der Clifford-Algebra erzeugt von den Elementen $c_{n,p}$ und $b_{n,p}$ die Bedingung, daß es zu jedem Vektor $v \in V$ ein n_0 gibt, derart daß die $b_{n,p}$ und $c_{n,p}$ für $n \geq n_0$, den Vektor annullieren, sind die Operatoren $L_{k,s}$ wohldefiniert. Unsere Darstellung auf den Wedgeformen erfüllt offensichtlich diese Bedingung.

Theorem 13.11. *Die Moden $L_{k,r}$ des Energie-Impulstensor T des $b - c$ -Systems definieren eine Darstellung einer lokalen zentralen Erweiterung der Vektorfeldalgebra \mathcal{L} . Die zentrale Ladung der Darstellung beträgt*

$$-2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) .$$

Der Kozykel wird gegeben durch

$$\chi(e_{k,r}, e_{l,s}) = \left(\sum_{\substack{n \leq 0 \\ m > 0}} - \sum_{\substack{m \leq 0 \\ n > 0}} \right) C_{(l,s)(m,p)}^{(n,t)}(\lambda) \cdot C_{(k,r)(n,t)}^{(m,p)}(\lambda) . \quad (13-74)$$

Der Beweisgang den ich hier präsentiere, folgt dem Beweisgang der Sugawara-Konstruktion. Jedoch sind die Details deutlich einfacher.

Proposition 13.12. *Es gilt*

(a)

$$[L_{k,r}, c_{l,s}] = \sum_{n,p} C_{(k,r)(l,s)}^{(n,p)}(\lambda) c_{n,p} , \quad (13-75)$$

(b)

$$[L_{k,r}, b_{l,s}] = \sum_{n,p} C_{(k,r)(l,s)}^{(n,p)}(1 - \lambda) b_{n,p} = - \sum_{n,p} C_{(k,r)(-n,p)}^{(-l,s)}(\lambda) b_{n,p} . \quad (13-76)$$

Beweis. Ich verwende die Abschneidefunktion $\psi(\epsilon n)$ aus (11-21) und definiere

$$L_{k,r}(\epsilon) = \sum_{n,m,p,t} C_{(k,r)(m,p)}^{(n,t)}(\lambda) :c_{n,t} b_{-m,p}: \psi(\epsilon n) . \quad (13-77)$$

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 11(b) gilt, angewendet auf einen festen Vektor $v \in V$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_{k,r}(\epsilon)v = L_{k,r}v$. Der Ausdruck (13-77) ohne Normalordnung sei mit $\tilde{L}_{k,r}(\epsilon)$ bezeichnet. Für $\epsilon \neq 0$ ist er wohldefiniert. Es gilt $[\tilde{L}_{k,r}(\epsilon), u] = [L_{k,r}(\epsilon), u]$. D.h. solange wir $\epsilon \neq 0$ halten, können wir unter dem Kommutator die Normalordnung ignorieren. Es gilt

$$\begin{aligned} [c_{n,t} \cdot b_{-m,r}, c_{l,s}] &= c_{n,t} \cdot b_{-m,r} \cdot c_{l,s} - c_{l,s} \cdot c_{n,t} \cdot b_{-m,r} = \\ &= c_{n,t} (b_{-m,r} \cdot c_{l,s} + c_{l,s} \cdot b_{-m,r}) = c_{n,t} \cdot \delta_m^l \delta_s^r \end{aligned}$$

und somit

$$[L_{k,r}(\varepsilon), c_{l,s}] = \sum_{m,n,s,t} C_{(k,r)(m,p)}^{(n,t)}(\lambda) c_{n,t} \delta_m^l \delta_s^p \psi(\varepsilon n) = \sum_{n,t} C_{(k,r)(l,s)}^{(n,t)}(\lambda) c_{n,t} \delta_m^l \delta_s^p \psi(\varepsilon n).$$

Hier kann man ohne Probleme zu $\varepsilon = 0$ übergehen. Dies zeigt (a).

Teil (b) folgt entsprechend. Die zweite Form ergibt sich aus dem Lemma 13.8

Bemerkung. Die Aussage der Proposition kann beschrieben werden als

$$[L_{k,r}, c_f] = c_g, \quad \text{mit} \quad g = L_{e_{k,r}}(f) \quad (13-78)$$

bzw.

$$[L_{k,r}, b_f] = b_g, \quad \text{mit} \quad g = L_{e_{k,r}}(g). \quad (13-79)$$

Man vergleiche diese Relationen mit (13-60).

Beweis von Theorem 13.11. Wir betrachten $[L_{k,r}, L_{l,s}(\varepsilon)]$ wiederum zuerst für $\varepsilon \neq 0$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir den gewünschten Operator. Es gilt

$$[L_{k,r}, L_{l,s}(\varepsilon)] = \sum_{n,m,t,p} C_{(l,s)(m,p)}^{(n,t)}(\lambda) [L_{k,r}, :c_{n,t} b_{-m,p}:] \psi(\varepsilon n). \quad (13-80)$$

Solange $\varepsilon \neq 0$ können wir die Normalordnung ignorieren. Mit Prop. 13.12 erhalten wir

$$\begin{aligned} [L_{k,r}, c_{n,t} b_{-m,p}] &= [L_{k,r}, c_{n,t}] b_{-m,p} + c_{n,t} [L_{k,r}, b_{-m,p}] = \\ &= \sum_{h,u} \left(C_{(k,r)(n,t)}^{(h,u)}(\lambda) c_{h,u} b_{-m,p} - C_{(k,r)(h,u)}^{(m,p)}(\lambda) c_{n,t} b_{-h,u} \right). \end{aligned}$$

Setzt man dieses in (13-80) ein und spaltet die Summe auf, so erhält man

$$\begin{aligned} [L_{k,r}, L_{l,s}(\varepsilon)] &= \sum_{\substack{m,n,h \\ p,t,u}} C_{(l,s)(m,p)}^{(n,t)}(\lambda) C_{(k,r)(n,t)}^{(h,u)}(\lambda) c_{h,u} b_{-m,p} \psi(\varepsilon n) \\ &\quad - \sum_{\substack{m,n,h \\ p,t,u}} C_{(l,s)(m,p)}^{(n,t)}(\lambda) C_{(k,r)(h,u)}^{(m,p)}(\lambda) c_{n,t} b_{-h,u} \psi(\varepsilon n). \quad (13-81) \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ machen beide Summen erst nach Übergang zur Normalordnung Sinn. Seien die Summen also normalgeordnet. Dabei entstehen Terme, die wir gleich

betrachten wollen. Zuerst lassen wir für die normalgeordneten Teile $\varepsilon \rightarrow 0$ gehen und führen in der zweiten Summe die Umbenennung $(n, t) \rightarrow (h, u) \rightarrow (m, p) \rightarrow (n, t)$ durch. Die normalgeordneten Teile können zusammengefaßt werden zu

$$\sum_{\substack{m, n, h \\ p, t, u}} \left(C_{(l, s)(m, p)}^{(n, t)}(\lambda) C_{(k, r)(n, t)}^{(h, u)}(\lambda) - C_{(l, s)(m, p)}^{(h, u)}(\lambda) C_{(k, r)(m, p)}^{(n, t)}(\lambda) \right) :c_{h, u} b_{-m, p} : .$$

Da \mathcal{F}^λ ein \mathcal{L} -Modul ist, kann man dies umschreiben zu

$$\sum_{n, t} C_{(k, r)(l, s)}^{(n, t)}(-1) \left(\sum_{m, n, p, u} C_{(n, t)(m, p)}^{(h, u)}(\lambda) :c_{h, u} b_{-m, p} : \right) = \sum_{n, t} C_{(k, r)(l, s)}^{(n, t)}(-1) L_{n, t} .$$

Wir erhalten somit, daß ohne Berücksichtigung der durch die Normalordnung auftretenden Zusatzterme die $L_{k, r}$ eine Darstellung der Algebra \mathcal{L} sind. Die Zerlegung macht aber nur dann Sinn, wenn die abgespalteten Terme auch im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ existieren. Aufgrund der Relationen (13-69) sind Normalordnungsterme in der 1. Summe von (13-81) nur für $h = m > 0$ und $u = p$ und in der 2. Summe für $n = h > 0$ und $u = t$ aufzunehmen. Somit addieren sich die zusätzlichen Terme zu

$$\sum_{\substack{n \\ m > 0 \\ p, t}} C_{(l, s)(m, p)}^{(n, t)}(\lambda) C_{(k, r)(n, t)}^{(m, p)}(\lambda) \psi(\varepsilon n) - \sum_{\substack{m \\ n > 0 \\ p, t}} C_{(l, s)(m, p)}^{(n, t)}(\lambda) C_{(k, r)(n, t)}^{(m, p)}(\lambda) \psi(\varepsilon n) .$$

Spalten wir diese Summe auf in $(n, m > 0) = (n \leq 0, m > 0) + (n > 0, m > 0)$ bzw. $(n > 0, m) = (n > 0, m > 0) + (n > 0, m \leq 0)$, so annullieren sich die entsprechenden Anteile und es bleibt

$$\sum_{\substack{n \leq 0 \\ m > 0 \\ p, t}} C_{(l, s)(m, p)}^{(n, t)}(\lambda) C_{(k, r)(n, t)}^{(m, p)}(\lambda) \psi(\varepsilon n) - \sum_{\substack{m \leq 0 \\ n > 0 \\ p, t}} C_{(l, s)(m, p)}^{(n, t)}(\lambda) C_{(k, r)(n, t)}^{(m, p)}(\lambda) \psi(\varepsilon n) . \quad (13-82)$$

Aufgrund der beinahe-graduerten Struktur des Moduls \mathcal{F}^λ gilt

$$C_{(l, s)(m, p)}^{(n, t)}(\lambda) \neq 0 \implies l + m \leq n \leq l + m + R,$$

$$C_{(k, r)(n, t)}^{(m, p)}(\lambda) \neq 0 \implies k + n \leq m \leq k + n + R$$

mit einer Konstanten R , die unabhängig von n und m ist. Dies bedeutet zum einen, daß die Einzelsummen in (13-82) wohldefiniert sind. Andererseits erhalten wir genau

die behauptete Form des Kozykels. Daß es sich um einen Kozykel handelt ist klar, da die Jacobi-Identität sowohl für die $L_{k,r}$ als auch für die Koeffizienten $C_{\dots}(-1)$ gilt. Addiert man die beiden Bedingungen für das Nichtverschwinden, so sieht man daß die Summe höchstens dann nicht verschwindet wenn $-2R \leq l + k \leq 0$ gilt. Der Kozykel ist also lokal. Berechnet man den Kozykel speziell für $[L_{k,r}, L_{-k,r}]$ so erhält man

$$\chi_{(k,r),(-k,r)} = \sum_{\substack{n \leq 0 \\ m > 0 \\ p,t}} C_{(-k,r)(m,p)}^{(n,t)}(\lambda) C_{(k,r)(n,t)}^{(m,p)}(\lambda) - \sum_{\substack{m \leq 0 \\ n > 0 \\ p,t}} C_{(-k,s)(m,p)}^{(n,t)}(\lambda) C_{(k,r)(n,t)}^{(m,p)}(\lambda) .$$

Dies ist aber genau der Kozykel, welcher bei der Aktion der Vektorfelder auf den semi-infiniten Wedgeprodukten vom Gewicht 2 auftritt, wenn man ihn auf dem Vakuumvektor vom Niveau 1 operieren läßt (siehe die entsprechende Argumentation im Beweis von Lemma 11.11). Somit gilt für die zentrale Ladung ebenfalls $c = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)$, vergleiche hierzu auch (13-32). \square

Wie in [147] ausgeführt (der dort behandelte 2-Punktfall überträgt sich entsprechend auf den Mehrpunktfall) induziert die Quantisierungsbedingung für die Orts- und Impulsvariablen auf der Weltfläche des bosonischen Strings im D -dimensionalen Raum, daß die Theorie als Darstellung einer D -dimensionalen Heisenberg-Algebra erhalten werden kann. Der Energie-Impulstensor für diese Theorie ist durch den Sugawara-Operator gegeben. Für die Darstellung der dadurch gegebenen Darstellung der zentralerweiterten Vektorfeldalgebra erhalten wir aufgrund der Ergebnisse in Abschnitt 11, daß sie mit zentraler Ladung $c = \dim \mathfrak{g} = D$ operiert, siehe Bemerkung 11.18. Für die vollständige Theorie hat man die Geisterfelder, d.h. ein $b - c$ -System vom Gewicht 2, hinzuzunehmen. Dort operiert die zentralerweiterte Vektorfeldalgebra mit der zentralen Ladung -26 . Akzeptieren wir die Aussage über die Eindeutigkeit der lokalen Erweiterung der Vektorfeldalgebra, so handelt es sich hierbei um dieselbe zentrale Erweiterung. Der Darstellungsraum der vollständigen bosonischen Stringtheorie ist das Tensorprodukt der zwei Darstellungen. Anomaliefreiheit bedeutet, daß in der Gesamtheorie die Vektorfelder ohne zentrale Erweiterung operieren. Dies bedeutet, daß die zentrale Erweiterung mit der zentralen Ladung Null operieren muß. Da sich bei der Tensorproduktbildung gerade die zentralen Ladungen addieren, bedeutet dies, daß für den bosonischen String die Raumzeitdimension 26 sein muß.

14. Ein Beispiel einer Entartung im Fall des Torus

In Diplomarbeiten an der Universität Karlsruhe (Deck [57], [58] und Ruffing [176]) wurde der Fall des Torus in der 2-Punkt- bzw. 3- und 4-Punktsituation und gewissen, natürlichen, Punktewahlen untersucht. Ein Teil der Ergebnisse, bzw. Weiterentwicklungen davon sind auch in [C] zu finden. Verwandte Ergebnisse in diese Richtung wurden auch von Anzaldo-Meneses [5] erzielt. Die Punkte an denen Pole erlaubt sind, seien kurz als Markierungen bezeichnet.

Der Torus kann (bis auf komplexe Isomorphie) gegeben werden als $T = T_\tau = \mathbb{C}/L_\tau$ mit dem Gitter $L = L_\tau = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = m + n\tau, \quad m, n \in \mathbb{Z} \}$ und $\tau \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \tau > 0$. Insbesondere besitzt der Torus eine Gruppenstruktur, welche von \mathbb{C} herkommt. Das Nullelement ist gegeben durch die Klasse deren Elemente gerade die Gitterelemente sind. Da das kanonische Bündel \mathcal{K} im Torusfall das triviale Bündel \mathcal{O} ist, sind alle λ -Formen global durch Funktionen auf dem Torus beschreibbar. Die Funktionen auf dem Torus können ihrerseits wiederum gegeben werden durch die Funktionen auf \mathbb{C} , die invariant sind unter dem Gitter L_τ . Per Definition sind dies die doppeltperiodischen Funktionen. Auf der funktionentheoretischen Seite können diese als rationale Ausdrücke in der Weierstraßschen \wp -Funktion und ihrer Ableitung \wp' dargestellt werden. Die Weierstraßschen \wp -Funktion erfüllt die wohlbekannte Differentialgleichung

$$\wp'(z, \tau)^2 = 4\wp(z, \tau)^3 - g_2(\tau)\wp(z, \tau) - g_3(\tau), \quad (14-1)$$

mit Koeffizienten $g_2(\tau), g_3(\tau)$, die vom Gitterparameter τ abhängen.¹ Die Diskriminante $\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$ ist für die zulässigen Werte von τ verschieden von Null. Zur weiteren Referenz seien die folgenden wohlbekannteten Tatsachen notiert: \wp hat einen Pol zweiter Ordnung an den Gitterpunkten und ist eine gerade Funktion. \wp' hat einen Pol dritter Ordnung an den Gitterpunkten und ist eine

¹Die $g_2(\tau), g_3(\tau)$ sind Eisenstein-Reihen zum Gitter L , siehe etwa [H, p.35].

ungerade Funktion. Außerhalb der Gitterpunkte sind beide holomorph. \wp' hat als Nullstellen genau die primitiven 2-Torsionspunkten von T . Dabei heißt ein Punkt $P \in T$ ein n -Torsionspunkt (mit $n \in \mathbb{N}$) falls $n \cdot P = 0 \bmod L$. Er heißt primitiver n -Torsionspunkt, falls er kein m -Torsionspunkt ist mit $m < n$. Die primitiven 2-Torsionspunkte sind explizit angebar:

$$w_1 = \frac{1}{2}, \quad w_2 = \frac{1 + \tau}{2}, \quad w_3 = \frac{\tau}{2}. \quad (14-2)$$

Wir definieren $e_i(\tau) = \wp(w_i, \tau)$ und können (14-1) umformulieren zu

$$\wp'(z, \tau)^2 = 4(\wp(z, \tau) - e_1(\tau))(\wp(z, \tau) - e_2(\tau))(\wp(z, \tau) - e_3(\tau)). \quad (14-3)$$

Die Bedingung $\Delta(\tau) \neq 0$ ist äquivalent zur Tatsache, daß alle $e_i(\tau)$ verschieden sind.² Wir erhalten $e_1(\tau) + e_2(\tau) + e_3(\tau) = 0$.

Hier sei die 2-Punktsituation mit

$$P = 0 \bmod L, \quad Q = 1/2 \bmod L,$$

bzw. die 3-Punktsituation mit

$$P = 0 \bmod L, \quad Q_1 = 1/2 + q \bmod L, \quad Q_2 = 1/2 - q \bmod L$$

mit $q \neq 0 \bmod L$, $q \neq 1/2 \bmod L$ studiert. Im 2-Punktfall ist Q ein primitiver 2-Torsionspunkt.

In [C] werden die Differentialformen

$$\omega = \widehat{\omega}_0(z) dz = -\frac{1}{2} \frac{\wp'(z)}{\wp(z) - e_1} dz \quad (14-4)$$

$$\omega_q(z) = \widehat{\omega}_q(z) dz = -\frac{1}{2} \frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(1/2 + q)} dz \quad (14-5)$$

eingeführt. Sie erfüllen die Bedingungen für das Differential ρ aus Abschnitt 9(a). Desweiteren wird in [C] gezeigt, daß

$$A_n(z) := a_n (\wp(z) - \wp(1/2 + q))^{-n/2}, \quad n \in 2\mathbb{Z}, \quad (14-6)$$

$$A_\alpha(z) := \widehat{\omega}_q(z) A_{\alpha+1}(z), \quad \alpha \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad (14-7)$$

²Zur weiteren Information siehe die üblichen Standardlehrbücher zur Funktionentheorie, siehe auch [D].

mit $a_n \in \mathbb{C}$ geeignete Normierungskonstanten, eine Basis für \mathcal{A} bilden und somit die Elemente $A_n \frac{d}{dz}$ eine Basis für \mathcal{L} darstellen. Dies gilt sowohl im 3-Punktfall als auch, wenn man $q = 0$ setzt, im 2-Punktfall. Der Grad der Elemente ist durch den Index n , bzw. durch, von λ abhängige, Shifts gegeben. Es ergibt sich eine beinahe-graduierte Struktur.³

In [C] werden die Strukturkonstanten explizit berechnet. Die Werte drücken sich in den Werten von $\wp(1/2 + q)$ und in den Parametern e_1, e_2 und e_3 aus. Die Abhängigkeit von $\wp(1/2 + q)$ entspricht einer Variation der Lage der Polstellen und die Abhängigkeit von e_1, e_2, e_3 entspricht einer Variation des Gitters und somit der komplexen Struktur des Torus T_τ . In [C] wurde gezeigt, daß für $q \rightarrow 0$ die 2-Punktalgebra erhalten wird, wie sie von Deck [57],[58] studiert wurde. Setzt man weiter dann $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, so erhält man die Witt-Algebra in einer formalen Weise. Der Fall $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ entspricht vom Standpunkt der algebraischen Geometrie der Fall der Spitzenkurve (auch Neilsche Parabel genannt), d.h. einem "Torus mit einer Spitzensingularität". Ihre Desingularisierung ist die projektive Gerade. Unter der Voraussetzung, daß sich alles gutartig unter der Deformation verhält, ist eine Beziehung der Objekte auf dem Torus, zu den entsprechenden auf der projektiven Gerade zu erwarten.

Es ist sogar so, daß für viele Zwecke (siehe auch im Zusammenhang mit der Verlinde-Formel [73]) die maximale Degeneration einer beliebigen nichtsingulären Kurve in eine Vereinigung von mehreren \mathbb{P}^1 -Komponenten eine wesentliche Beweis-hilfe sein kann. In der Philosophie der Quantisierung der Feldtheorie muß man über alle möglichen Konfigurationen "summieren". Die Konfigurationen "entsprechen" den Punkten eines Modulraums. Um einen sinnvollen Formalismus zu erhalten, ist man gezwungen den Modulraum der Kurve zu kompaktifizieren, d.h. singuläre Kurven zuzulassen.⁴ Siehe hierzu [194].

Angeregt durch diese Ergebnisse, habe ich konkrete Beispiele für die Torusdegeneration im 2-Punkt und 3-Punktfall ausgeführt, siehe [I]. Dabei zeigt sich wie die

³Im 3-Punktfall ist dies nicht genau die Konvention der Basiswahl, welche ich in [H] benützt habe. Dort würde diese Situation durch 2 Eintrittspunkte und 1 Austrittspunkt beschrieben. In den zweidimensionalen Räumen der homogenen Elementen ist dann jeweils ein Basiswechsel vorzunehmen. Siehe hierzu weiter unten den \mathbb{P}^1 -Fall.

⁴Eine sinnvolle Kompaktifizierung ist nur möglich, wenn man lediglich "stabile singuläre Kurven" hinzunimmt. Obige Spitzenkurve ist nicht stabil, die weiter unten auftretende Knotenkurve ist es.

Degeneration erzwingt, daß man von der N -Punktsituation auf dem Torus auf eine M -Punktsituation mit $M > N$ auf Geschlecht Null übergehen muß. Dies ist ein weiteres Argument für die Notwendigkeit Mehrpunktsituationen zu betrachten.

Um die Deformation zu beschreiben, ist der Übergang vom komplex-analytischen Bild zum algebraisch-geometrischen Bild adäquater. Hierzu wird der Torus T_τ mit einem beliebigen, aber fixierten, τ in die komplexe projektive Ebene \mathbb{P}^2 mit der Abbildung

$$\Phi : T \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad z \bmod L \mapsto \begin{cases} (\wp(z) : \wp'(z) : 1), & z \notin L \\ (0 : 1 : 0) & z \in L \end{cases} \quad (14-8)$$

eingebettet. Seien die homogenen Koordinaten in \mathbb{P}^2 durch $(x : y : z)$ gegeben, so ist das Bild von Φ die Nullstellenmenge des homogenen Polynoms

$$Y^2Z - 4(X - e_1(\tau)Z)(X - e_2(\tau)Z)(X - e_3(\tau)Z). \quad (14-9)$$

Es handelt sich um eine nichtsinguläre kubische Kurve, d.h. eine elliptische Kurve E . In der Tat ist Φ ein analytischer Isomorphismus auf sein Bild. Umgekehrt kann jede Nullstellenmenge eines homogenen kubischen Polynoms die eine nichtsinguläre Kurve ist, nach einer geeigneten Basiswahl beschrieben werden als Nullstellenmenge eines Polynoms vom Typus (14-9) mit $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}$, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ herkommend von einer analytischen Situation. Ich möchte bemerken, daß in (14-9) alle e_i gleichberechtigt sind. Dies entspricht der Tatsache, daß, vom algebraisch-geometrischen Standpunkt aus, alle primitiven 2-Torsionpunkte gleichberechtigt sind. Es sei definiert

$$B := \{(e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{C}^3 \mid e_1 + e_2 + e_3 = 0, e_i \neq e_j \text{ für } i \neq j\}$$

Es ist eine offene Untervarietät der affinen (sogar linearen) Varietät

$$\widehat{B} := \{(e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{C}^3 \mid e_1 + e_2 + e_3 = 0\}.$$

Gleichung (14-9) definiert eine Familie \mathcal{X} nichtsingulärer kubischen Kurven über der Basis B . Offensichtlich macht (14-9) auch für ganz \widehat{B} Sinn. Die zusätzlichen Mitglieder der Familie sind die singulären kubischen Kurven, welche weiter unten behandelt werden.

Im folgenden sei der Punkt $0 \bmod L$ immer ein Punkt aus A , der Menge der Markierungen. Er habe nichts zu tun mit den Singularitäten, die bei der Entartung der

Kurve auftreten. Damit ist es möglich und nützlich, daß wir zu affinen Koordinaten übergehen können. Diese erhalten wir indem wir die dritte Koordinate auf 1 setzen. Sei der Punkt $(0 : 1 : 0)$ durch das Symbol ∞ repräsentiert, dann können wir (14-8) umschreiben zu

$$z \bmod L \mapsto (\wp(z), \wp'(z)), \quad z \notin L, \quad \text{und} \quad L \mapsto \infty. \quad (14-10)$$

Der affine Teil der elliptischen Kurve ist gegeben als Nullstellenmenge des Polynoms

$$Y^2 - 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3). \quad (14-11)$$

Unter dieser Identifikation entspricht der affinen Koordinate X die Funktion \wp und der affinen Koordinate Y die Funktion \wp' . Der Körper der meromorphen Funktionen auf dem Torus entspricht dem Körper der rationalen Funktionen auf der Kurve E . Dieser ist gegeben durch

$$\mathbb{C}(E) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - f(X)), \quad f(T) = 4(T - e_1)(T - e_2)(T - e_3). \quad (14-12)$$

Jede meromorphe Funktion auf dem Torus kann als rationale Funktion (d.h. als Funktion die Quotient zweier Polynome ist) in X und Y gegeben werden. Tatsächlich zeigt (14-12), daß sie als Summe einer rationale Funktion in X und einer weiteren rationalen Funktion in X multipliziert mit Y gegeben werden kann. Eine Funktion f heißt regulär auf einer Teilmenge U der Kurve E , falls f als Quotient zweier Polynome gegeben werden kann derart, daß das Nennerpolynom keine Nullstellen in U besitzt. Reguläre Funktionen entsprechen holomorphen Funktionen. Wegen dieser Äquivalenz werde ich meist rationale (reguläre) Funktionen meromorphe (holomorphe) Funktionen nennen.

Wir haben nun die Polstellen unserer Formen zu betrachten. Natürliche Wahlen sind die n -Torsionpunkte. Ich betrachte die folgenden Fälle:

Fall A. Der 2-Punktfall: Hier wählten wir bereits oben $z_0 = 0$ und $z_1 = 1/2$ im analytischen Bild. In der Beschreibung durch die elliptische Kurve entspricht dies dem Punkt ∞ und dem Punkt mit den affinen Koordinates $(e_1, 0)$. Eine andere Wahl eines 2-Torsionpunkts statt $z_1 = 1/2$ (wie es etwa in [36] getan wurde) ergibt eine isomorphe Algebra.

Fall B. Der 3-Punktfall. Hier wähle ich $z_0 = 0$, $z_1 = 1/2 + q$ und $z_2 = 1/2 - q$ mit den zwei Unterfällen $q = \tau/4$ und $q = 1/2 + \tau/4$. In beiden

Fällen sind z_1 und z_2 primitive 4-Torsionspunkte. Diese Werte sind die zwei Paare von Lösungen von $2 \cdot (z \bmod L) = \tau/2 \bmod L$. Auf der elliptischen Kurve entspricht diese Punktewahl den Punkten ∞ , (a, b) und $(a, -b)$ mit

$$a = \wp(1/2 + q), \quad b = \wp'(1/2 + q) = \sqrt{4(a - e_1)(a - e_2)(a - e_3)}. \quad (14-13)$$

Beide (a, b) und $(a, -b)$ treten als mögliche Polstellen auf. Damit gibt es keine Mehrdeutigkeit im Vorzeichen der Quadratwurzel von b . Da wir die algebraischen Parameter e_1, e_2 und e_3 variieren wollen, müssen wir a (und damit automatisch auch b) in diesen Größen ausdrücken. Mit dem Additionstheorem der \wp -Funktion (siehe [71]) erhält man

$$a(e_1, e_2, e_3) = e_3 + \sqrt{e_3 - e_1} \sqrt{e_3 - e_2}. \quad (14-14)$$

Hierbei muß das Vorzeichen des Produkts der Quadratwurzeln gemäß den Regeln in [71] gewählt werden. Die beiden auftretenden Möglichkeiten entsprechen den zwei Wahlen von q . Somit erhalten wir zwei Paare von Werten (a_1, b_1) , $(a_1, -b_1)$ und (a_2, b_2) , $(a_2, -b_2)$.

Indem wir $q = 0$ im Fall B setzen erhalten wir formal den 2-Punktfall. Durch Setzen von $(a_0, b_0) := (e_1, 0)$ erhalten wir eine elegante kompakte Notation.

Proposition 14.1. [1] *Eine Basis des Vektorraums der meromorphen (rationalen) Funktionen die holomorph außerhalb der Punkte ∞ und $(e_1, 0)$ im 2-Punktfall ($s = 0$), bzw. ∞ , (a_s, b_s) und $(a_s, -b_s)$ im 3-Punktfall ($s = 1, 2$) sind ist auf der elliptischen Kurve E gegeben durch die rationalen Funktionen*

$$A_{2k}^s := -(X - a_s)^{-k}, \quad A_{2k-1}^s := -\frac{1}{2}Y(X - a_s)^{-k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (14-15)$$

($s = 0, 1, 2$ bezeichne die verschiedenen Fälle.)

Mit den folgenden Tatsachen über die Ordnungen der Koordinatenfunktionen an den Punkten der elliptischen Kurve ($\gamma \in \mathbb{C}$, $a \neq e_1, e_2, e_3$)

$$\begin{aligned} \text{ord}_\infty(X - \gamma) &= -2, & \text{ord}_\infty(Y) &= -3, \\ \text{ord}_{(e_i, 0)}(X - e_i) &= 2, & \text{ord}_{(e_i, 0)}(Y) &= 1, \\ \text{ord}_{(a, b)}(X - a) &= 1, & \text{ord}_{(a, -b)}(X - a) &= 1, \end{aligned} \quad (14-16)$$

erhält man

Proposition 14.2. *Die Divisoren der Basiselemente lauten:*

(a) *im 2-Punktfall:*

$$\begin{aligned}(A_{2k}^0) &= 2k[\infty] - 2k[(e_1, 0)], \\ (A_{2k+1}^0) &= (2k-1)[\infty] - (2k+1)[(e_1, 0)] + [(e_2, 0)] + [(e_3, 0)],\end{aligned}$$

(b) *in den 3-Punktfällen:*

$$\begin{aligned}(A_{2k}^s) &= 2k[\infty] - k[(a, b)] - k[(a, -b)], \\ (A_{2k+1}^s) &= (2k-1)[\infty] - (k+1)[(a_s, b_s)] - (k+1)[(a_s, -b_s)] \\ &\quad + [(e_1, 0)] + [(e_2, 0)] + [(e_3, 0)].\end{aligned}$$

Im Geschlecht 1 Fall ist das kanonische Bündel \mathcal{K} und somit all seine Tensorpotenzen trivial. Ist f eine meromorphe Funktion auf dem Torus T dann ist $f(z)(dz)^\lambda$ ein meromorpher Schnitt des Bündels $\mathcal{K}^{\otimes \lambda} = \mathcal{K}^\lambda$. Das analytische Differential dz kann in algebraischer Weise durch

$$dz = \frac{dX}{Y} \tag{14-17}$$

ausgedrückt werden. Die Funktion $(X - \gamma)$ ist für $\gamma \notin \{e_1, e_2, e_3\}$ eine uniformisierende Variable bei $(\gamma, \pm\sqrt{f(\gamma)})$ und Y verschwindet dort nicht. Für $\gamma = e_1, e_2$ oder e_3 verschwindet die Funktion $(X - \gamma)$ von zweiter Ordnung bei $(e_i, 0)$ und kompensiert hiermit den Pol von $1/Y$ an diesem Punkt. Für die Tensorpotenzen erhalten wir

$$(dz)^\lambda = Y^{-\lambda}(dX)^\lambda, \quad \frac{d}{dz} = Y \frac{d}{dX}. \tag{14-18}$$

Hierbei habe ich für den Spezialfall $\lambda = -1$ die übliche Schreibweise als Derivation benützt. Damit ist eine Basis der Schnitte in \mathcal{K}^λ mit demselben Regularitätsverhalten wie in Prop. 14.1 durch die Elemente

$$f_n^\lambda := A_{n-\lambda}^s Y^{-\lambda} (dX)^\lambda, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{14-19}$$

gegeben. Im Fall der Vektorfelder erhalten wir aus Prop. 14.1 nach Ersetzen von Y^2 mit Hilfe des Polynoms f

Proposition 14.3. *Eine Basis des Raums der meromorphen (rationalen) Vektorfelder, die holomorph (regulär) außerhalb der Punkte ∞ und $(e_1, 0)$ im 2-Punktfall (entspricht $s = 0$), bzw. ∞ , (a_s, b_s) und $(a_s, -b_s)$ im 3-Punktfall ($s = 1, 2$) sind, ist auf der elliptischen Kurve E gegeben durch die Elemente*

$$V_{2k-1}^s := -(X - a_s)^{-k} Y \frac{d}{dX}, \quad V_{2k}^s := -\frac{1}{2} f(X) (X - a_s)^{-k-2} \frac{d}{dX}, \quad (14-20)$$

wobei k alle ganzen Zahlen durchläuft und $f(X) = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)$ ist.

Durch $\deg(V_n) = n$ wird auf \mathcal{L} ein Grad eingeführt.

Proposition 14.4. [I],[C] *Die Lie-Algebrenstruktur der Krichever-Novikov-Vektorfeldalgebra \mathcal{L} ist im 2-Punktfall durch die Strukturgleichungen in den Erzeugenden von Prop 14.3 gegeben wie folgt: (hierbei seien die ungeraden Indizes mit α und β bezeichnet, die Geraden mit n und m)*

$$\begin{aligned} [V_\alpha, V_\beta] &= (\beta - \alpha) V_{\alpha+\beta} \\ [V_n, V_m] &= (m - n) \{ V_{n+m} + 3e_1 V_{n+m+2} \\ &\quad + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) V_{n+m+4} \} \\ [V_\alpha, V_n] &= (n - \alpha) V_{n+\alpha} + (n - \alpha + 1) 3e_1 V_{n+\alpha+2} \\ &\quad + (n - \alpha + 2)(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) V_{n+\alpha+4}, \end{aligned} \quad (14-21)$$

Ist d die Summe der Grade der Erzeugenden auf der linken Seite, so gilt für den Grad d' der Elemente auf der rechten Seite $d \leq d' \leq d + 4$. Dies bedeutet, wie wir natürlich bereits aus der allgemeinen Theorie wissen, daß eine beinahe-graduierte Struktur vorliegt. Entsprechende Strukturgleichung für die 3-Punktfälle sind in [I] gegeben und sollen hier nicht wiederholt werden.

Die singulären Mitglieder der Familie von kubischen Kurven, welche durch das Polynom (14-11) gegeben ist, sind genau die Kurven, die über den Punkten in \widehat{B} liegen bei denen mindestens zwei der e_i zusammenfallen. Wir erhalten zwei verschiedenen Situationen.

Wenn nur zwei zusammenfallen, etwa $e_1 = e_2 = e$, ergibt sich die Knotenkurve E_N definiert durch

$$Y^2 = 4(X - e)^2(X + 2e). \quad (14-22)$$

Wegen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ besitzt der dritte den Wert $-2e$.

Wenn alle drei denselben Wert haben, der dann notwendigerweise gleich 0 ist, erhalten wir die Spitzenkurve E_C (die Neilsche Parabel)

$$Y^2 = X^3 . \quad (14-23)$$

Die Singularität auf E_N ist der Punkt $(e, 0)$. Er ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Die Singularität auf E_C ist der Punkt $(0, 0)$. Er ist eine Spitze. Der Punkt $\infty = (0 : 1 : 0)$ liegt jeweils auf der kubischen Kurve, ist aber keine Singularität.

In beiden Fällen ist die komplex-projektive Gerade \mathbb{P}^1 die Desingularisierung. Die Punkte von \mathbb{P}^1 seien durch die homogenen Koordinaten $(t : s)$ gegeben. Wir definieren die folgenden Abbildungen $\psi_N, \psi_C : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ durch

$$\psi_N(t : s) = (t^2 s - 2e s^3 : 2t(t^2 - 3e s^2) : s^3), \quad (14-24)$$

$$\psi_C(t : s) = (t^2 s : 2t^3 : s^3) . \quad (14-25)$$

Unter diesen Abbildungen korrespondiert der Punkt $\infty = (1 : 0)$ auf \mathbb{P}^1 zum Punkt ∞ (und nur zu diesem) auf den Kurven E_N und E_C . Die Abbildungen werden durch homogene Polynome gegeben. Damit sind es offensichtlich algebraische Abbildungen. Wiederum ist es genug, den affinen Teil zu betrachten (d.h. wir setzen $s = 1$). Die affinen Abbildungen seien mit demselben Symbol bezeichnet. Eine direkte Berechnung zeigt die folgenden Eigenschaften (dies ist natürlich wohlbekannt).

- (1) Bild $\psi_N = E_N$ und Bild $\psi_C = E_C$.
- (2) ψ_C ist 1 : 1.
- (3) Die einzigen Punkte an denen ψ_N nicht 1 : 1 ist, sind die Punkte $t = \sqrt{3e}$ und $t = -\sqrt{3e}$. Diese projizieren beide auf den singulären Punkt $(e, 0)$. Der Punkt $(-2e, 0)$ entspricht $t = 0$. Damit

Proposition 14.5. *Die Abbildungen*

$$\psi_N : \mathbb{P}^1 \rightarrow E_N \quad \text{und} \quad \psi_C : \mathbb{P}^1 \rightarrow E_C$$

sind die eindeutigen Desingularisierungen der Knotenkurve E_N bzw. der Spitzenkurve E_C .

Wir haben nun die markierten Punkte zu betrachten. In allen Fällen bildet $t = \infty$ auf \mathbb{P}^1 auf einen Punkt ab, an dem Pole erlaubt sind.

Es sei daran erinnert, daß die anderen Markierungen gegeben sind durch $(e_1, 0)$ im 2-Punktfall, bzw. (a, b) und $(a, -b)$ im 3-Punktfall. Hierbei ist a und b gegeben durch (14-14), (14-13).

Die Situation im Spitzenfall ist einfach zu beschreiben. Da $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ ist, gehen alle markierten Punkte (a, b) zu der Singularität $(0, 0)$ (sowohl im 2-Punkt- als auch im 3-Punktfall). Auf \mathbb{P}^1 liegen somit die Punkte $t = 0$ und $t = \infty$ über den markierten Punkten der entarteten Kurve.

Im Knotenfall und bei 2 Punkten gibt es 2 verschiedene Entartungen.

(1) Ist $e = e_1$, so wird der markierte Punkt zum singulären Punkt. Damit erhalten wir auf \mathbb{P}^1 zwei Punkte $t_1 = \sqrt{3e}$ und $t_2 = -\sqrt{3e}$, die dem 2. Punkt entsprechen. Wir erhalten \mathbb{P}^1 mit 3 markierten Punkten.

(2) Ist $e \neq e_1$, dann ist der markierte Punkt ein regulärer Punkt. Nur der Punkt $t = 0$ entspricht dem 2. Punkt. Wir erhalten \mathbb{P}^1 mit 2 markierten Punkten.

Die Analyse des 3-Punktfalls [I] soll hier nicht dargestellt werden.

Im folgenden sei immer der 2-Punktfall vorausgesetzt. Wie oben gezeigt wird ein Schnitt von \mathcal{K}_E^λ für eine nichtsinguläre kubische Kurve E gegeben durch⁵

$$w(X, Y) = \sum'_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_k (X - e_1)^{-k} + \beta_k Y (X - e_1)^{-k-1}) \left(\frac{dX}{Y} \right)^\lambda, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}. \quad (14-26)$$

Auf der nichtleeren, offenen Menge der nichtsingulären Punkte machen diese Elemente auch im entarteten Fall, E_N und E_C , Sinn. Ziehen wir die Schnitte via ψ_N , bzw. ψ_C über der offenen Menge der nichtsingulären Punkte zurück, so erhalten wir wohldefinierte meromorphe (rationale) Schnitte von $\mathcal{K}_{\mathbb{P}^1}^\lambda$

$$\psi_N^*(w)(t) = w(X(t), Y(t)) \quad \text{bzw.} \quad \psi_C^*(w)(t) = w(X(t), Y(t)). \quad (14-27)$$

Um deren darstellenden Funktionen zu finden, müssen wir die Ausdrücke für X und Y in der Variablen t einsetzen und das Differential mit Hilfe von dt schreiben. Für die Potenzen des Differentials erhalten wir im Knotenfall

$$\left(\frac{dX}{Y} \right)^\lambda = \frac{1}{(t^2 - 3e)^\lambda} (dt)^\lambda, \quad (14-28)$$

⁵Das Symbol ' bedeutet, daß nur endlich viele Summanden auftauchen.

und im Spitzenfall

$$\left(\frac{dX}{Y}\right)^\lambda = \frac{1}{t^{2\lambda}}(dt)^\lambda. \quad (14-29)$$

Damit sehen wir explizit, daß zusätzliche Pole und Nullstellen (abhängig vom Vorzeichen von λ) an den Punkten, welche über den singulären Punkten liegen, auftreten können. Ein wichtiges Beispiel ist der Pullback des konstanten Differentials $dz = \frac{dX}{Y}$. Wir erhalten

$$\frac{1}{t + \sqrt{3e}} \frac{1}{t - \sqrt{3e}} dt \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{t^2} dt. \quad (14-30)$$

Durch Entartung zur Knotenkurve erhalten wir ein meromorphes Differential mit Polen von der Ordnung 1 an den Punkten $t = \pm\sqrt{3e}$, bzw. durch Entartung zur Spitzenkurve ein meromorphes Differential mit einem Pol von Ordnung 2 bei $t = 0$. Dies sind die Rosenlicht-Differentiale [181].

Hier möchte ich mich auf den Vektorfeldfall ($\lambda = -1$) beschränken. Es treten nur zusätzliche Nullstellen an den Punkten über den Singularitäten auf. Alle Lie-Ableitungen können auf der (Zariski-)offenen Menge der Punkte berechnet werden, welche nichtsinguläre Punkte unter der Entartung bleiben. Damit ist die Lie-Struktur nicht gestört unter der Entartung. Wir erhalten

Proposition 14.6. *Unter dem geometrischen Prozess der Entartung und Desingularisierung erhält man eine, geometrisch induzierte, "Deformation" der Algebra der Vektorfelder auf dem Torus in eine Unteralgebra der Algebra der Vektorfelder auf \mathbb{P}^1 , bestehend aus Vektorfeldern mit Polen nur an den Punkten t für die $(X(t), Y(t))$ ein markierter Punkt auf der ausgearteten kubischen Kurve ist. Die ausgeartete Algebra kann erhalten werden, indem man die Erzeugenden durch ihre Pullbacks ersetzt und die Strukturkonstanten auf ihre jeweiligen Grenzwerte setzt.*

Im Fall der Spitzenentartung gilt für die Überlagerung $X(t) = t^2$ und $Y(t) = 2t^3$. Die Pullbacks berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \psi_C^*(V_{2k-1}) &= \psi_C^*(A_{2k} \left(\frac{dX}{Y}\right)^{-1}) = -t^{-2k+2} \frac{d}{dt} = -l_{-(2k-1)}, \\ \psi_C^*(V_{2k}) &= \psi_C^*(A_{2k+1} \left(\frac{dX}{Y}\right)^{-1}) = -t^{-2k+1} \frac{d}{dt} = -l_{-2k}. \end{aligned} \quad (14-31)$$

Hierbei sind die $l_n = z^{n+1} \frac{d}{dz}$ die Erzeugenden der Vektorfeldalgebra auf \mathbb{P}^1 (mit $A = \{0, \infty\}$). Dies ist die Witt-Algebra, bzw. die Virasoro-Algebra ohne zentralen Term. Das Vorzeichen und die umgekehrte Indizierung (im Vergleich zur sonst üblichen) entspricht der Tatsache, daß der Grad aufgrund der Ordnungen am Punkt ∞ gebildet wird. Damit erhalten wir in der Spitzenentartung (mit den obigen markierten Punkten) durch $\Phi : V_n \mapsto -l_{-n}$ einen Isomorphismus zur vollen Witt-Algebra. Dies stimmt überein mit der Entartung der Strukturgleichungen (14-21) zu

$$[V_n, V_m] = (m - n)V_{n+m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \quad (14-32)$$

Im Knotenfall müssen wir zwei Unterfälle unterscheiden.

(1) Für $e = e_1$ ist der Grenzwert des markierten Punkts eine Singularität. Für den Pullback erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi_C^*(V_{2k-1}) &= \psi_N^* \left(A_{2k} \left(\frac{dX}{Y} \right)^{-1} \right) = -(t + \sqrt{3e})^{-k+1} (t - \sqrt{3e})^{-k+1} \frac{d}{dt}, \\ \psi_C^*(V_{2k}) &= \psi_N^* \left(A_{2k+1} \left(\frac{dX}{Y} \right)^{-1} \right) = -t (t + \sqrt{3e})^{-k} (t - \sqrt{3e})^{-k} \frac{d}{dt}. \end{aligned} \quad (14-33)$$

Damit sieht man explizit, daß auf der Desingularisierung 3 markierte Punkte auftreten. Von einer 2-Punktsituation ausgehend, haben wir eine 3-Punktsituation erhalten. Die Grenzalgebra ist durch den Grenzwert der Strukturgleichungen (14-21) für $e_1 = e_2 = e$ oder $e_1 = e_3 = e$ gegeben

$$\begin{aligned} [V_\alpha, V_\beta] &= (\beta - \alpha)V_{\alpha+\beta} \\ [V_n, V_m] &= (m - n)\{V_{n+m} + 3eV_{n+m+2}\}, \\ [V_\alpha, V_n] &= (n - \alpha)V_{n+\alpha} + (n - \alpha + 1)3eV_{n+\alpha+2}. \end{aligned} \quad (14-34)$$

Weiter unten soll diese Algebra genauer identifiziert werden.

(2) Der nächste Unterfall ist $e_1 \neq e$. Der Grenzwert des markierten Punktes ist keine Singularität. Es gilt $2e + e_1 = 0$. Die Pullbacks sind

$$\begin{aligned} \psi_C^*(V_{2k-1}) &= \psi_N^* \left(A_{2k} \left(\frac{dX}{Y} \right)^{-1} \right) = -t^{-2k} (t + \sqrt{3e})(t - \sqrt{3e}) \frac{d}{dt}, \\ \psi_C^*(V_{2k}) &= \psi_N^* \left(A_{2k+1} \left(\frac{dX}{Y} \right)^{-1} \right) = -t^{-2k-3} (t + \sqrt{3e})^2 (t - \sqrt{3e})^2 \frac{d}{dt}. \end{aligned} \quad (14-35)$$

Pole können an den zwei Punkten ($t = 0$) und ($t = \infty$) auftreten. Damit verlassen wir hier nicht die 2-Punktsituation. Wir erhalten jedoch nicht die volle Virasoro-Algebra, da die derart erhaltenen Vektorfelder Nullstellen bei $t = \pm\sqrt{3e}$ haben müssen. Tatsächlich gibt es noch einen Unterschied in den zwei Formeln von (14-35). Wir erhalten eine zusätzliche Bedingung um die genaue Unteralgebra zu bestimmen. Nur diese Funktionen auf \mathbb{P}^1 (gegeben als Laurentpolynome) können als Pullback von E_N erhalten werden, die $f(\sqrt{3e}) = f(-\sqrt{3e})$ erfüllen. Für gerade Funktionen ist dies automatisch der Fall. Für ungerade Funktionen bedeutet dies, daß sie dort verschwinden müssen. Damit treten nur Funktion erzeugt durch t^{2k} und $t^{2k+1}(t^2 - 3e)$ für $k \in \mathbb{Z}$ auf. (Es sei daran erinnert, daß der zweite Term $t^2 - 3e$ vom Differential kommt.)

Die Strukturgleichungen der Algebra (durch den üblichen Prozeß erhalten) sind

$$\begin{aligned} [V_\alpha, V_\beta] &= (\beta - \alpha)V_{\alpha+\beta} \\ [V_n, V_m] &= (m - n)\{V_{n+m} - 6e V_{n+m+2} \\ &\quad + 9e^2 V_{n+m+4}\} \\ [V_\alpha, V_n] &= (n - \alpha)V_{n+\alpha} + (n - \alpha + 1)(-6e)V_{n+\alpha+2} \\ &\quad + (n - \alpha + 2)9e^2 V_{n+\alpha+4}. \end{aligned} \tag{14-36}$$

Um die obigen Algebren näher zu beschreiben, betrachte ich bestimmte Unter-algebren der Witt-Algebra. Die Vektorfelder, die an den Punkten α und $-\alpha$, mit $\alpha \neq 0, \infty$ verschwinden, sind die Vektorfelder

$$f(t)(t^2 - \alpha^2)\frac{d}{dt} \tag{14-37}$$

mit einem Laurentpolynom $f(t)$ in t . Offensichtlich definieren sie eine Unteralgebra von \mathcal{W} mit der Vektorraumbasis

$$t^k(t^2 - \alpha^2)\frac{d}{dt} = l_{k+1} - \alpha^2 l_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{14-38}$$

Innerhalb dieser Unteralgebra betrachten wir den Unterraum erzeugt durch die Vektorfelder

$$M_{2k-1} := -t^{-2k}(t^2 - \alpha^2)\frac{d}{dt} = -(l_{-(2k-1)} - \alpha^2 l_{-(2k+1)}), \tag{14-39}$$

$$M_{2k} := -t^{-2k-3}(t^2 - \alpha^2)^2\frac{d}{dt} = -(l_{-2k} - 2\alpha^2 l_{-(2k+2)} + \alpha^4 l_{-(2k+4)}). \tag{14-40}$$

Entweder durch direktes Ausrechnen der Lie-Klammer oder durch Berechnung innerhalb der Witt-Algebra sieht man, daß dieser Unterraum eine Unter algebra \mathcal{W}^α von \mathcal{W} ist.

Für $\alpha = \sqrt{3}e$ stimmen die M_n mit den Pullbacks (14-35) überein. Die Abbildung $\Phi : V_n \mapsto M_n$, $n \in \mathbb{Z}$ ergibt die Identifikation der geometrisch induzierten entarteten Algebra (14-36) mit der Algebra \mathcal{W}^α . In [58] wurde eine Beziehung der “deformierten” Algebra im 2-Punktfall mit der Witt-Algebra aufgrund formaler algebraischer Untersuchungen gefunden. Tatsächlich wurde dort versucht (ohne Erfolg) diese mit der gesamten Witt-Algebra zu identifizieren. Nach dem oben Gesagten sehen wir den Grund, warum dies nicht funktionieren konnte.

Ich komme nun zu der Algebra \mathcal{Z}^α der Vektorfelder auf \mathbb{P}^1 , die holomorph außerhalb der Punkte $\alpha, -\alpha$ und ∞ ($\alpha \neq 0, \infty$) sind. In den vorhergehenden Abschnitten, bzw. genauer in [H],[G], wurde eine Methode eingeführt um eine Basis für diese Algebra zu erhalten. Die Eingangspunkte seien $\{\alpha, -\alpha\}$ und der Ausgangspunkt sei $\{\infty\}$.⁶ Die Algebra ist erzeugt (als Vektorraum) durch Elemente $e_{n,1}$ und $e_{n,2}$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Deren Divisoren sind

$$\begin{aligned}(e_{n,1}) &= (n+1)[\alpha] + (n+2)[- \alpha] + (-2n-1)[\infty], \\ (e_{n,2}) &= (n+2)[\alpha] + (n+1)[- \alpha] + (-2n-1)[\infty].\end{aligned}$$

Dies sind die Erzeugenden vom Grad n . In diesem Unterraum der Elemente vom Grad n können wir auch symmetrische und antisymmetrische Erzeugende H_n und G_n wählen. H_n ist die eindeutige Linearkombination (bis auf Multiplikation mit einem Skalar) von $e_{n,1}$ und $e_{n,2}$ mit $\text{ord}_\infty(H_n) = -2n$, G_n ist die eindeutige Linearkombination (bis auf Multiplikation mit einem Skalar) von $e_{n,1}$ und $e_{n,2}$ mit $\text{ord}_0(G_n) = 1$. Deren Divisoren sind

$$\begin{aligned}(H_n) &= (n+1)[\alpha] + (n+1)[- \alpha] + (-2n)[\infty], \\ (G_n) &= (n+1)[\alpha] + (n+1)[- \alpha] + [0] + (-2n-1)[\infty].\end{aligned}\tag{14-41}$$

Per Konstruktion sind dies immer noch homogene Elemente vom Grad n und alle zusammen bilden sie ein Basis der Algebra \mathcal{Z}^α . Explizit können sie gegeben werden

⁶Unsere Situation ist eigentlich gerade durch die gespiegelte Aufspaltung gegeben. Es ist allerdings leichter, die Symmetrie in α und $-\alpha$ in der gewählten Aufspaltung zu erkennen. Vergleicht man die beiden Graduierungen und nimmt man in einer davon den negativen Grad, so ist die Identität ein beinahe-graduierter Isomorphismus, im Sinne der untenstehenden Definition.

als

$$H_n(t) := (t - \alpha)^{n+1}(t + \alpha)^{n+1} \frac{d}{dt}, \quad G_n(t) := t(t - \alpha)^{n+1}(t + \alpha)^{n+1} \frac{d}{dt}. \quad (14-42)$$

Eine direkte Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} [H_n, H_m] &= 2(m - n)G_{n+m}, \\ [G_n, G_m] &= 2(m - n)(G_{n+m+1} + \alpha^2 G_{n+m}), \\ [G_n, H_m] &= (2(m - n) - 1)H_{n+m+1} + 2(m - n)\alpha^2 H_{n+m}. \end{aligned} \quad (14-43)$$

Für $\alpha = \sqrt{3e}$ im 1. Fall der Knotenentartung sind diese Elemente gerade

$$\psi_N^*(V_{2k-1}) = -H_{-k}, \quad \psi_N^*(V_{2k}) = -G_{-k-1}.$$

Durch

$$\Phi : V_{2k-1} \mapsto -H_{-k}, \quad V_{2k} \mapsto -G_{-k-1} \quad (14-44)$$

erhalten wir die geometrisch induzierte Identifikation der entarteten Algebra im Fall (14-34) mit der vollen Algebra \mathcal{Z}^α , wie man durch direktes Rechnen verifiziert.

Wir sollten allerdings nicht vergessen, daß nicht nur die Algebren, sondern auch deren Graduierung von Bedeutung ist. Die einzige graduierte Algebra hier (im üblichen Sinne) ist die Witt-Algebra. Alle anderen Algebren sind nur beinahe-graduiert. Damit macht es keinen Sinn zu untersuchen, ob die obigen Abbildungen die Graduierung erhalten. Stattdessen führe ich den folgenden Begriff ein:

Definition 14.7. Seien T und S beinahe-graduierte (Lie-)Algebren. Ein (Lie-)Homomorphismus $\Phi : S \rightarrow T$ heißt ein *Homomorphismus von beinahe-graduierten Algebren*, falls es positive natürliche Zahlen a, k, l gibt, so daß für jedes homogene Element $s \in S$ gilt

$$a \cdot \deg(s) - k \leq \deg(\Phi(s)) \leq a \cdot \deg(s) + l. \quad (14-45)$$

Hierbei bezeichne $\deg(\Phi(s))$ den Wertebereich der jeweiligen Grade der nichtverschwindenden Komponenten von $\Phi(s)$.

Benutzt man für die Vektorfeldalgebren auf \mathbb{P}^1 den negativen Grad, so gilt

Proposition 14.8. *Alle die obigen Isomorphismen Φ sind Homomorphismen von beinahe-graduierten Lie-Algebren.*

Das Studium der Entartungen kann auch auf die zentralerweiterten Vektorfeldalgebren ausgedehnt werden. Der definierende Kozykel, der durch Integration über eine Niveaulinie C_τ gewonnen wird, degeneriert zum Standardkozykel für die Virasoro-Algebra. Selbstverständlich funktioniert auch die Übertragung auf die Differentialoperatoralgebren bzw. die entsprechenden Moduln.

EIGENE ARBEITEN

- [A] Bordemann, M., Hoppe J., Schaller, P., Schlichenmaier, M., *gl*(∞) and geometric quantization, Comm. Math. Phys. **138** (1991), 209–244.
- [B] Bordemann, M., Meinrenken, E., Schlichenmaier, M., *Toeplitz quantization of Kähler manifolds and gl*(N), $N \rightarrow \infty$ limit, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 281–296.
- [C] Ruffing, A., Deck, Th., Schlichenmaier, M., *String branchings on complex tori and algebraic representations of generalized Krichever-Novikov algebras*, Lett. Math. Phys. **26** (1992), 23–32.
- [D] Schlichenmaier, M., *An introduction to Riemann surfaces, algebraic curves and moduli spaces*, Lecture Notes in Physics 322, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.
- [E] Schlichenmaier, M., *Krichever-Novikov algebras for more than two points*, Lett. Math. Phys. **19** (1990), 151–165.
- [F] Schlichenmaier, M., *Krichever-Novikov algebras for more than two points: explicit generators*, Lett. Math. Phys. **19** (1990), 327–336.
- [G] Schlichenmaier, M., *Central extensions and semi-infinite wedge representations of Krichever-Novikov algebras for more than two points*, Lett. Math. Phys. **20** (1990), 33–46.
- [H] Schlichenmaier, M., *Verallgemeinerte Krichever-Novikov Algebren und deren Darstellungen*, PhD. Thesis 1990, Universität Mannheim, Germany.
- [I] Schlichenmaier, M., *Degenerations of generalized Krichever-Novikov algebras on tori*, J. Geom. Phys. **34** (1993), 3809–3824.
- [J] Schlichenmaier, M., *Differential operator algebras on compact Riemann surfaces*, Generalized Symmetries in Physics, Clausthal 1993 (Doebner, H.-D., Dobrev, V.K., Ushveridze, A.G., eds.), World Scientific, Singapore, London, 1994, pp. 425–435.
- [K] Schlichenmaier, M., Sheinman, O. K., *Sugawara construction and Casimir operators for Krichever-Novikov algebras*, Mannheimer Manuskripte Nr. 201 und q-alg/9512016, 1995 (to appear in Itogi Nauki i Tekhniki (Encyclopaedia Math. Sci.)).
- [L] Schlichenmaier, M., *Berezin-Toeplitz quantization of compact Kähler manifolds*, Invited lecture at the XIVth workshop on geometric methods in physics, Bialowieża, Poland, July 9-15, 1995, Mannheimer Manuskripte Nr. 203, q-alg/9601016 (to appear in the proceedings).

ALLGEMEINES LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Abraham, R., Marsden, J.E., *Foundation of Mechanics*, Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts, 1978.
- [2] Ali, S.T., Antoine J.-P., Gazeau, J.-P., Mueller, U.A., *Coherent states and their generalizations: A mathematical overview*, UCL-IPT-94-22, December 94 (to appear in Rev. Math. Phys.).
- [3] Ali, S.T., Doebner, H.D., *Ordering problem in quantum mechanics: Prime quantization and a physical interpretation*, Phys. Rev. A **41** (1990), 1199–1210.
- [4] Alvarez-Gaumé, L., Gomez, C., Reina, C., *Loop groups, Grassmannians and string theory*, Phys. Lett. B190 (1987), 55.
- [5] Anzaldo-Meneses, A., *Krichever-Novikov algebras on Riemann surfaces of genus zero and one with N punctures*, J. Math. Phys. **33** (1992), 4155–4163.
- [6] Arbarello, E., DeConcini, C., Kac, V.G., Procesi, C., *Moduli Spaces of Curves and Representation Theory*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 1–36.
- [7] Arnol'd, V.I., *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique de fluid parfaits*, Ann. Inst. Fourier **16** (1966), no. 1, 319–361.
- [8] Arnol'd, V.I., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [9] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D., *Deformation theory and quantization*, Lett. Math. Phys. **1** (1977), 521–530; *Deformation theory and quantization*, Ann. Phys. **111** (1978), 61-110 (part I), 111-151 (part II).
- [10] Berceanu, S., *Coherent states and geodesics: Cut locus and conjugate locus*, preprint FT-404-1995 (Institute of atomic physics, Bucharest), February 1995, to appear in J. Geom. Phys..
- [11] Berezin, F.A., *Covariant and contravariant symbols of operators*, Math. USSR-Izv. **6** (1972), no. 5, 1117-1151.
- [12] Berezin, F.A., *Quantization*, Math. USSR-Izv. **8** (1974), no. 5, 1109-1165.
- [13] Berezin, F.A., *Quantization in complex symmetric spaces*, Math. USSR-Izv. **9** (1975), no. 2, 341-379.
- [14] Berezin, F.A., *General concept of quantization*, Comm. Math. Phys. **40** (1975), 153-174.
- [15] Berger, C.A., Coburn, L.A., *Toeplitz operators and quantum mechanics*, J. Funct. Anal. **68** (1986), 273–299.
- [16] Berger, C.A., Coburn, L.A., *Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space*, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), 813-829.
- [17] Bernstein, I.N., Gelfand, I.M., Gelfand, S.I., *Differential Operators on the Base Affine Space and a Study of g -modules*, Lie groups and their representations (ed. I.M. Gelfand), Adam Hilger Ltd., 1975.

- [18] Bonneau, P., Flato, M., Gerstenhaber, M., Pinczon, G., *The hidden group structure of quantum groups: strong duality, rigidity and preferred deformations*, Comm. Math. Phys. **161** (1993), 125–156.
- [19] Bonora, L., Lugo, A., Matone, M., Russo, J., *A global operator formalism on higher genus Riemann surfaces: $b - c$ systems*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 329–352.
- [20] Bonora, L., Martellini, M., Rinaldi, M., Russo, J., *Neveu-Schwarz- and Ramond-type superalgebras*, Phys. Lett. B **206** (1988), 444–450.
- [21] Bonora, L., Matone, M., *KdV equation on Riemann surfaces*, Nuclear Phys. B **327** (1989), 415.
- [22] Bonora L., Rinaldi, M., Russo, J., Wu, K., *The Sugawara construction on genus g Riemann surfaces*, Phys. Lett. B **208** (1988), 440–446.
- [23] Bonora, L., Toppan, F., *Global chiral vertex operators on Riemann surfaces*, Rev. Math. Phys. **4** (1992), 425–449.
- [24] Borcherds, R.E., *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), 3086–3071.
- [25] Bordemann, M., Brischle, M., Emmerich, C., Waldmann, S., *Phase space reduction for star products: an explicit construction for $\mathbb{C}P^n$* , FR-THEP-95/6, q-alg/9503004.
- [26] Bordemann, M., Brischle, M., Emmerich, C., Waldmann, S., *Subalgebras with converging star products in deformation quantization: an algebraic construction for $\mathbb{C}P^n$* , FR-THEP-95/28, q-alg/9512019.
- [27] Bordemann, M., Hoppe J., Theissen, St., *Integrable field theories from Poisson algebras*, Phys. Lett. B **267** (1991), 374–376.
- [28] Bordemann, M., Meinrenken, E., Römer, H., *Total space quantization of Kähler manifolds*, Preprint April 93, Freiburg THEP 93/5.
- [29] Bordemann, M., Waldmann, S., *A Fedosov star product of Wick type for Kähler manifolds*, preprint 1996, FR-THEP-96/9, q-alg/9605012.
- [30] Borthwick, D., Klimek, S., Lesniewski, A., Rinaldi, M., *Super Toeplitz operators and non-perturbative deformation quantization of supermanifolds*, Comm. Math. Phys. **153** (1993), 49–76.
- [31] Borthwick, D., Klimek, S., Lesniewski, A., Rinaldi, M., *Supersymmetry and Fredholm modules over quantized spaces*, Comm. Math. Phys. **166** (1994), 397–415.
- [32] Borthwick, D., Klimek, S., Lesniewski, A., Rinaldi, M., *Matrix Cartan super domains, super Toeplitz operators, and quantization*, J. Funct. Anal. **127** (1993), 456–510.
- [33] Borthwick, D., Lesniewski, A., Rinaldi, M., *Hermitian symmetric superspace of type IV*, J. Math. Phys. **34** (1993), 4817–4833.
- [34] Borthwick, D., Lesniewski, A., Upmeyer, H., *Non-perturbative deformation quantization of Cartan domains*, J. Funct. Anal. **113** (1993), 153–176.
- [35] Boutet de Monvel, L., Guillemin, V., *The spectral theory of Toeplitz operators*. Ann. of Math. Stud., Nr.99, Princeton University Press, Princeton, 1981.
- [36] Bremner, M.R., *On a Lie algebra of vector fields on a complex torus*, J. Math. Phys. **31** (1990), 2033–2034.

- [37] Bremner, M.R., *Structure of the Lie algebra of polynomial vector fields on the Riemann sphere with three punctures*, J. Math. Phys. **32** (1991), 1607–1608.
- [38] Bremner, M.R., *Universal central extensions of elliptic affine Lie algebras*, J. Math. Phys. **35** (1994), 6685–6692.
- [39] Bremner, M., *Generalized affine Kac-Moody Lie algebras over localizations of the polynomial ring in one variable*, Canad. Math. Bull. **37** (1994), 21–28.
- [40] Bremner, M.R., *Four-point affine Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1981–1989.
- [41] Brylinski, J-L., McLaughlin, D., *Holomorphic quantization and unitary representations of the Teichmüller group*, Lie theory and geometry, in honor of B. Kostant (Brylinski, J-L., Brylinski, R., Guillemin, V., Kac, V., eds.), Birkhäuser, Boston, 1994, pp. 21–64.
- [42] Cahen, M., Gutt, S., *Invariant *-products of holomorphic functions on the hyperbolic hermitian spaces*, Lett. Math. Phys. **5** (1981), 219–228.
- [43] Cahen, M., Gutt, S., de Wilde M., *Local cohomology of the algebra of C^∞ functions on a connected manifold*, Lett. Math. Phys. **4** (1980), 157–167.
- [44] Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J. H., *Quantization of Kähler manifolds I: Geometric interpretation of Berezin's quantization*, J. Geom. Phys. **7** (1990), no. 1, 45–62.
- [45] Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J. H., *Quantization of Kähler manifolds II*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), 73–98.
- [46] Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J. H., *Quantization of Kähler manifolds III*, Lett. Math. Phys. **30** (1994), 291–305.
- [47] Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J. H., *Quantization of Kähler manifolds IV*, Lett. Math. Phys. **34** (1995), 159–168.
- [48] Calabi, E., *Isometric imbedding of complex manifolds*, Ann. of Math. **58** (1953), 1–23.
- [49] Cartier, P., De Witt-Morette, C., *Integration fonctionnelle; elements d'axiomatique*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. II **316** (1993), no. 6, 733–738.
- [50] Chari, V., Pressley, A. N., *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [51] Chern, S.S., *Complex manifolds without potential theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [52] Coburn, L. A., *Deformation estimates for the Berezin-Toeplitz quantization*, Comm. Math. Phys. **149** (1992), 415–424.
- [53] Coburn, L. A.; Xia, J., *Toeplitz algebras and Rieffel deformations*, Comm. Math. Phys. **168** (1995), 23–38.
- [54] Connes, A., *Noncommutative geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.
- [55] Connes, A., Flato, M., Sternheimer, D., *Closed star products and cyclic cohomology*, Lett. Math. Phys. **24** (1992), 1–12.
- [56] Date, E., Jimbo, M., Miwa, T., Kashiwara, J., *Transformation groups for Soliton Equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto **394** (1982).
- [57] Deck, Th., *Stringtheorie und Krichever-Novikov-Algebren auf Tori*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe 1990.

- [58] Deck, Th., *Deformations from Virasoro to Krichever-Novikov algebras*, Phys. Lett. B **251** (1990), 535–540.
- [59] Deligne, P., *Letter to Bordemann, Meinrenken and Schlichenmaier (March 1994)*.
- [60] De Wilde, M., Lecomte, P.B.A., *Existence of star products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), 487–496.
- [61] Dick, R., *Krichever-Novikov-like bases on punctured Riemann surfaces*, Lett. Math. Phys. **18** (1989), 255–265.
- [62] Dick, R., *Chiral fields on Riemann surfaces and string vertices*, PhD. Thesis 1990, Universität Hamburg, Germany.
- [63] Dick, R., *Global expansions of holomorphic differentials on punctured Riemann surfaces*, DESY 89-160.
- [64] Dirac, P.A.M., *The principle of quantum mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1930.
- [65] Dito, G., Flato, M., Sternheimer, D., Takahajan, L., *Deformation quantization and Nambu mechanics*, hep-th/9602016.
- [66] Dixmier, J., *C*-algebras*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1977.
- [67] Dowker, J.S., Wolski, A., *A finite model of two-dimensional ideal hydrodynamics*, MUTP 92/1.
- [68] Duistermaat, J.J., *Fourier integral operators*, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [69] Ebin, D.G., Marsden, J., *Group of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. Math. **92** (1970), 102 – 163.
- [70] Eguchi, T., Ooguri, H., *Conformal and current algebras on a general Riemann surface*, Nuclear Phys. B **282** (1987), 308–328.
- [71] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G., *Higher transcendental functions, vol. 2, Bateman manuscript project*, McGraw-Hill, 1953.
- [72] Fairlie, D., Fletscher, P., Zachos, C.N., *Trigonometric structure constants for new infinite algebras*, Phys. Lett. B **218** (1989), 203.
- [73] Faltings, G., *A proof for the Verlinde formula*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), 347–374.
- [74] Farkas, H.M., Kra, I., *Riemann surfaces*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [75] Fedosov, B.V., *Formal quantization*, Some topics of modern mathematics and their applications to problems of mathematical physics (Russisch), Moskau(1985), 129–136.
- [76] Fedosov, B.V., *A simple geometric construction of deformation quantization*, J. Differential Geo. **40** (1994), 213–238.
- [77] Fedosov, B.V., *Deformation quantization and index theory*, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [78] Feigin, B.L., *The Lie algebras $gl(\lambda)$ and the cohomology of the Lie algebra of differential operators*, Russian Math. Surveys **43** (1988), no. 2, 169–170.
- [79] Feigin, B.L., D.B. Fuks, D.B., *Invariant Skew-Symmetric Differential Operators on the Line and Verma Modul over the Virasoro Algebra*, Funktional Anal. Appl. **16** (1982), no. (2), 47–63.
- [80] Ferrari, F., *String theories on Riemann surfaces of algebraic functions*, Internat. J. Modern Phys. A **5** (1990), 2799–2820.

- [81] Ferrari, F., *Operator formalism on algebraic curves*, MPI-Ph/91-15, May 1991.
- [82] Ferrari, F., *Multivalued fields on the complex plane and conformal field theories*, Comm. Math. Phys. vol 156 (1993), 179–200.
- [83] Ferrari, F., Sobczyk, J., *Operator formalism on general algebraic curves*, Preprint UTF 333/94, ITF UWr 879/94, to appear in J. Geom. Phys..
- [84] Flato, M, Sternheimer, D., *Closedness of star products and cohomologies*, Lie theory and geometry, in honor of B. Kostant (Brylinski, J-L., Brylinski, R., Guillemin, V., Kac, V., eds.), Birkhäuser, Boston, 1994.
- [85] Flato, M, Sternheimer, D., *Star products, quantum groups, cyclic cohomology and pseudo-differential calculus*, Contemp. Math. **175** (1994), 53–72.
- [86] Floratos, E. G., *The Heisenberg-Weyl group on the $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ discretized torus membrane*, Phys. Lett. B **228** (1989), 335–340.
- [87] Floratos, E. G., *Spin, wedge and vertex operator representations of trigonometric algebras*, Phys. Lett. B **232** (1989), 467–472.
- [88] Floratos, E. G., Iliopoulos, J., Tiktopoulos, G., *A note on $SU(\infty)$ classical Yang-Mills theories*, Phys. Lett. B **217** (1989), 285–288.
- [89] Frenkel, E., Kac, V., Radul A., Wang W., *$W_{1+\infty}$ and $W(gl_N)$ with central charge N* , Comm. Math. Phys. **170** (1995), 337–357.
- [90] Frenkel, I., Lepowski, J. Meurman, A., *Vertex operator algebras and the monster*, Academic Press, Boston, 1988.
- [91] Fuks, D.B., *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*, Consultants Bureau, New York, London, 1986.
- [92] Gerstenhaber, M., *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. **79** (1964), 59–103.
- [93] Getzler, E., *Cyclic homology and the Beilinson-Manin-Schechtman central extension*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 729–734.
- [94] Gieres, F., *Conformally covariant operators on Riemann surfaces*, Internat. J. Modern Phys. A **8** (1993), 1–58.
- [95] Golenishcheva-Kutzova, M. I., Lebedev, D. R., *Vertex operator representation of some quantum tori lie algebras*, Comm. Math. Phys. **148** (1992), 403–416.
- [96] Golenishcheva-Kutzova, M. I., Lebedev, D. R., *\mathbb{Z} -graded trigonometric Lie subalgebras in $\hat{A}_\infty, \hat{B}_\infty, \hat{C}_\infty$, and \hat{D}_∞ and their vertex operator representations*, Funktional Anal. Appl. **27** (1993), no. 1, 10–20.
- [97] Golenishcheva-Kutzova, M. I., Lebedev, D. R., Olshanetsky, M. A., *Between $\hat{gl}(\infty)$ and \hat{gl}_N affine algebras. I. Geometrical actions*, Theoret. and Math. Phys. **100** (1994), no. 1, 853–873.
- [98] Grauert, H., Fritzsche, K., *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher*, Springer, Heidelberg, Berlin, New York, 1974.
- [99] Griffiths, Ph., Harris J., *Principles of algebraic geometry*, John Wiley, New York, 1978.
- [100] Grigis, A., Sjöstrand, J., *Microlocal analysis for differential operators*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1994.

- [101] Gotay, M., Grundling, H., Tuynman, G., *Obstruction results in quantization theory*, preprint 1996, to appear in J. Nonlinear Sci..
- [102] Grosse, H., Klimčik, C., Prešnajder, P., *Simple field theoretical models on noncommutative manifolds*, hep-th/9510177.
- [103] Grothendieck, A., Dieudonné, J. A., *Eléments de géométrie algébrique*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques **8, 11, 17, 20, 24, 28, 32**.
- [104] Guillemin, V., *Symplectic spinors and partial differential equations*, Géométrie symplectic et physique mathématique (Aix en Provence 1974), Coll. Int. CNRS 237, pp. 217–252.
- [105] Guillemin, V., *Some classical theorems in spectral theory revisited*, Seminars on singularities of solutions of linear partial differential equations, Ann. of Math. Stud., Nr.91 (Hörmander, L., ed.), Princeton University Press, Princeton, 1979, pp. 219–259.
- [106] Guillemin, V., *Star products on compact pre-quantizable symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys. **35** (1995), 85–89.
- [107] Gunning R.C., *Vorlesungen über Riemannsche Flächen*, BI-Verlag, Mannheim, 1972.
- [108] Gunning, R.C., Rossi, H., *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Eaglewood Cliffs, N.J., U.S.A., 1965.
- [109] Guo, H-y., Na, J-s., Shen, J-m., Wang, S-k., Yu, Q-h., *The algebras of meromorphic vector fields.....*, Comm. Theoret. Phys. **12** (1989), 349–354.
- [110] Gutt, S., *Equivalence of deformations of twisted products on a symplectic manifold*, Lett. Math. Phys. **3** (1979), 495–502.
- [111] Gutt, S., *Déformations formelles de l'algèbre des fonctions différentiables sur une variété symplectique*, Thesis Bruxelles (1980); Ann. Inst. H. Poincaré A **32** (1980), 1–31.
- [112] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [113] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [114] Hilton, P.J., Stammbach, U., *A course in homological algebra*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.
- [115] Hörmander, L., *The analysis of linear partial differential operators Vol I-IV*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.
- [116] Hoppe, J., *Quantum theory of a relativistic surface ...*, MIT PhD Thesis 1982, Elem. Part. Res. J. (Kyoto) **83** (1989/90), no. 3.
- [117] Hoppe, J., *Diff_AT² and the curvature of some infinite dimensional manifolds*, Phys. Lett. B **215** (1988), 706.
- [118] Hoppe, J., *Diffeomorphism groups, quantization und SU(∞)*, Int. J. Mod. Phys. A **4** (1989), 5235–5248.
- [119] Hoppe J., Olshanetsky, M., Theissen, St., *Dynamical systems on quantum tori lie algebras*, Comm. Math. Phys. **155** (1993), 429–448.
- [120] Hoppe, J., Schaller, P., *Infinitely many versions of SU(∞)*, Phys. Lett. B **237** (1990), 407.
- [121] Huebschmann, J., *On the quantization of Poisson algebras*, Symplectic geometry and mathematical physics, Proc. Colloq., Aix-en-Provence/ Fr. 1990, Prog. Math. 99 (Donato, P., Duval, C., Elhadad, J., Tuynman, G. M., eds.), Birkhäuser, Boston, MA, 1991, pp. 204–233.

- [122] Jaffe, A., Klimek, S., Lesniewski, A., *Representations of the Heisenberg algebra on a Riemann surface*, Comm. Math. Phys. **126** (1989), 421–431.
- [123] Kac, V., *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [124] Kac, V.G., Peterson, D.H., *Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **78** (1981), 3308–3312.
- [125] Kac, V.G., Radul, A., *Quasifinite highest weight modules over the Lie algebra of differential operators on the circle*, Comm. Math. Phys. **157** (1993), 429–457.
- [126] Kac, V.G., Raina, A.K., *Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*, Adv. Ser. in Math. Physics Vol.2, World Scientific, 1987.
- [127] Karabegov, A. V., *Contravariant symbol quantization on S^2* , hep-th/9409034.
- [128] Karabegov, A. V., *Deformation quantization with separation of variables on a Kähler manifold*, hep-th/9508013.
- [129] Karabegov, A. V., *Berezin's quantization on flag manifolds and spherical modules*, preprint.
- [130] Karasev, M.V., *Geometric star-products*, Symplectic geometry and quantization, Sanda, 1993 (Maeda, Y., ed.), Contemp. Math.179, AMS, Providence, R.I., U.S.A., 1994, pp. 115–121.
- [131] Karasev, M.V., Maslov, V. P., *Asymptotic and geometric quantization*, Russian Math. Surveys **39** (1984), no. 6, 133–205.
- [132] Karasev, M.V., Maslov, V. P., *Nonlinear Poisson brackets: geometry and quantization*, Transl. Math. Monographs, vol. 119, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.
- [133] Kassel C., *Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra*, J. Pure Appl. Algebra **34** (1984), 265–275.
- [134] N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya, Y. Yamada, *Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys. **116** (1988), 247–308.
- [135] Klimek, S., Lesniewski, A., *Global Laurent expansions on Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys. **125** (1989), 597–611.
- [136] Klimek, S., Lesniewski, A., *Quantum Riemann surfaces: I. The unit disc*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 103–122.
- [137] Klimek, S., Lesniewski, A., *Quantum Riemann surfaces: II. The discrete series*, Lett. Math. Phys. **24** (1992), 125–139.
- [138] Klimek, S., Lesniewski, A., *Quantum Riemann surfaces: III. The exceptional case*, Lett. Math. Phys. **32** (1994), 45–61.
- [139] Klimek, S., Lesniewski, A., *Quantum Riemann surfaces for arbitrary Planck's constant*, HUTMP 95/443.
- [140] Knizhnik, V.G., *Analytic fields on Riemannian surfaces*, Phys. Lett. B **180** (1986), 247–254; *Analytic fields on Riemannian surfaces, II.*, Comm. Math. Phys. **112** (1987), 567–590.
- [141] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of differential geometry, Vol. I and Vol. II*, Interscience Publishers, New York, 1969.
- [142] Kolář, I., Michor, P. W., Slovák, J., *Natural operations in differential geometry*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [143] Kontsevich, M., *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), 1–23.

- [144] Kostant, B., *Quantization and unitary representation*, Lectures in Modern Analysis and Applications III (Dudley, R.M. et al., eds.), Lecture Notes Math., Vol. 170, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970, pp. 87–208.
- [145] Krichever, I.M., *private communication (1995)*.
- [146] Krichever, I.M., Novikov, S.P., *Algebras of Virasoro type, Riemann surfaces and structures of the theory of solitons*, Funktional Anal. Appl. **21** (1987), no. 2, 46.
- [147] Krichever, I.M., Novikov, S.P., *Virasoro type algebras, Riemann surfaces and strings in Minkowski space*, Funktional Anal. Appl. **21** (1987), no. 4, 47.
- [148] Krichever, I.M., Novikov, S.P., *Algebras of Virasoro type, energy-momentum tensors and decompositions of operators on Riemann surfaces*, Funktional Anal. Appl. **23** (1989), no. 1, 19–23.
- [149] Krichever, I.M., Novikov, S.P., *Virasoro-Gelfand-Fuks type algebras, Riemann surfaces, operator's theory of closed strings*, J. Geom. Phys. **5** (1988), 631 – 661.
- [150] Krichever, I.M., Novikov, S.P., *Riemann surfaces, operator fields, strings. Analogues of Fourier-Laurent bases*, Physics and mathematics of strings (Brink, Friedan, Polyakov, ed.), World Scientific, 1990, pp. 356–388.
- [151] Li, Wang-Lai, *2-cocycles on the algebra of differential operators*, J. Algebra **122** (1989), 64–80.
- [152] Lichnerowicz, A., *Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (les $*_{\nu}$ -products)*, Ann. Inst. Fourier **32** (1982), 157–209.
- [153] Madore, J., *The fuzzy sphere*, Class. Quant. Grav. **9** (1992), 69–87.
- [154] Matone, M., *Uniformization theory and 2D gravity. I. Liouville action and intersection numbers*, Internat. J. Modern Phys. A **10**, 289–335 1995.
- [155] Mezincescu, L., Nepomechie, R.I., Zachos C.K., *(Super)conformal Algebra on the (Super)torus*, Nuclear Phys. B **315** (1989), 43.
- [156] Moreno, C., *$*_{\nu}$ -products on some Kähler manifolds*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 361–372.
- [157] Moreno, C., Ortega-Navarro, P., *$*_{\nu}$ -products on $D^1(\mathbb{C})$, S^2 and related spectral analysis*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), 181–193.
- [158] Moreno, C., Ortega-Navarro, P., *Deformations of the algebra of functions on Hermitian symmetric spaces resulting from quantization*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A **38** (1983), 215–241.
- [159] Moyal, J., *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Camb. Phil. Soc. **45** (1949), 99–124.
- [160] Mumford, D., *Curves and their Jacobians*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1976.
- [161] Neroslavskii, O. M., Vlassov, A. T., *Existence des produits $*$ sur une variété*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. II **292** (1981), 71–73.
- [162] Odziejewicz, A., *On reproducing kernels and quantization of states*, Comm. Math. Phys. **114** (1988), 577–597.
- [163] Odziejewicz, A., *Coherent states and geometric quantization*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), 385–413.

- [164] Omori, H., Maeda Y., Yoshioka, A., *Weyl manifolds and deformation quantization*, Adv. Math. **85** (1991), 224–255.
- [165] Omori, H., Maeda Y., Yoshioka, A., *Existence of closed star-products*, Lett. Math. Phys. **26** (1992), 284–294.
- [166] Peetre, J., *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels*, Math. Scand. **7** (1959), 211–218; *Rectification*, Math. Scand. **6**, 116–120.
- [167] Pflaum, M. J., *Local analysis of deformation quantization*, Dissertation an der LMU-München, 1995.
- [168] Pflaum, M. J., *A new concept of deformation quantization. I. Normal order quantization on cotangent bundles*, gk-mp9512/28.
- [169] Radul, A.O., *A central extension of the Lie algebra of differential operators on the circle and W -algebras*, Pis'ma Zh. Éksp. Teor. Fiz. **50** (1989), no. 8, 341–343.
- [170] Rădulescu, F., *Some estimates for the Banach space norms in the von Neumann algebras associated with the Berezin's quantization of compact Riemann surfaces*, funct-an/9511001.
- [171] Rădulescu, F., *On the Γ -equivariant form of the Berezin's quantization of the upper half plane*, funct-an/9502001.
- [172] Raina, A.K., *An algebraic geometry study of the $b - c$ system with arbitrary twist fields and arbitrary statistics*, Comm. Math. Phys. **140** (1991), 373–397.
- [173] Raina, A.K., *Fay's trisecant identity and Wick's theorem: an algebraic geometry viewpoint*, Expo. Math. **8** (1990), 227–245.
- [174] Rawnsley, J. H., *Coherent states and Kähler manifolds*, Quart. J. Math. Oxford Ser(2) **28** (1977), no. 2, 403–415.
- [175] Rieffel, M. A., *Deformation quantization and operator algebras*, Operator theory/Operator algebras and applications (Arveson, W., Douglas, R., eds.), Proc. Sympos. Pure Math.51, 1990, pp. 411–423.
- [176] Rufing, A., *Prozessinduzierte symmetrische Basiskonstruktion verallgemeinerter Krichever-Novikov-Algebren für bosonische Stringtheorien auf maximal vierfache punktierten \mathbb{C} -Tori*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe 1991.
- [177] Sadov, V.A., *Bases on multipunctured Riemann surfaces and interacting strings amplitudes*, Comm. Math. Phys. **136** (1991), 585–597.
- [178] Schiff, L. I., *Quantum mechanics*, McGraw-Hill, Tokyo, 1955.
- [179] Schottenloher, M., *Geometrie und Symmetrie in der Physik*, Vieweg, Braunschweig, 1995.
- [180] Schottenloher, M., *Eine mathematische Einführung in die konforme Feldtheorie*, gk-mp9510/21.
- [181] Serre, J.P., *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.
- [182] Sheinman, O.K., *Elliptic affine Lie algebras*, Funktional Anal. Appl. **24** (1990), no. 3, 210–219.
- [183] Sheinman, O.K., *Highest weight modules over certain quasigraded Lie algebras on elliptic curves*, Funktional Anal. Appl. **26** (1992), no. 3, 203–208.
- [184] Sheinman, O.K., *Affine Lie algebras on Riemann surfaces*, Funktional Anal. Appl. **27** (1993), no. 4, 54–62.

- [185] Sheinman, O.K., *Highest weight modules for affine Lie algebras on Riemann surfaces*, Funktional Anal. Appl. **29** (1995), no. 1.
- [186] Sheinman, O.K., *Representations of Krichever-Novikov algebras*, Topics in topology and mathematical physics (Novikov, S.P., ed.), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., U.S.A., 1995.
- [187] Sheinman, O.K., *Integrable many-body systems of Calogero-Moser-Sutherland type in high dimension*, Internat. Math. Res. Notices (to appear).
- [188] Śniatycki, *Geometric quantization and quantum mechanics*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.
- [189] Souriau, J.M., *Structure des système dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.
- [190] Spera, M., Valli, G., *Remarks on Calabi's diastasis function and coherent states*, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) **44** (1993), 497–512.
- [191] Takasaki, K., *Nonabelian KP hierarchy with Moyal algebraic coefficients*, J. Math. Phys. (1994), 332–364.
- [192] Takhtajan, L., *Semi-classical Liouville theory, complex geometry of moduli spaces, and uniformization of Riemann surfaces*, New symmetry principles in quantum field theory (Fröhlich et al., eds.), pp. 383–406 Plenum Press New York 1992.
- [193] Toppan, F., *KP hierarchies, polynomial and rational W algebras on Riemann surfaces: A global approach*, Mod. Phys. Letters A **10** (1995), 133–147.
- [194] Tsuchiya, A., Ueno, K., Yamada, Y., *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*, Adv. Stud. Pure Math. **19** (1989), 459–566.
- [195] Tuynman, G.M., *Generalized Bergman kernels and geometric quantization*, J. Math. Phys. **28** (1987), 573–583.
- [196] Tuynman, G.M., *Quantization: Towards a comparison between methods*, J. Math. Phys. **28** (1987), 2829–2840.
- [197] Ueno, K., *On conformal field theory*, Vector bundles in algebraic geometry (Hitchin, N.J., ed.), Proceedings of the 1993 Durham symposium, Durham, UK. Cambridge, Cambridge University Press, 1995, pp. 283–345.
- [198] Unterberger, A., Upmeyer, H., *The Berezin transform and invariant differential operators*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), 563–597.
- [199] Upmeyer, H., *Toeplitz C^* -algebras on bounded symmetric domains*, Ann. of Math. **119** (1984), 549–576.
- [200] Upmeyer, H., *Toeplitz operators on symmetric Siegel domains*, Math. Ann. **271** (1985), 401–414.
- [201] Upmeyer, H., *Fredholm indices for Toeplitz operators on bounded symmetric domains*, Am. J. Math. **110** (1988), 811–832.
- [202] Upmeyer, H., *Toeplitz C^* -algebras and noncommutative duality*, J. Oper. Theory **26** (1991), 407–432.
- [203] Upmeyer, H., *Toeplitz operators and index theory in several complex variables*, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [204] Verdier, J.L., *Les représentations des algèbres de Lie affines: applications à quelques problèmes de physique (d'après E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa)*, Sem. Bourbaki, Exp. 596, Asterisque **92-93**.

- [205] Vey, J., *Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 421-454.
- [206] Wang, S, Xu, K., *Superconformal algebra of meromorphic vector fields with multipoles on a super Riemann sphere*, J. Math. Phys. **31** (1990), 2040–2041.
- [207] Weinstein A., *Deformation quantization*, Sem. Bourbaki No. 789, Astérisque **227** (1995), 389–409.
- [208] Wells, R.O., *Differential analysis on complex manifolds*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [209] Weyl, H., *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, unveränderter Nachdruck der 2.Auflage, 1931 Leipzig, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1977.
- [210] Witten, E., *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in Diff. Geom. **1** (1991), 243–310.
- [211] Witten, E., *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769–796.
- [212] Wodzicki, *Cyclic homology of differential operators*, Duke Math. J. **54** (1987), 641–647.
- [213] Woodhouse, N., *Geometric quantization*, Clarendon Press, Oxford, 1980.
- [214] Zeitlin, V., *Algebraization of 2-d ideal fluid hydrodynamical systems and their finite-mode approximations*, preprint.
- [215] Zograf, P.G., *The Liouville action on moduli spaces, and uniformization of degenerating Riemann surfaces*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 941–965.
- [216] Zucchini, R., *The drinfeld-Sokolov holomorphic bundle and classical W algebras on Riemann surfaces*, J. Geom. Phys. **16** (1995), 237–274.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
-------------------------	---

TEIL I: QUANTISIERUNG

2. Von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik	13
3. Deformationsquantisierung und Sternprodukte	21
4. Geometrische Quantisierung	30
5. Berezin-Toeplitz-Quantisierung	
(a) Die Definition der Berezin-Toeplitz-Quantisierung	44
(b) Der Zusammenhang zwischen geometrischer Quantisierung und der Berezin-Toeplitz-Quantisierung	49
(c) Beispiele	52
(d) Berezins kohärente Zustände	58
6. Die Approximationssätze zur Berezin-Toeplitz-Quantisierung	
(a) Die Resultate	66
(b) Beweis von Theorem 6.2	69
(c) Beweis von Theorem 6.1	80
7. Ein Sternprodukt via Berezin-Toeplitz-Quantisierung	88
8. \mathfrak{L}_α -Approximation	
(a) Die Definition	95
(b) \mathfrak{L}_α -Approximation und Quantisierung	97
(c) Der Zusammenhang mit den divergenzfreien Vektorfeldern	102
(d) Weitere Beispiele. Die Quantentorusalgebra	105

TEIL II: KONFORME FELDTHEORIE

9. Die Mehrpunktalgebren der konformen Feldtheorie	
(a) Die geometrische Situation	114
(b) Die geometrischen Algebren und Moduln	118
(c) Die beinahe-graduierte Struktur	122
(d) Die Delta-Distribution und weitere Eigenschaften	129
10. Zentrale Erweiterungen und affine Lie-Algebren	
(a) Die zentralen Erweiterungen	134
(b) Lokale Kozykel	139
(c) Die affinen Mehrpunktalgebren	145
11. Die Sugawara-Konstruktion	
(a) Die Resultate im 2-Punktfall	153
(b) Die Beweise	161
(c) Die Verallgemeinerung auf die Mehrpunktsituation	172
12. Höchstgewichtsdarstellungen, Gewichte und Casimir-Operatoren der Sugawara-Konstruktion	
(a) Höchstgewichtsdarstellungen	176
(b) Die Gewichte der Sugawara-Darstellung	181
(c) Der Casimir-Operator und seine Eigenwerte	188
13. Semi-infinite Wedgeprodukte und $b - c$ -Systeme	
(a) Semi-infinite Wedgeprodukte	192
(b) $b - c$ -Systeme	203
14. Ein Beispiel einer Entartung im Fall des Torus	215
Literaturverzeichnis	231